

A2. Gyroscope

I. BUT DE LA MANIPULATION

Etude du mouvement d'un corps rigide autour d'un point fixe (gyroscope à axe libre). Mesures de vitesses de précession. Observations de nutations.

II. RAPPELS THEORIQUES

On désigne par gyroscope, un corps solide apte à se mouvoir librement autour d'un point fixe C (Fig.1). Dans ce cas, le mouvement consiste en une rotation autour de l'axe CA appelé axe libre instantané. Si $\vec{\omega}$ est le vecteur instantané de rotation, la vitesse d'un point P du solide est donnée par la relation

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (1)$$

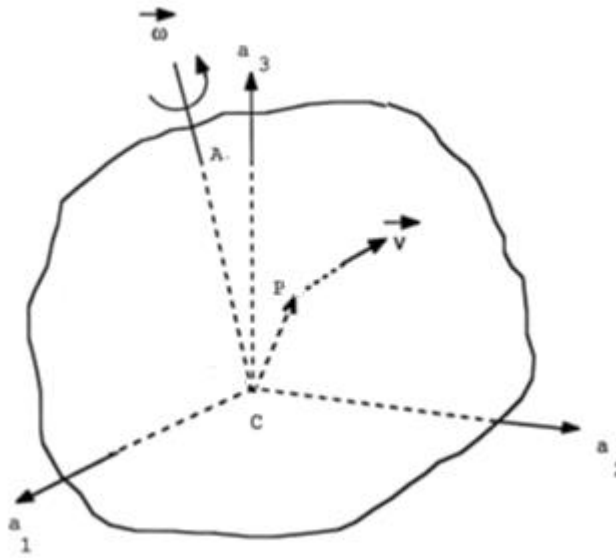


Fig. 1: Solide quelconque en rotation autour d'un point fixe C. Les axes a_1, a_2, a_3 sont fixés au solide.

Le comportement d'un gyroscope se déduit du théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum \vec{M}_C \quad (2)$$

qui exprime que la variation instantanée du moment cinétique L_C (par rapport à C) est égale au moment résultant des forces M_C par rapport au point C

En désignant par $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ les composantes du vecteur $\vec{\omega}$ dans le repère $Ca_1a_2a_3$:

$$\vec{L}_C = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

La matrice formée de 9 intégrales, représente le **tenseur d'inertie au point C** dans le système d'axes $Ca_1a_2a_3$.

Les termes diagonaux sont les **moments d'inertie** respectifs par rapport aux axes a_1, a_2, a_3 .

Les autres termes sont appelés **produits d'inertie** ou **moments centrifuges**.

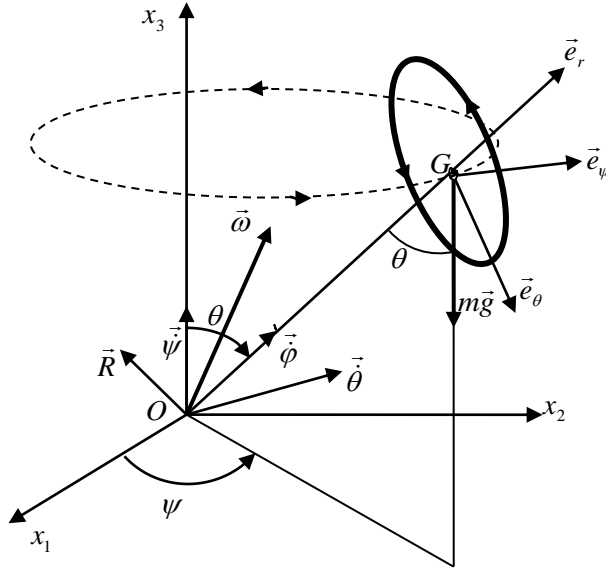
En général \vec{L}_C n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$.

