

G3. Circuits RCL

I. INTRODUCTION

Un circuit RLC est un circuit électrique contenant une résistance électrique (R), une bobine (inductance L) et un condensateur (capacité C). Le comportement d'un circuit RLC est généralement décrit par une équation différentielle du second ordre. Les circuits RLC sont utilisés pour réaliser des filtres de fréquence, ou des transformateurs d'impédance.

Les équations qui apparaissent dans les différents chapitres de la physique ou des sciences en général sont souvent exactement les mêmes, et ainsi, un phénomène donné a des "analogues". La manipulation proposée, consacrée à l'étude des circuits électriques oscillants RCL, permet aussi de simuler les oscillations mécaniques.

II. THEORIE

Considérons le circuit électrique suivant (Fig. 1):

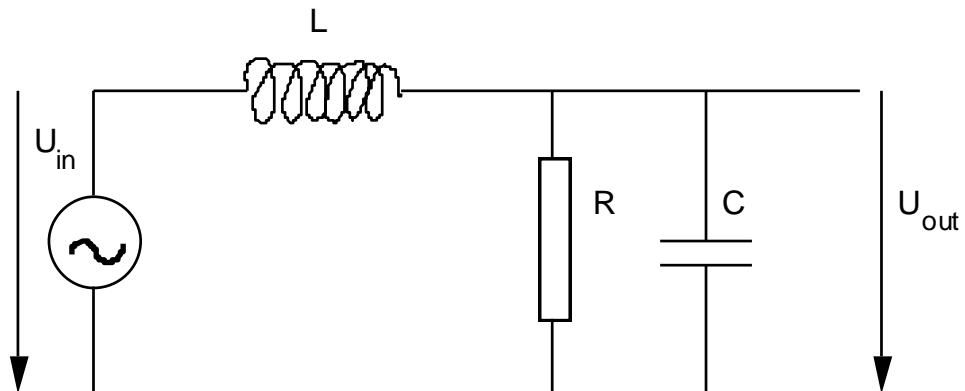


Fig. 1: Circuit électrique RLC

Rappelons que les relations tension-courant des éléments sont:

Pour la résistance R : $U_R = I_R R$

Pour la capacité C : $\int I_C dt = CU_C$

Pour la bobine L : $U_C = -L \frac{dI_L}{dt}$

(U_x et I_x représentent la tension aux bornes et le courant circulant dans l'élément x)

En utilisant les lois de Kirchhoff, et en posant $U_{out} = U(t) = U$ il vient:

$$C \cdot U(t) = \int I_c \cdot dt \quad \text{et} \quad U(t) = R \cdot I_R$$

Comme : $I_C + I_R = I_L$

Alors :

$$C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} = \int \frac{U - U_{\text{int}}}{L} dt$$

En dérivant par rapport au temps: $\ddot{U} + \frac{\dot{U}}{RC} + \frac{U}{LC} = \frac{U_{\text{in}}}{LC}$ (1)

Cette équation (1) est du même type que l'équation caractérisant un oscillateur mécanique amorti.

Modèle: oscillateur amorti.

On considère le modèle suivant de l'oscillateur (Fig. 2): un point matériel de masse m se déplace sur un axe Ox (un seul degré de liberté). Il est soumis:

- 1) à une force de rappel $\vec{F}_r = -k \cdot \vec{x}$ qui tend à ramener la masse à sa position d'équilibre
- 2) à une force de frottement de type visqueux $\vec{F}_f = -\eta \cdot \vec{v}$
- 3) à une force de perturbation extérieure dépendant du temps $G(t)$.

