

Analyse avancée pour mathématiciens

Bernard DACOROGNA

Table des matières

Table des matières	iii
Préface	ix
I Analyse vectorielle	1
1 Rappel d'Analyse I et II et préliminaires	3
1.1 Notations	3
1.2 Notions de différentiabilité	5
1.3 Rappel sur les intégrales multiples	7
1.4 Quelques opérateurs différentiels	11
1.5 Fonction inverse et fonctions implicites	14
1.6 Exercices	17
1.6.1 Exercices sur la notion de différentiabilité	17
1.6.2 Exercices sur l'intégration	19
1.6.3 Autres exercices	20
1.7 Corrigés	21
2 Courbes et intégrales curvilignes	35
2.1 Courbes	35
2.2 Intégrale curviligne d'une fonction	37
2.3 Intégrale curviligne d'une application	41
2.4 Exercices	42
3 Champs qui dérivent d'un potentiel	43
3.1 Définitions et premiers résultats	43
3.2 Quelques notions topologiques	48
3.3 Intégrales curvilignes et champs qui dérivent d'un potentiel . . .	52
3.4 Condition suffisante	55
3.5 Exercices	56
3.5.1 Exercices sur les notions topologiques	56
3.5.2 Exercices sur les champs qui dérivent d'un potentiel . . .	56
3.6 Corrigés	59

4	Théorème de Green	67
4.1	Le théorème et ses corollaires	67
4.2	Démonstration du théorème	71
4.3	Exercices	81
4.3.1	Un exercice calculatoire	82
4.3.2	Identités de Green et applications	82
4.3.3	Autres exercices	83
4.4	Corrigés	83
5	Surfaces et intégrales de surfaces	89
5.1	Surfaces	89
5.2	Intégrales de surface	97
5.3	Exercices	100
5.4	Corrigés	100
6	Le Théorème de la divergence	103
6.1	Théorème de la divergence et ses corollaires	103
6.2	Démonstration du théorème	106
6.3	Exercices	109
6.3.1	Quelques exercices calculatoires	109
6.3.2	Identités de Green et applications	110
6.3.3	Autres applications du Théorème de la divergence	110
6.4	Corrigés	116
7	Le Théorème de Stokes	129
7.1	Le Théorème de Stokes	129
7.2	Démonstration du théorème	133
7.3	Exercices	136
7.4	Corrigés	137
II	Analyse complexe	147
8	Fonctions holomorphes	149
8.1	Rappel sur les nombres complexes	149
8.2	Continuité des fonctions complexes	150
8.3	Les fonctions holomorphes	151
8.4	Les séries de puissances	156
8.5	La fonction exponentielle	158
8.6	La fonction logarithme et les fonctions puissances	159
8.6.1	La fonction logarithme	159
8.6.2	Les fonctions puissances	161
8.7	Exercices	162
8.8	Corrigés	163

9	Intégration complexe	169
9.1	Rappel sur les intégrales curvilignes	169
9.2	Le lemme de Goursat	172
9.3	Continuité des dérivées des fonctions holomorphes	175
9.4	Théorème et Formule intégrale de Cauchy	181
9.4.1	Le Théorème de Cauchy	181
9.4.2	La Formule intégrale de Cauchy	183
9.5	Conséquences du Théorème de Cauchy	185
9.6	Exercices	193
9.7	Corrigés	198
9.8	Appendice : Exercices sur les fonctions analytiques réelles	214
9.9	Corrigés	215
10	Séries de Laurent	221
10.1	Le Théorème de Laurent	221
10.2	Différents types de singularités	222
10.3	Démonstration du théorème	227
10.4	Exercices	230
10.5	Corrigés	234
11	Théorème des résidus et applications	247
11.1	Le Théorème des résidus	247
11.2	Applications au calcul des intégrales réelles	249
11.3	Exercices	255
11.4	Corrigés	258
12	Applications conformes	271
12.1	Définitions et exemples	271
12.2	Inversibilité des applications conformes	276
12.3	Le lemme de Schwarz	278
12.4	Le Théorème de Riemann	281
12.5	Exercices	282
12.6	Corrigés	283
13	Quelques fonctions spéciales	287
13.1	Préliminaires sur les produits infinis	287
13.2	La fonction Γ	289
13.3	La fonction ζ	295
13.4	Les intégrales elliptiques	303
13.5	Les fonctions elliptiques	307
13.5.1	Généralités sur les fonctions elliptiques	307
13.5.2	La fonction sl	311
13.5.3	L'ordre d'une fonction elliptique	314
13.5.4	La fonction \mathcal{P} de Weierstrass	315
13.6	La fonction hypergéométrique	319
13.7	Les fonctions de Bessel	321

13.8 Exercices	323
13.9 Corrigés	324
III Intégrale de Lebesgue	327
14 Préliminaires	329
14.1 Intégrale de Riemann	329
14.2 Quelques notations et théorèmes importants	331
14.3 Complément	333
14.4 Exercices	333
14.5 Corrigés	334
15 Mesure sur les réels	337
15.1 Mesure extérieure	337
15.2 Ensembles mesurables	341
15.3 Les σ -algèbres, les Boréliens et leur relation avec les ensembles mesurables	350
15.4 Fonctions mesurables	352
15.5 L'ensemble de Cantor	357
15.6 La fonction de Lebesgue et l'existence d'un mesurable non borélien	363
15.7 Exercices	366
15.8 Corrigés	369
16 L'intégrale de Lebesgue	379
16.1 Intégrale des fonctions non négatives	379
16.2 L'intégrale générale	386
16.3 Relation entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue	388
16.4 Approximation par des fonctions lisses	392
16.5 Les espaces L^P	397
16.6 Intégrales multiples	407
16.7 Exercices	407
16.8 Corrigés	418
IV Analyse de Fourier	443
17 Séries de Fourier	445
17.1 Introduction	445
17.2 Préliminaires	446
17.2.1 Quelques espaces fonctionnels	446
17.2.2 Les noyaux de Dirichlet, Fejer et Poisson	447
17.3 Définitions et exemples	450
17.4 Moyennes de Cesaro et Théorème de Fejer	454
17.5 Convergence ponctuelle des séries de Fourier	458
17.6 Convergence L^2 des séries de Fourier	460