L'expression (3) du moment cinétique peut être simplifiée par le choix convenable d'un système d'axes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ orthogonaux, solidaires du solide, (choix possible quel que soit C), pour lesquels la matrice d'inertie est diagonale. Pour ces axes, appelés **axes principaux d'inertie** (introduits par Léonard EULER en 1760), on peut écrire

$$\vec{L}_C = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 I_{ii} \cdot \omega_i \cdot \vec{e}_i \quad (4)$$

ω_i étant les composantes de $\vec{\omega}$ selon les axes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, \vec{e}_i étant les vecteurs unités portés par ces axes.

Le mouvement d'un tel solide est assez complexe et la solution générale de l'équation (2) est compliquée. Dans l'étude qui va suivre nous allons considérer des solides homogènes à symétrie de révolution, par exemple une toupie symétrique (Fig. 2)



pour laquelle les axes portés par le repère $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\psi$ sont des axes principaux d'inertie.

Dans ce repère, on a $I_{11} = A$
 $I_{22} = I_{33} = B$

Vecteur rotation: $\vec{\omega} = \vec{\dot{\phi}} + \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}}$

Et alors

$$\vec{L}_O = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} + \dot{\psi} \cdot \cos \theta \\ -\dot{\psi} \cdot \sin \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Et l'équation vectorielle du mouvement :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{e,O} = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = \overrightarrow{OG} \cdot mg \sin(\theta) \vec{e}_\psi$$

=> la composante horizontale de \vec{L}_O est nulle.

Fig.2 : Schéma d'un gyroscope

Encore
$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_{Ri} = \left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_R + \vec{\omega}_e \wedge \vec{L}_O = mgl \sin(\theta) \vec{e}_\psi \quad (6)$$

avec $\overrightarrow{OG} = l$ et $\vec{\omega}_e = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}}$

$$\ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\phi} = 0 \quad (7)$$

Après calculs, on arrive à :

$$B\ddot{\psi} \sin \theta + (2B - A) \cdot \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta - A\dot{\theta} \dot{\phi} = 0 \quad (8)$$

$$B\ddot{\theta} + (A - B) \cdot \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + A\dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta = mgl \sin \theta \quad (9)$$

3 équations scalaires du mouvement pour 3 degrés de liberté.

Dépendant des conditions initiales, trois types de mouvements particuliers sont possibles:

1) Si $G \equiv O$, alors $\vec{M}_{e,O} = 0$ et

$$\vec{L}_O = \text{const}$$

Cette propriété est à la base de nombreuses applications (par exemple : système de pilotage automatique, indication d'horizon, compas gyroscopique, stabilisation des bateaux, etc.).

La direction de l'axe de rotation demeure fixe par rapport au référentiel d'inertie x, y, z quels que soient les mouvements du référentiel de fixation du gyroscope libre (Fig. 3).

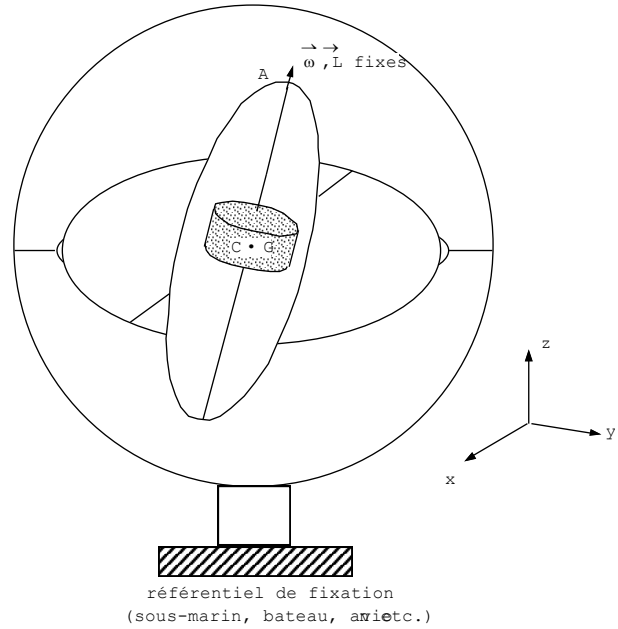


Fig. 3 : Gyroscope libre

2) Lorsque le solide tourne très rapidement autour d'un axe principal d'inertie par exemple autour de l'axe supportant \vec{e}_r , l'énergie de rotation initiale est grande vis-à-vis de la variation maximale de l'énergie potentielle:

$$\frac{1}{2} \cdot A \cdot \dot{\phi}^2 \gg 2 \cdot mgl \quad (10)$$

On peut alors se contenter de ne considérer que le moment d'inertie $A = I_{II}$ par rapport à cet axe, ce qui permet d'écrire:

$$\vec{L}_O = A \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{e}_r \quad (11)$$

Le mouvement fait apparaître une **précession lente**: le vecteur \vec{L}_O décrit un cône (Fig. 4) avec une vitesse angulaire $\dot{\psi} = \Omega = \text{const}$. La nutation est négligeable et alors $\vec{\omega}_e \cong \dot{\psi}$.

Avec $\dot{\phi} = \omega_\phi = \text{const}$, l'équation (6) devient :

$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_{Ri} = \left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_R + \vec{\omega}_e \wedge \vec{L}_O = \dot{\psi} \wedge A\dot{\phi} \cdot \vec{e}_r = \Omega \cdot A\omega_\phi \cdot \sin(\theta) \vec{e}_\psi = mgl \sin(\theta) \vec{e}_\psi \quad (12)$$

d'où l'on déduit la relation simple :

$$\boxed{\Omega = \frac{mgl}{A \cdot \omega_\phi}} \quad (13)$$

Le mouvement de précession pure (sans nutation) a lieu pour le minimum E_0 de la fonction

$$U_{eff}(\theta) = \frac{I}{2} \cdot A \cdot (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + Mgl \cdot \cos \theta + \frac{I}{2} \cdot \frac{(L_3 - A \cdot (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta)^2}{A \sin^2 \theta} \quad (14)$$

avec $L_3 = A \cdot (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta + B \cdot \dot{\psi} \cdot \sin^2 \theta$

3) Pour $E > E_0$, au mouvement de précession se superpose un mouvement de **nutation** (variation périodique et continue de l'angle θ entre deux valeurs extrêmes θ_1 et θ_2).

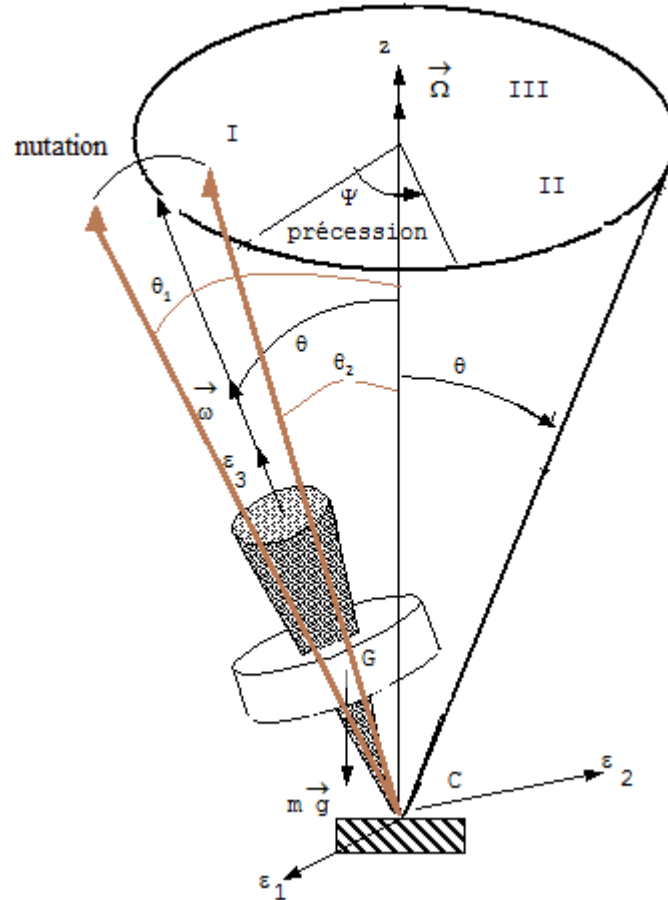


Fig. 4 : Mouvement général d'une toupie symétrique tournant autour d'un point fixe C et soumise à l'action de son propre poids. Précession et nutation de trois types possibles :