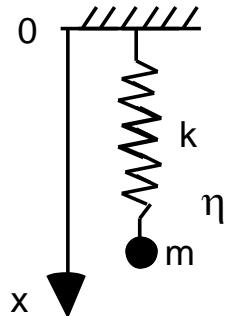


Fig. 2: Oscillateur amorti

L'équation différentielle du mouvement de la masse m s'écrit (à montrer par le lecteur):

$$\ddot{x} + 2\lambda \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = p \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad (2)$$

avec: $\lambda = \frac{\eta}{2m}$ $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\frac{G(t)}{m} = p \sin \Omega \cdot t$

1) Oscillations libres

La force de perturbation n'est pas appliquée: $G(t) = 0$, et alors: $\ddot{x} + 2\lambda \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$ (3)

Comme condition initiale, on choisit de lâcher la masse sans vitesse initiale ($\dot{x}(0) = 0$) d'une position x_0 par rapport à sa position d'équilibre. Trois cas sont à distinguer conduisant à trois solutions (Fig. 3):

a) $\lambda^2 < \omega_0^2$ **amortissement faible:**

$$x = x_0 \cdot e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad (4)$$

avec $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$ et $\tan \varphi = -\frac{\lambda}{\omega}$

On définit: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ = pseudo-période et $\Delta = \lambda \cdot T$ = décrément logarithmique

Cas particulier: $\lambda = 0$ (pas de frottement), c'est le modèle de l'*oscillateur harmonique*

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t - \varphi_0)$$

$(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}})$ est la pulsation de l'oscillateur harmonique, φ_0 = déphasage arbitraire)

b) $\lambda^2 = \omega_0^2$ **mouvement amorti critique**

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} (1 + \lambda t) \quad (5)$$

c) $\lambda^2 > \omega_0^2$ **amortissement fort**: mouvement apériodique:

$$x = x_0 e^{-\lambda t} (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}) \quad (6)$$

Avec : $\omega^2 = \lambda^2 - \omega_0^2$ $C_1 = \frac{\omega - \lambda}{2\omega}$ $C_2 = \frac{\omega + \lambda}{2\omega}$

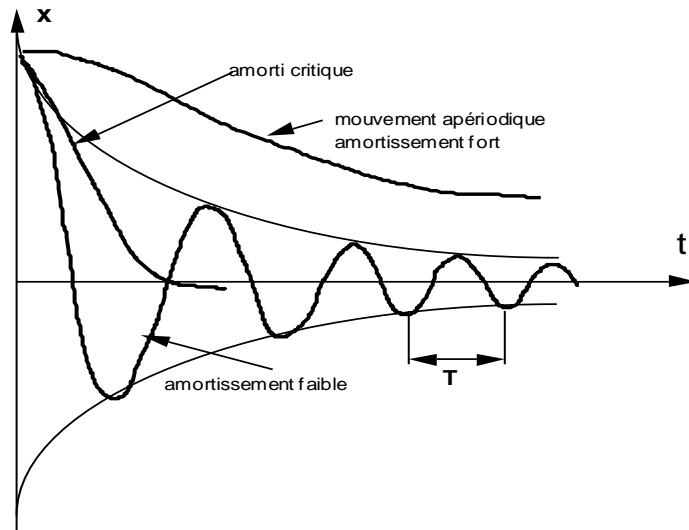


Fig. 3: Oscillations en régime libre dans les trois cas d'amortissement: faible, critique et fort.

2). Oscillations forcées

On suppose le système à l'équilibre initialement ($x(0) = \dot{x}(0) = 0$) et on applique une perturbation sinusoïdale ($p = p \sin(\Omega t)$). Pour simplifier l'écriture, le déphasage de la perturbation est choisi nul (choix de l'origine du temps).

La solution de l'équation (2) est:

$x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t - \psi) + C e^{-\lambda t} \cos(\omega t - \varphi)$ si $\lambda^2 < \omega_0^2$	amortissement faible
$x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t - \psi) + e^{-\lambda t} (C_1 + C_2 t)$ si $\lambda^2 = \omega_0^2$	amortissement critique
$x(t) = A(\Omega) \sin(\Omega t - \psi) + e^{-\lambda t} (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t})$ si $\lambda^2 > \omega_0^2$	amortissement fort

mouvement permanent

mouvement transitoire

avec

$$\psi = \arctan\left(\frac{2 \cdot \lambda \cdot \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \quad \text{et} \quad A(\Omega) = \frac{p}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4 \cdot \lambda^2 \cdot \Omega^2}} \quad (7)$$

Les constantes C et φ ou C_1 et C_2 se déterminent dans chaque cas à l'aide des conditions initiales.