17.7	Convergence uniforme des séries de Fourier	464
17.8	Quelques propriétés supplémentaires	467
17.9	Applications	469
17.9.1	L'inégalité isopérimétrique	469
17.9.2	Une fonction continue différentiable en aucun point	473
17.10	Exercices	479
17.10.1	Exercices préliminaires	479
17.10.2	Quelques exercices calculatoires	480
17.10.3	Quelques propriétés des coefficients de Fourier	481
17.10.4	Autres exercices	484
17.10.5	Théorèmes d'ergodicité, de Weyl et de Kronecker	485
17.11	Corrigés	486
18	La transformée de Fourier	503
18.1	Introduction	503
18.2	Définitions et exemples	504
18.3	Premiers résultats	506
18.4	La formule d'inversion	509
18.5	L'identité de Plancherel	512
18.6	Quelques applications	515
18.6.1	La formule sommatoire de Poisson	515
18.6.2	Une autre application	518
18.7	La transformée de Fourier multidimensionnelle	519
18.8	Exercices	521
18.8.1	Exercices sur la transformée de Fourier	521
18.8.2	Exercices sur la transformée de Laplace	522
18.9	Corrigés	524
18.10	Table des transformées de Fourier	530
19	Introduction aux équations aux dérivées partielles	533
19.1	Introduction	533
19.2	L'équation de la chaleur	536
19.2.1	L'équation de la chaleur sur un borné	536
19.2.2	L'équation de la chaleur sur la droite réelle	538
19.2.3	La solution fondamentale de l'équation de la chaleur	540
19.3	L'équation de Laplace	541
19.3.1	L'équation de Laplace dans un rectangle	541
19.3.2	L'équation de Laplace dans un disque	544
19.3.3	L'équation de Laplace dans un domaine simplement connexe	548
19.4	L'équation des ondes	550
19.4.1	La méthode de d'Alembert	550
19.4.2	L'équation des ondes sur la droite réelle	551
19.4.3	L'équation des ondes sur un intervalle borné	552
19.5	Quelques équations non linéaires	554
19.6	Exercices	556
19.6.1	Exercices sur les équations différentielles ordinaires	556

19.6.2 Exercices sur la permutation des limites et des dérivées	558
19.6.3 Exercices sur les EDP	558
19.7 Corrigés	565
V Equations différentielles ordinaires	599
20 Introduction	601
20.1 Le problème	601
20.2 Exemples	602
20.3 Problèmes considérés	603
21 Le Problème de Cauchy	605
21.1 Le théorème de Picard	605
21.2 Propriétés qualitatives des solutions	609
21.3 Prolongement maximal	611
21.4 Système linéaire à coefficients constants	615
21.5 Système linéaire à coefficients variables	618
21.6 Exercices	624
21.7 Corrigés	630
22 Séries formelles et fonctions spéciales	641
22.1 Introduction	641
22.2 Séries formelles	642
22.3 Classification des singularités	648
22.4 Les équations du premier ordre	653
22.5 La méthode de Frobenius pour les singularités régulières	655
22.6 Exercices	662
22.7 Corrigés	665
Bibliographie	679
Index	681

Préface

Ce livre s'adresse en premier lieu à des étudiants mathématiciens qui ont suivi un cours d'analyse de base (calcul différentiel et intégral). Il correspond à la deuxième année du cursus (à raison de quatre heures de cours et trois heures d'exercices par semaines) de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne. Ce livre est la version pour mathématiciens de notre ouvrage : "Analyse avancée pour ingénieurs" [9] ; ce dernier peut servir comme résumé pour le présent ouvrage et contient de très nombreux exercices.

Le livre comprend cinq parties, essentiellement indépendantes les unes des autres : l'analyse vectorielle, l'analyse complexe, l'intégrale de Lebesgue, l'analyse de Fourier et les équations différentielles ordinaires. Les parties concernant l'intégrale de Lebesgue et les équations différentielles ordinaires, ne sont pas traitées dans [9].

J'aimerais maintenant faire quelques commentaires sur la bibliographie. Nous recommandons les livres suivants.

- pour l'analyse vectorielle : S.D. Chatterji [4] et M. H. Protter - C. B. Morrey [21], ainsi que celui plus avancé de W. Fleming [13] ;

- pour l'analyse complexe : L.V. Ahlfors [1] qui est un grand classique. ainsi que S.D. Chatterji [5], J. Douchet [11] et E.M. Stein - R. Shakarchi [24] ; sur les fonctions spéciales, on pourra aussi se référer à E.T. Whittaker - G.N. Watson [26] ;

- pour l'intégrale de Lebesgue : S.D. Chatterji [6], G. De Barra [10], W. Fleming [13] et E.M. Stein - R. Shakarchi [25] ;

- pour l'analyse de Fourier : S.D. Chatterji [6], M. H. Protter - C. B. Morrey [21], E.M. Stein - R. Shakarchi [23], M. Willem [28] et pour les transformées de Laplace et de Fourier le livre de D.V. Widder [27]. En ce qui concerne la théorie des équations aux dérivées partielles qui n'est que très brièvement évoquée ici on pourra se référer à L.C. Evans [12] ou F. John [16] ainsi qu'à [8].