- I avec boucles
- II avec points de rebroussement
- III d'apparence sinusoïdale

III. MONTAGE EXPERIMENTAL

Le gyroscope est constitué par une boule d'acier solidaire d'une tige rigide constituant l'axe du gyroscope. Une masse pouvant coulisser le long de l'axe permet de déplacer le centre de gravité du gyroscope, donc la grandeur du moment exercé sur le gyroscope.

La vitesse angulaire du gyroscope $\dot{\phi} = \omega_{\phi}$ se mesure au moyen de repères colorés tracés sur la masse et illuminés par un stroboscope. Un petit roulement à bille, fixé à l'extrémité de la tige rigide, permet de modifier la direction de l'axe durant la rotation du gyroscope. L'angle θ de l'axe du gyroscope par rapport à la verticale se mesure à l'aide d'un cadre mobile avec graduation, dont le centre est aligné avec le centre du gyroscope.

Pour réaliser des mesures quantitatives, il est nécessaire de conserver la vitesse angulaire du gyroscope. Cela est rendu possible, dans de confortables limites, par l'usage de coussins d'air comprimé assurant la sustentation du gyroscope. Le stroboscope comporte une lampe à vapeur de mercure dont la fréquence d'allumage peut être variée dans les gammes de 100–1500 Hz, 300–5000 Hz et 1000–15000 Hz. La vitesse angulaire Ω de la précession se mesure au chronomètre manuel.

Une image du dispositif expérimental est disponible en figure 5.

IV. EXPERIENCES A REALISER

ATTENTION ! Manipuler le gyroscope avec prudence. Eviter les chutes, de même que les chocs. La présence d'aspérités sur la boule comme sur le support hémisphérique augmente la friction et peut conduire à une défaillance de la sustentation. La tige solidaire du gyroscope est fragile.

Ne jamais dépasser 2000 t/mn !

- 1) S'assurer que la tige est bien vissée sur la boule, puis plaquer le poids coulissant contre la boule (origine du déplacement du poids coulissant le long de la tige).
- 2) Mettre le compresseur en marche (vanne sur le mur).
- 3) Nettoyer au besoin la boule ainsi que la fossette à coussin d'air.
Poser délicatement le gyroscope sur la fossette.
- 4) Enclencher le stroboscope à la fréquence maximale.
- 5) A l'aide de deux doigts, saisir le roulement à bille fixé à l'extrémité de la tige et amener celle-ci en position verticale, puis imprimer le mouvement de rotation au gyroscope en ouvrant le robinet du jet d'air comprimé tangentiel à la boule du gyroscope.
- 6) Mesurer la vitesse angulaire de la manière suivante : observer le poids coloré, puis diminuer progressivement la fréquence du stroboscope jusqu'à l'apparition pure des couleurs. Dans ces conditions, la fréquence du stroboscope est égale à la fréquence de rotation du gyroscope (en général, env. 1500 tours/min au démarrage). Enregistrer la diminution de la fréquence de rotation au cours du temps, causée par le frottement (par exemple toutes les demi-minutes jusqu'à trois minutes). Tracer le graphique $\omega_\varphi = \omega_\varphi(t)$. Répéter cinq fois les opérations 5 et 6.
- 7) Etudier la précession. Pour cela, déplacer le poids sur la tige et mesurer sa distance d à l'origine (voir point 1). Mettre le gyroscope en route. Dévier doucement l'axe de sa position verticale et mesurer la vitesse angulaire de précession Ω .