L'amplitude des oscillations forcées stationnaires $A(\Omega)$ ainsi que le déphasage $\psi(\Omega)$ dépendent de la valeur de Ω (Fig. 4).

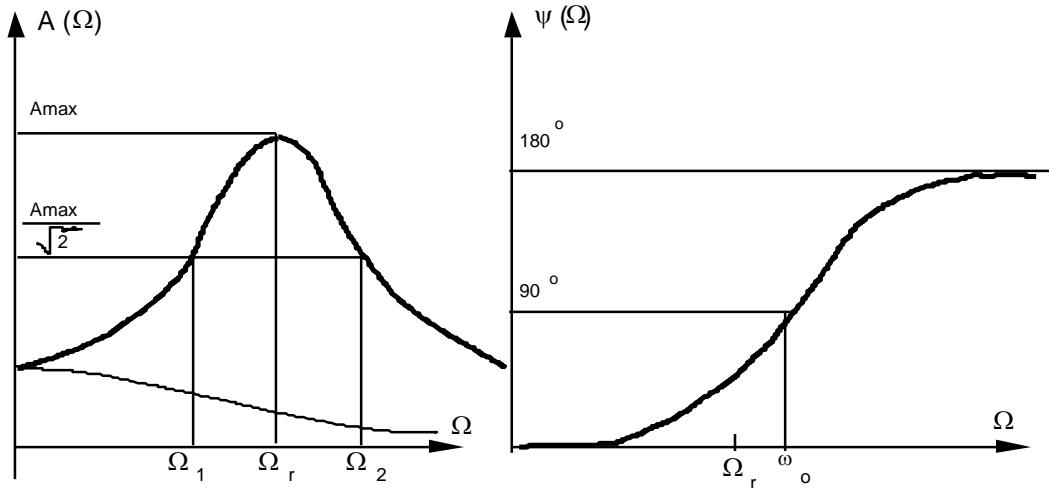


Fig. 4: Amplitude et déphasage des oscillations en régime forcé.

a) amortissement faible:

On obtient pour $A(\Omega)$ une "courbe de résonance" typique caractérisée par:

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \quad \text{et} \quad \Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = \frac{2\lambda\omega}{\Omega_r}$$

(Pulsion résonante) (Largeur de raie)

Ω_1 et Ω_2 correspondent à la largeur du pic à mi-hauteur, c'est-à-dire à une valeur de l'amplitude de $\frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$, ou encore à une atténuation de 3 dB par rapport à la valeur maximale.

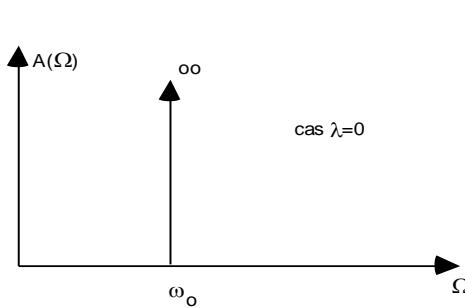
Le facteur de qualité de la résonance vaut:

$$Q = \frac{\Omega_r}{\Delta\Omega} = \frac{\Omega_r^2}{2\lambda\omega}$$

Il est possible de calculer le coefficient d'amortissement $\lambda = \Omega_r \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{G_{\max}^2}{G_{\max}^2 - 1}} - 1 \right)}$

ou $G_{\max} = \frac{U_{out}}{U_{in}}$ est le gain à la résonance.

Remarque: Les fréquences ω_0 , ω et Ω_r sont telles que: $\omega_0^2 - \omega^2 = \omega^2 - \Omega_r^2 = \lambda^2$



En l'absence de frottement ($\lambda = 0$), la courbe de résonance $A(\Omega)$ présente seulement une singularité pour $\Omega = \omega_0$ (Fig. 5)

Fig. 5: Amplitude des oscillations en régime forcé sans amortissement

Régime transitoire.