- pour les équations différentielles ordinaires : S.D. Chatterji [6] et le livre de référence de E.A. Coddington - N. Levinson [7] ; on pourra aussi consulter G. Birkhoff - G.C. Rota [2] ;

- les livres [14] et [15], en italien, sont aussi intéressants.

Enfin je voudrais terminer cette brève préface en adressant mes plus vifs remerciements à tous ceux qui m'ont aidé à la réalisation du présent ouvrage. En premier lieu, il faut rappeler que je me suis profondément inspiré de [9], qui a été écrit en collaboration avec C. Tanteri. Par ailleurs les assistants en charge des exercices m'ont apporté une aide considérable, notamment S. Bandyopadhyay, S. Basterrechea, G. Croce, G. Csato, L. De Cave, S. Dubuis, O. Kneuss, G. Pisante, A. Ribeiro, S. Sil et D. Strütt. D'autre part S. Basterrechea, L. Rollaz et D. Strütt se sont occupés des dessins du présent ouvrage.

Première partie

Analyse vectorielle

Chapitre 1

Rappel d'Analyse I et II et préliminaires

Ce chapitre a un statut un peu particulier. Il a varié d'année en année, suivant la matière qui a été enseignée en première année. Il sert juste de mise à niveau, avec très peu de démonstrations.

1.1 Notations

Notation Soient $n, N \geq 1$ des entiers, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$$

On notera $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, $f = (f^1, \dots, f^N) \in \mathbb{R}^N$ et donc

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f^1(x), \dots, f^N(x)).$$

Si $N = 1$ on parlera de *fonction* et si $N > 1$ d'*application*. ♠

Définition 1.1 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) On dit que $f \in C^0(\Omega)$ (on note aussi $f \in C(\Omega)$) si f est continue dans Ω .

(ii) On dit que $f \in C^1(\Omega)$ si $f \in C^0(\Omega)$ et si

$$f_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^0(\Omega), \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

(iii) Soit $k \geq 2$ un entier. On dit que $f \in C^k(\Omega)$ si $f \in C^{k-1}(\Omega)$ et

$$f_{x_{j_1} \dots x_{j_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} \in C^0(\Omega), \quad \forall 1 \leq j_1, j_2, \dots, j_k \leq n.$$

(iv) Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, $f = (f^1, \dots, f^N)$ et $k \geq 0$ est un entier on dit que $f \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^N)$ si

$$f^i \in C^k(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

A partir de maintenant on va supposer que Ω est un ouvert borné.

Définition 1.2 (i) On dit que $f \in C^0(\overline{\Omega})$ si $f \in C^0(\Omega)$ et si f se prolonge continument jusqu'au bord. On note alors

$$\|f\|_{C^0} = \sup \{|f(x)| : x \in \overline{\Omega}\}.$$

(ii) Idem pour $f \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$.

Remarque (i) $\|\cdot\|_{C^0}$ est une norme.

(ii) Si Ω est non borné il faut être plus prudent. On dira que $f \in C^0(\overline{\Omega})$ si $f \in C^0(\Omega)$, f se prolonge continument jusqu'au bord et si f est bornée. Ainsi la fonction $f(x) = x$ n'est pas dans $C^0(\overline{\mathbb{R}})$. Ceci est pour s'assurer que $\|\cdot\|_{C^0}$ est bien une norme.

(iii) On peut bien sûr définir une fonction continue sur un ensemble quelconque. ♠

Passons maintenant aux dérivées. La définition ci-dessus s'étend naturellement.

Définition 1.3 (bis) (i) On dit que $f \in C^1(\overline{\Omega})$ si $f \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ et si f_{x_j} , $j = 1, \dots, n$, se prolongent continument de Ω sur $\overline{\Omega}$; en d'autres termes, il existe $\Phi \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\Phi(x) = \text{grad } f(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

(ii) Soit $k \geq 2$ un entier, on définit de même $f \in C^k(\overline{\Omega})$.

(iii) Idem pour $f \in C^k(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$.

Ceci n'est pas la définition que nous adopterons. Voici celle que nous utiliserons dans tout le cours. Elle est clairement plus forte.

Définition 1.4 (i) Soit $k \geq 1$ un entier. On dit que $f \in C^k(\overline{\Omega})$, s'il existe un ouvert $O \supset \overline{\Omega}$ et une fonction $F \in C^k(O)$ telle que

$$F(x) = f(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

(ii) Idem pour $f \in C^k(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$.

Remarque (i) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble quelconque, on dit que $f \in C^k(A)$, s'il existe un ouvert $O \supset \overline{A} \supset A$ et $F \in C^k(O)$ telle que

$$F(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$

(ii) Si Ω est convexe ou si $\partial\Omega$ est une variété C^1 (ou même Lipschitz) alors les deux définitions sont équivalentes (résultat non trivial, cf. Théorème de Calderon-Stein et pour des ensembles A quelconques cf. Théorème de Whitney).