Durant l'intervalle de temps où l'inclinaison θ de l'axe par rapport à la verticale et la vitesse angulaire ω_φ peuvent être tenus pour constants, déterminer la dépendance de la vitesse angulaire Ω de précession en fonction de la distance d , du poids coulissant à l'origine. Tracer le graphique $\Omega = \Omega(d)$.

- 8) d et θ étant fixés, étudier la dépendance de Ω vis-à-vis de ω_φ en déterminant Ω et ω_φ toutes les minutes, durant 6 minutes. Répéter trois fois les opérations, pour estimer les erreurs. Tracer le graphique $\Omega = \Omega(\omega_\varphi)$ et comparer avec l'équation (13).

- 9) Déterminer la dépendance $\Omega = \Omega(\theta)$ pour ω_φ et d constants. Tracer la courbe $\Omega = \Omega(\theta)$

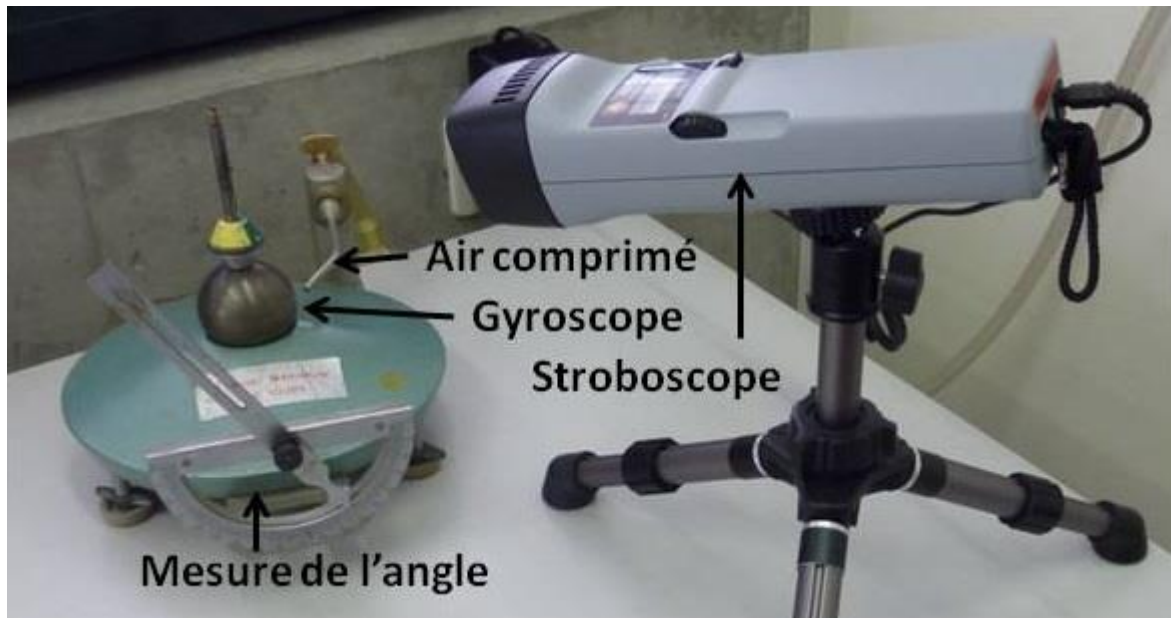


Fig. 5 : Image du dispositif expérimental

V. BIBLIOGRAPHIE

Toutes les théories et explications concernant cette manipulation peuvent être retrouvées dans les cours de physique générale, par exemple :

- CH. GRUBER ET W. BENOIT, « Mécanique Générale », PPUR, 1997
- G. BRUHAT : "mécanique". Masson & Cie Editeurs, Paris, 1944. Pages 211 à 216.
- R. FEYNMAN : "mécanique 1". InterEditions, Paris, 1969. Pages 20-7 à 20-12.
- C. KITTEL, W. KNIGHT, M. RUDERMAN: cours de Berkeley "mécanique" volume 1 .Librairie Armand Colin, Paris 1972. Pages 328 à 258.
- H. GOLDSTEIN : "mécanique classique", Presses Universitaires de France, Paris 1964. Pages 156 - 201.