Le deuxième terme des équations (7) représente des *oscillations propres amorties* de pulsation ω . Lorsque t croît, il perd rapidement de son importance au profit du premier terme qui représente des *oscillations forcées stationnaires* de pulsation Ω et de déphasage ψ . Lorsque Ω et ω sont voisins, le système oscille avec une *pulsation de battement* $\omega_B = |\omega - \Omega|$

b) amortissement fort: $\lambda^2 > \frac{\omega_0^2}{2}$

La courbe présente un maximum pour $\Omega = 0$: il n'y a pas d'oscillation forcée, mais un déplacement fixe valant $\frac{p}{\omega_0}$.

Les solutions de l'oscillateur mécanique amorti s'appliquent directement à l'équation différentielle (1) du circuit oscillant RCL, qui est aussi un oscillateur amorti, avec les analogies suivantes:

"électrique"	"mécanique"
$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$	$\sqrt{\frac{k}{m}}$
$2\lambda = \frac{1}{R \cdot C}$	$\frac{\eta}{m}$
U	x

Ainsi, à l'aide du circuit RCL, on peut observer et simuler le comportement d'un système mécanique en vibration. En particulier, si on pose $U_p = 0$ et que, au temps $t = 0$, on donne au système une impulsion de courant, on aura les cas décrits sous "oscillations libres". Si on pose $\frac{U_p}{L \cdot C} = p \sin \Omega t$, on aura les cas exposés sous "oscillations forcées".

III. TRAVAIL DEMANDE

1) Réaliser le montage d'un circuit RCL tel que présenté à la figure 1, avec:

L = inductance variable jusqu'à 1 H

C = capacité variable jusqu'à 0.22 μF

R = résistance variable jusqu'à 1 $\text{M}\Omega$

Utiliser la plateforme NI ELVIS comme générateur de fonction avec mesure de la fréquence pour alimenter le circuit. Utiliser l'oscilloscope du NI ELVIS pour visualiser et enregistrer les valeurs numériques.

Un multimètre permet d'obtenir la valeur de résistance interne de l'inductance.

2) Mise en évidence de l'évolution non forcée.

Choisir une fréquence de résonance du système de l'ordre de 7 kHz ($L \approx 5 \cdot 10^{-2}$ H, $C \approx 10^{-2}$ μF) avec $R \approx 900$ k Ω

Enclencher le générateur sur "onde carrée" de fréquence de l'ordre de 100 Hz. Utiliser la sortie FGEN BNC du générateur. Le canal CH0 mesure le signal du générateur et le canal CH1 mesure le signal de sortie du circuit.

Expliquer ce que l'on observe sur l'oscilloscope et effectuer des vérifications. Diminuer progressivement la résistance. Mettre en évidence des amortissements faible, critique et fort. Discuter qualitativement.

En effectuant un ajustement sur la mesure pour le cas faiblement amorti, déterminer le coefficient d'amortissement λ . Le comparer au coefficient d'amortissement théorique. Calculer également le coefficient d'amortissement corrigé avec la résistance interne :

$$\lambda' = \lambda + \frac{R_{in}}{2L}$$

Répéter pour trois circuits faiblement amortis différents (différentes valeurs de R).

3) Mise en évidence de l'évolution dans le cas "forcé".

Utiliser la plateforme NI ELVIS comme générateur pour les ondes "sinus". Connecter CH0 pour la mesure de U_{in} et CH1 pour la mesure de U_{out} (Fig. 6).

Pour les mêmes valeurs de R , C et L comme dans le cas des oscillations libres (3 cas d'oscillations faiblement amorti) effectuer le suivant :

- Calculer la valeur de la fréquence de résonance du circuit.
- Mesurer $G(\Omega)$ et $\psi(\Omega)$ en utilisant le programme LabVIEW "Bode Analyzer" sur l'ordinateur (utiliser un nombre de pas par décade suffisant).
- Déterminer Ω_r , Q et λ

Comparer les valeurs λ expérimentales avec celles déterminées en régime libre pour le trois cas faiblement amorti. Comparer avec les valeurs de coefficient d'amortissement corrigé. Discuter et expliquer la différence.