(iii) Si $\partial\Omega$ n'est pas suffisamment régulier alors les deux définitions ne sont pas équivalentes (cf. l'exemple ci dessous). ♠

Exemple (cf. Exercice 1.2.3 dans [8]). Soient $\frac{1}{2} < \beta < 1$,

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 < \sqrt{|x_1|} \text{ et } x_1^2 + (x_2)^2 < 1 \right\}$$

et (cf. Figure 1.1)

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega \text{ et si } x_2 \leq 0 \\ \frac{x_1}{|x_1|} (x_2)^{2\beta} & \text{si } (x_1, x_2) \in \Omega \text{ et si } x_2 > 0. \end{cases}$$

Alors f est $C^1(\overline{\Omega})$ au sens de la définition bis (cf. Définition 1.3) mais pas de

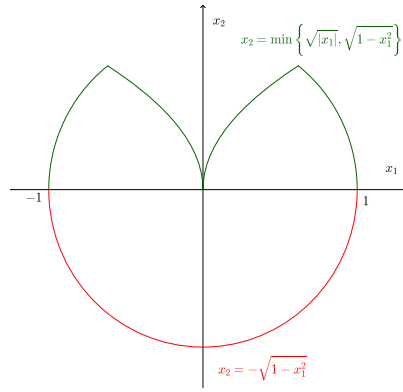


FIG. 1.1 –

la définition que nous adoptons (cf. Définition 1.4). ♠

1.2 Notions de différentiabilité

Soient $n, N \geq 1$ des entiers, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

Définition 1.5 (i) Soit $x_0 \in \Omega$. On dit que f est différentiable en x_0 , s'il existe une application linéaire

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$$

telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} = 0.$$

La transformation L est appelée la différentielle de f en x_0 et est notée $Df(x_0)$.

(ii) On dit que f est différentiable dans Ω si f est différentiable en x , $\forall x \in \Omega$.

Proposition 1.6 (i) f est différentiable en x_0 si et seulement si f^i , $1 \leq i \leq N$, sont différentiables en x_0 .

(ii) Si f est différentiable en x_0 alors $\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x_0)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n$ existent et la matrice qui caractérise l'application linéaire est la matrice Jacobienne

$$Df(x_0) \cong \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f^N}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times n}$$

et (si $n = N$) $\det \nabla f(x_0)$ est appelé le Jacobien. Par abus de langage nous écrirons souvent $\nabla f(x_0)$ au lieu de $Df(x_0)$.

(iii) Si f est différentiable en x_0 alors f est continue en x_0 .

Remarque (i) On verra (cf. Exercice 1.1) que si $n = 1$ alors

$$f \text{ est différentiable en } x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) \text{ existe.}$$

(ii) Par contre si $n \geq 2$ (et même si $N = 1$) on peut très bien avoir que $\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x_0)$ existent $\forall i, j$ sans que f ne soit différentiable en x_0 (et même sans être continue en x_0). ♠

Le théorème suivant est aussi connu sous le nom de *Théorème de la valeur intermédiaire*.

Théorème 1.7 (Théorème des accroissements finis) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $[a, b] \subset \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]a, b[$, alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénotant le produit scalaire dans \mathbb{R}^n)

$$f(a) - f(b) = \langle \nabla f(c); a - b \rangle.$$

On écrit

$$[a, b] = \{c \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [0, 1] \text{ tel que } c = (1 - t)a + tb\}$$

idem pour $]a, b[$ avec $t \in]0, 1[$.

Voir Exercice 1.2 pour une démonstration du théorème.

Proposition 1.8 Si $f_{x_j} \in C^0(\Omega)$, $\forall j = 1, \dots, n$, alors f est différentiable dans Ω et donc f est continue dans Ω .

Voir Exercice 1.4 pour une démonstration de la proposition quand $n = 2$.

1.3 Rappel sur les intégrales multiples

On va définir l'intégrale dans \mathbb{R}^n , ce n'est pas la meilleure façon de faire mais c'est la plus rapide. On appelle rectangle (ouvert) de \mathbb{R}^n l'ensemble ouvert

$$P =]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[$$

et donc

$$\overline{P} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] .$$

Proposition 1.9 Soit $f \in C^0(\overline{P})$. Alors

$$\int_{a_n}^{b_n} dx_n \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} dx_{n-1} \cdots \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1$$

est indépendante de l'ordre dans lequel on procède. Plus explicitement si σ est une permutation quelconque de $\{1, \dots, n\}$, alors la quantité

$$\int_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} dx_{\sigma(n)} \int_{a_{\sigma(n-1)}}^{b_{\sigma(n-1)}} dx_{\sigma(n-1)} \cdots \int_{a_{\sigma(2)}}^{b_{\sigma(2)}} dx_{\sigma(2)} \int_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{\sigma(1)}$$

est indépendante de σ .

Dans le cas $n = 2$ ceci signifie que

$$\int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 .$$

On peut donc définir l'intégrale sur un rectangle de la façon suivante.

Définition 1.10 Soit P un rectangle comme ci-dessus et $f \in C^0(\overline{P})$. L'intégrale de f sur P est par définition

$$\int_P f = \int_P f(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} dx_n \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} dx_{n-1} \cdots \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 .$$

On a maintenant le résultat classique suivant (cf. Stein-Shakarchi [25] page 7; une version plus forte sera démontrée dans le cas $n = 1$ dans l'Exercice 14.4.).

Proposition 1.11 Soit Ω un ouvert borné. Alors il existe une union dénombrable $\{P_i\}_{i=1}^\infty$ de rectangles deux à deux disjoints tels que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty \overline{P_i} .$$

On peut alors montrer le résultat suivant.

Proposition 1.12 Soient Ω un ouvert borné, $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ et $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ deux familles de rectangles deux à deux disjoints telles que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{P_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{Q_i}.$$

Soit $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{P_i} f$$

est une série absolument convergente et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{P_i} f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{Q_i} f.$$

Grâce aux propositions précédentes on peut définir l'intégrale sur un domaine quelconque.

Définition 1.13 Soient Ω un ouvert borné, $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ une famille de rectangles deux à deux disjoints telle que

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{P_i}.$$

Soit $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Alors

$$\int_{\Omega} f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{P_i} f.$$

On peut montrer l'exemple suivant, mais on ne le fera pas.