Démontrer comment se comporte le circuit si on échange la place de l'inductance L et la capacité C dans le montage.

Diagramme de Bode avec NI Elvis

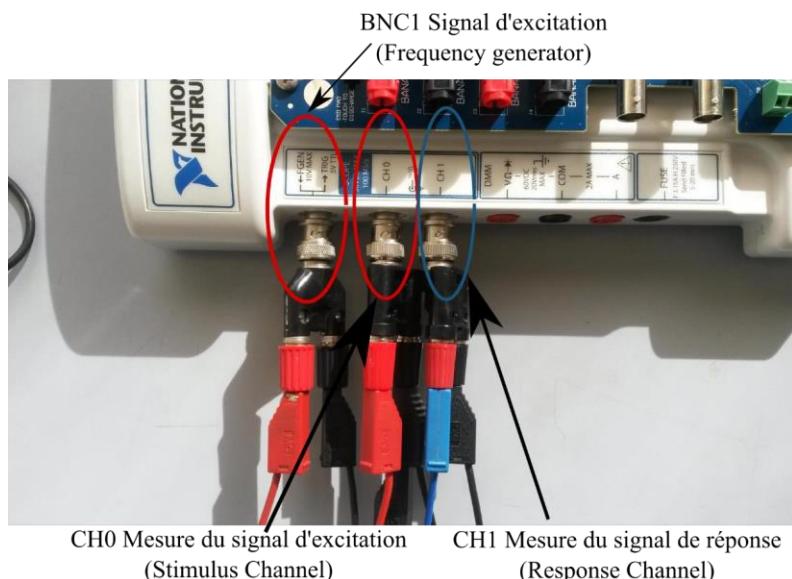
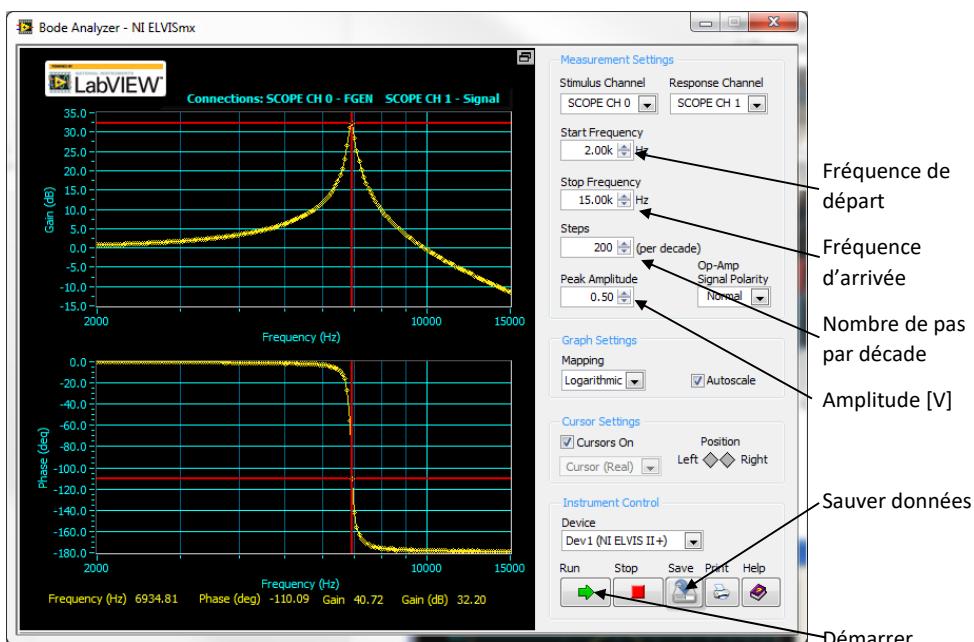
CâblageProgramme « Bode Analyzer »

Fig. 6 : Image de l'installation avec NI ELVIS