Exemple 1.14 Soit $u_1, u_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues et

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a < x_1 < b \text{ et } u_1(x_1) < x_2 < u_2(x_1)\}.$$

(On dira plus tard qu'un tel ensemble est x_2 -simple). Soit $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\int_{\Omega} f = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{u_1(x_1)}^{u_2(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2.$$

Enfin on aura besoin de la formule de changement de variables (cf. Morrey-Protter [21] page 357).

Théorème 1.15 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $u : \overline{\Omega} \rightarrow u(\overline{\Omega})$ avec $u \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ ($u = u(x_1, \dots, x_n) = (u^1(x), \dots, u^n(x))$) injective et telle que

$$\det \nabla u(x) = \begin{vmatrix} u_{x_1}^1 & \dots & u_{x_n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x_1}^n & \dots & u_{x_n}^n \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Alors $u(\Omega)$ est ouvert et borné. De plus si $f \in C(u(\overline{\Omega}))$, alors la formule de changement de variables a lieu, à savoir

$$\int_{u(\Omega)} f(y) dy = \int_{\Omega} f(u(x)) |\det \nabla u(x)| dx.$$

La valeur absolue du déterminant, $|\det \nabla u(x)|$, est appelé le *Jacobien* de la transformation. L'hypothèse $\det \nabla u \neq 0$ peut être supprimée (cf. par exemple, Chatterji [4] page 291) mais la démonstration est alors considérablement plus difficile et fait appel au Lemme de Sard et à la théorie de l'intégrale de Lebesgue. Par contre dans les exemples classiques, que sont les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques, on peut facilement se passer de l'hypothèse $\det \nabla u \neq 0$ sans invoquer de théorie sophistiquée.

Exemple (Coordonnées polaires) Si $n = 2$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et (cf. Figure 1.2)

$$\begin{aligned} x_1 &= u^1(r, \theta) = r \cos \theta \\ x_2 &= u^2(r, \theta) = r \sin \theta \end{aligned}$$

on déduit alors que

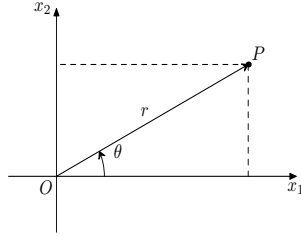


FIG. 1.2 –

$$\det \nabla u = \begin{vmatrix} u_r^1 & u_\theta^1 \\ u_r^2 & u_\theta^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \geq 0. \quad \spadesuit$$

Exemple (Coordonnées cylindriques) Si $n = 3$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$ et (cf. Figure 1.3)

$$\begin{aligned} x_1 &= u^1(r, \theta, z) = r \cos \theta \\ x_2 &= u^2(r, \theta, z) = r \sin \theta \\ x_3 &= u^3(r, \theta, z) = z \end{aligned}$$

on obtient

$$|\det \nabla u| = r. \quad \spadesuit$$

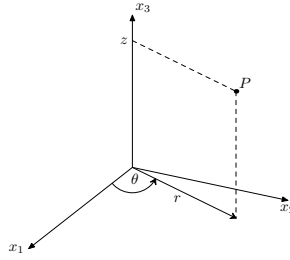


FIG. 1.3 –

Exemple (Coordonnées sphériques). Si $n = 3$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ et (cf. Figure 1.4)

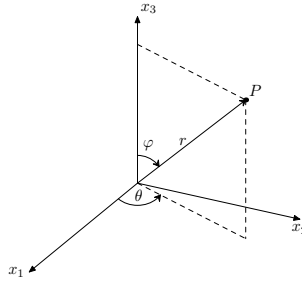


FIG. 1.4 –

$$\begin{aligned} x_1 &= u^1(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta \sin \varphi \\ x_2 &= u^2(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 &= u^3(r, \theta, \varphi) = r \cos \varphi \end{aligned}$$

on trouve

$$|\det \nabla u| = r^2 \sin \varphi. \quad \spadesuit$$

Remarque Attention à la lecture de la formule en dimension $n = 1$. Si

$$u(x) = -x$$

et $\Omega =]-1, 1[$ alors $u(\Omega) =]-1, 1[$ et la formule se lit bien

$$\int_{-1}^1 f(y) dy = \int_{-1}^1 f(-x) |-1| dx = \int_{-1}^1 f(-x) dx$$

alors que classiquement (mais c'est la même chose) on aurait écrit

$$\int_{-1}^1 f(y) dy = \int_1^{-1} f(-x) (-1) dx = - \int_1^{-1} f(-x) dx.$$

1.4 Quelques opérateurs différentiels

Par la suite on va noter les dérivées partielles de la façon suivante

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \dots$$

Définition 1.16 Par la suite $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sera un ouvert, $n \geq 2$ et on notera $x = (x_1, \dots, x_n)$.

(i) Si $f \in C^1(\Omega)$ on définit pour $x \in \Omega$

$$\text{grad } f(x) = \nabla f(x) = (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x)) \in \mathbb{R}^n$$

appelé le gradient de f .

(ii) Si $f \in C^2(\Omega)$ on définit, pour $x \in \Omega$, le Laplacien de f par

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i}(x) \in \mathbb{R}.$$

Si $\Delta f = 0$ dans Ω , on dit alors que f est harmonique dans Ω .

(iii) Soit $F = F(x) = (F^1(x), \dots, F^n(x))$, $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$. On définit pour $x \in \Omega$

$$\text{div } F(x) = \sum_{i=1}^n F_{x_i}^i(x) \in \mathbb{R}$$

appelé la divergence de F (on note parfois $\nabla \cdot F$)

(iv) Si $n = 2$ et si $F(x) = (F^1(x), F^2(x))$, $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$, on définit pour $x \in \Omega$

$$\text{rot } F(x) = F_{x_1}^2(x) - F_{x_2}^1(x) \in \mathbb{R}$$

Si $n = 3$ et si $F(x) = (F^1(x), F^2(x), F^3(x))$, $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, on définit pour $x \in \Omega$

$$\text{rot } F(x) = (F_{x_2}^3(x) - F_{x_3}^2(x), F_{x_3}^1(x) - F_{x_1}^3(x), F_{x_1}^2(x) - F_{x_2}^1(x)) \in \mathbb{R}^3$$

appelé le rotationnel de F (on note parfois $\nabla \wedge F$). On note aussi symboliquement

$$\operatorname{rot} F(x) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{vmatrix}.$$

Remarque On peut aussi définir le rotationnel de F pour n'importe quelle dimension. On a que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in \Omega$, à l'ordre près (en fait il y a un ordre très précis, qui est l'inverse de l'ordre lexicographique, mais nous n'entrerons pas dans les détails),

$$\operatorname{rot} F(x) = \left((-1)^{i+j} \left(F_{x_j}^i(x) - F_{x_i}^j(x) \right) \right)_{1 \leq i < j \leq n} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}. \spadesuit$$

La démonstration du théorème suivant est immédiate.

Théorème 1.17 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.

(i) Soit $f \in C^2(\Omega)$ alors

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \Delta f.$$

(ii) Soit $f \in C^2(\Omega)$, alors

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0.$$

(iii) Soient $n = 3$ et $F \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$, alors

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0.$$

(iv) Soient $f \in C^1(\Omega)$ et $g \in C^2(\Omega)$ alors

$$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f \Delta g + \langle \operatorname{grad} f; \operatorname{grad} g \rangle$$

(où $\langle \cdot; \cdot \rangle$ dénote le produit scalaire dans \mathbb{R}^n).

(v) Si $f, g \in C^1(\Omega)$ alors

$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f.$$

(vi) Si $f \in C^1(\Omega)$ et $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ alors

$$\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + \langle \operatorname{grad} f; F \rangle.$$

(vii) Si $n = 3$ et $F \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3)$ alors

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} F = -\Delta F + \operatorname{grad} \operatorname{div} F$$

(où si $F = (F^1, F^2, F^3)$ on a noté $\Delta F = (\Delta F^1, \Delta F^2, \Delta F^3)$).

(viii) Si $n = 3$, $f \in C^1(\Omega)$ et $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ alors

$$\operatorname{rot}(f F) = \operatorname{grad} f \wedge F + f \operatorname{rot} F$$

(où $x \wedge y$ dénote le produit vectoriel de deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^3$).

Exemple Soient $F(x_1, x_2, x_3) = ((x_1)^2 - e^{x_2}, \sin x_3, (x_2)^2 + x_3)$. Calculer $\operatorname{div} F$ et $\operatorname{rot} F$.

Discussion On trouve

$$\operatorname{div} F = 2x_1 + 0 + 1 = 2x_1 + 1$$

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ (x_1)^2 - e^{x_2} & \sin x_3 & (x_2)^2 + x_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - \cos x_3 \\ 0 - 0 \\ 0 + e^{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 - \cos x_3 \\ 0 \\ e^{x_2} \end{pmatrix}. \spadesuit$$

Exemple Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ et r tels que

$$r = |x - a| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2}.$$

Soit $f(x) = r^\alpha$. Calculer (sans se servir du théorème ci-dessus)

$$F = \operatorname{grad} f, \quad \Delta f, \quad \operatorname{div} F.$$

Calculer, quand $n = 3$, $\operatorname{rot} F$.

Discussion Noter que le domaine de définition de f est $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$. Commençons par calculer $\partial r / \partial x_i = r_{x_i}$. De la définition de r^2 on a, en dérivant des deux côtés de l'identité,

$$2 r r_{x_i} = 2 (x_i - a_i) \quad \Rightarrow \quad r_{x_i} = \frac{x_i - a_i}{r}.$$

1) On a pour tout $i = 1, \dots, n$

$$f_{x_i} = (r^\alpha)_{x_i} = \alpha r^{\alpha-1} r_{x_i} = \alpha r^{\alpha-1} \frac{x_i - a_i}{r} = \alpha r^{\alpha-2} (x_i - a_i)$$

et donc

$$F(x) = \operatorname{grad} f(x) = \alpha r^{\alpha-2} (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \alpha r^{\alpha-2} (x - a).$$

2) Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} f_{x_i x_i} &= (\alpha r^{\alpha-2} (x_i - a_i))_{x_i} = \alpha (\alpha - 2) r^{\alpha-3} r_{x_i} (x_i - a_i) + \alpha r^{\alpha-2} \\ &= \alpha (\alpha - 2) r^{\alpha-4} (x_i - a_i)^2 + \alpha r^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i} = \left[\alpha (\alpha - 2) r^{\alpha-4} \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2 \right] + n \alpha r^{\alpha-2} \\ &= \alpha r^{\alpha-2} (n + \alpha - 2).\end{aligned}$$

Noter que quand $\alpha = 2 - n$ (ceci est trivial si $n = 2$) on a $\Delta f = 0$. Donc la fonction $f(x) = |x|^{2-n}$ est harmonique dans $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(Ce résultat aurait pu se déduire à l'aide du théorème, du calcul précédent pour le gradient et de celui de la divergence qui suit).

3) Comme $F^i = f_{x_i}$, on déduit

$$F_{x_i}^i = (f_{x_i})_{x_i} = f_{x_i x_i}$$

et on retrouve

$$\operatorname{div} F = \Delta f = \alpha r^{\alpha-2} (n + \alpha - 2).$$

4) Par le théorème ci-dessus on doit avoir $\operatorname{rot} F = \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$, mais vérifions le directement

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_{x_1} & f_{x_2} & f_{x_3} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_3 x_2} - f_{x_2 x_3} \\ f_{x_1 x_3} - f_{x_3 x_1} \\ f_{x_2 x_1} - f_{x_1 x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \spadesuit$$

1.5 Fonction inverse et fonctions implicites

Théorème 1.18 (Théorème de la fonction inverse) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x_0 \in \Omega$ et $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tels que

$$\det \nabla f(x_0) \neq 0.$$

Alors il existe $\Omega_0 \subset \Omega$ un ouvert tel que $x_0 \in \Omega_0$;

- (i) $f|_{\Omega_0}$ est injective;
- (ii) $U_0 = f(\Omega_0)$ est un ouvert;
- (iii) la fonction inverse $g : U_0 \rightarrow \Omega_0$ est $C^1(U_0; \mathbb{R}^n)$ et

$$\nabla g(f(x)) = [\nabla f(x)]^{-1}, \quad \forall x \in \Omega_0.$$

Remarque Une application bijective $f : \Omega_0 \rightarrow U_0$ de classe C^1 telle que son inverse existe et est C^1 est appelé un *difféomorphisme*. ♠

Attention - Si $n = 1$ et si $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que

$$f'(x) \neq 0, \quad \forall x \in \Omega$$

alors f est injective sur Ω .

- Si $n \geq 2$ et si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, Ω un ouvert, est telle que

$$\det \nabla f(x) \neq 0, \quad \forall x \in \Omega$$

alors, en général, ceci n'implique pas que f soit injective sur Ω (le théorème affirme seulement que f est *localement* injective). En effet considérons

$$\Omega = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 0 < r^2 < (x_1)^2 + (x_2)^2 < R^2 \right\}$$

et

$$f(x_1, x_2) = \left((x_1)^2 - (x_2)^2, 2x_1x_2 \right).$$

On a que

$$\det \nabla f(x) = \det \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix} = 4 \left((x_1)^2 + (x_2)^2 \right) > 4r^2 > 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Mais f n'est pas injective sur Ω tout entier car si $r^2 < (x_1)^2 + (x_2)^2 < R^2$ alors

$$f(x_1, x_2) = f(-x_1, -x_2). \quad \spadesuit$$

On va maintenant énoncer le Théorème des fonctions implicites. Avant d'énoncer le théorème général on va voir le cas le plus simple.

Théorème 1.19 (Théorème des fonctions implicites en dimension 2) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \Omega$, $F \in C^1(\Omega)$ tel que

$$F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0.$$

Alors $\exists r_1, r_2 > 0$ tel que si

$$I_1 = \{x_1 \in \mathbb{R} : |x_1 - \bar{x}_1| < r_1\} \quad \text{et} \quad I_2 = \{x_2 \in \mathbb{R} : |x_2 - \bar{x}_2| < r_2\}$$

alors

$$I_1 \times I_2 \subset \Omega$$

et il existe un unique $f : I_1 \rightarrow I_2 \subset \mathbb{R}$, $f \in C^1(I_1)$, telle que

$$\{F(x_1, x_2) = 0 \text{ et } (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2\} \Leftrightarrow \{x_1 \in I_1 \text{ et } x_2 = f(x_1)\}.$$

Exemple Considérons

$$F(x_1, x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2 - 1.$$

Noter que si $\bar{x}_2 \neq 0$, alors

$$F_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0, \quad \forall \bar{x}_1.$$

Donc au voisinage de tous points (\bar{x}_1, \bar{x}_2) tels que $(\bar{x}_1)^2 - (\bar{x}_2)^2 = 1$ et $\bar{x}_2 \neq 0$, il existe un voisinage I_1 de \bar{x}_1 et f comme dans le théorème tels que

$$F(x_1, f(x_1)) = 0.$$

En fait

$$x_2 = f(x_1) = \begin{cases} \sqrt{(x_1)^2 - 1} & \text{si } x_2 > 0 \\ -\sqrt{(x_1)^2 - 1} & \text{si } x_2 < 0. \end{cases}$$

Si $\bar{x}_2 = 0$, alors $\bar{x}_1 = \pm 1$ et on a quand même

$$F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$$

mais cette fois-ci

$$F_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = -2\bar{x}_2 = 0, \quad \forall \bar{x}_1$$

et on ne peut pas appliquer le Théorème des fonctions implicites. Mais, par contre, on a

$$F_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0, \quad \forall \bar{x}_2$$

et on trouve aussi un voisinage I_2 de \bar{x}_2 et une fonction g tels que

$$F(g(x_2), x_2) = 0.$$

En fait

$$x_1 = g(x_2) = \begin{cases} \sqrt{(x_2)^2 - 1} & \text{si } x_1 > 0 \\ -\sqrt{(x_2)^2 - 1} & \text{si } x_1 < 0. \end{cases} \spadesuit$$

Théorème 1.20 (Théorème des fonctions implicites pour des systèmes)

Soient $m, n \geq 1$ des entiers, $\Omega \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ ($\bar{x} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$) et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, telle que

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad \text{et} \quad \det \nabla_y F(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$$

où

$$\nabla_y F = \begin{pmatrix} F_{y_1}^1 & \cdots & F_{y_n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{y_1}^n & \cdots & F_{y_n}^n \end{pmatrix}.$$

Il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que si

$$\begin{aligned} B_m(\bar{x}, r_1) &= \{x \in \mathbb{R}^m : |x - \bar{x}| < r_1\} \\ B_n(\bar{y}, r_2) &= \{y \in \mathbb{R}^n : |y - \bar{y}| < r_2\} \end{aligned}$$

alors

$$\overline{B}_m(\bar{x}, r_1) \times \overline{B}_n(\bar{y}, r_2) \subset \Omega$$

et il existe un unique $f : B_m(\bar{x}, r_1) \rightarrow B_n(\bar{y}, r_2)$, $f \in C^1(B_m; \mathbb{R}^n)$, tel que

$$\begin{aligned} & \{(x, y) \in B_m(\bar{x}, r_1) \times B_n(\bar{y}, r_2) \quad \text{et} \quad F(x, y) = 0\} \\ & \Leftrightarrow \{x \in B_m(\bar{x}, r_1) \quad \text{et} \quad y = f(x)\}. \end{aligned}$$

Exemple Montrons comment le Théorème de la fonction inverse se déduit du Théorème des fonctions implicites. Rappelons le Théorème de la fonction inverse.

Discussion Rappel $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $g \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $\bar{y} \in \Omega$ tel que

$$\det \nabla g(\bar{y}) \neq 0$$

alors il existe $\Omega_0 \subset \Omega$, $U_0 = g(\Omega_0)$ et $f : U_0 \rightarrow \Omega_0$ tels que

$$f(g(y)) = y, \quad \forall y \in \Omega_0.$$

en d'autres termes $\forall x \in U_0$, $\forall y \in \Omega_0$

$$x = g(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x).$$

Voyons donc comment il se déduit du Théorème des fonctions implicites. Posons $m = n$ et

$$F(x, y) = x - g(y).$$

Supposons donc que $\bar{x} = g(\bar{y})$ et observons que

$$\det \nabla_y F(\bar{x}, \bar{y}) = \det [-\nabla g(\bar{y})] \neq 0.$$

Donc par le Théorème des fonctions implicites il existe $r_1, r_2 > 0$ et

$$f : \Omega_0 = B_n(\bar{x}, r_1) \rightarrow U_0 = B_n(\bar{y}, r_2)$$

une application C^1 telle que

$$F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = g(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x). \quad \spadesuit$$

1.6 Exercices

De nombreux autres exercices, notamment Exercices 2, 4, 5, 6 et 7, concernant ce chapitre se trouvent au Chapitre 1 de [9].

1.6.1 Exercices sur la notion de différentiabilité

Exercice 1.1 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \Omega$.

(i) Montrer que si $n = 1$

$$f \text{ est différentiable en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_0) \text{ existe.}$$

(ii) Montrer que

$$f \text{ est différentiable en } x_0 \Rightarrow f \text{ est continue en } x_0.$$

(iii) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

La fonction f est-elle différentiable partout et admet-elle des dérivées partielles partout ?

Exercice 1.2 Montrer le Théorème des accroissements finis (cf. Théorème 1.7).

Indication. Montrer d'abord le théorème pour la dimension $n = 1$, puis étendre à $n \geq 1$.

Exercice 1.3 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et convexe, et f différentiable dans Ω . En utilisant le Théorème des accroissements finis, montrer que s'il existe $c \geq 0$ tel que

$$|\nabla f(x)| \leq c, \quad \text{pour tout } x \in \Omega$$

alors

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \quad \text{pour tout } x, y \in \Omega.$$

Exercice 1.4 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \in C^0(\Omega)$. Montrer que f est différentiable dans Ω .

Exercice 1.5 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathbb{R} et différentiable en x_0 . Alors pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe $\gamma_K > 0$ tel que

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq \gamma_K |h|, \quad \text{pour tout } h \in K.$$

Une conséquence de ce résultat est qu'une fonction $C^1(\mathbb{R})$ est toujours localement Lipschitzienne.

Exercice 1.6 (i) Soit $p \geq 1$ et la fonction

$$h_p(x) = |x|^p = \left(\sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_n)^2} \right)^p, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Calculer $\nabla h_p(x)$.

(ii) Soit une application $G \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ qui ne s'annule jamais et la fonction

$$f_p(t) = \frac{1}{p} |G(tx)|^p, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Calculer $\frac{d}{dt} f_p(t)$.

1.6.2 Exercices sur l'intégration

Exercice 1.7 Soient $\Omega =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\subset \mathbb{R}^2$, avec $-\infty < a_i < b_i < \infty$, et $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Montrer que

$$\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1.$$

Indication. Commencer par justifier que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une subdivision de Ω telle que

$$\max f - \min f \leq \epsilon \quad \text{dans chaque morceau de la subdivision.}$$

Exercice 1.8 Calculer le Jacobien des changements de variable suivants.

(i) Coordonnées polaires. Pour $n = 2$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1(r, \theta) = r \cos \theta \\ x_2 &= u_2(r, \theta) = r \sin \theta. \end{aligned}$$

(ii) Coordonnées sphériques. Pour $n = 3$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$,

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta \sin \varphi \\ x_2 &= u_2(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 &= u_3(r, \theta, \varphi) = r \cos \varphi. \end{aligned}$$

(iii) Coordonnées cylindriques. Pour $n = 3$, $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1(r, \theta, z) = r \cos \theta \\ x_2 &= u_2(r, \theta, z) = r \sin \theta \\ x_3 &= u_3(r, \theta, z) = z. \end{aligned}$$

(iv) En déduire l'aire d'un disque, le volume d'une sphère et le volume d'un cylindre.

Exercice 1.9 Soient $\Omega =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\subset \mathbb{R}^2$, avec $-\infty < a_i < b_i < \infty$, et l'application

$$u(x) = u(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

avec $\alpha_1, \beta_2 \neq 0$. Démontrer la formule de changement de variable

$$\int_{u(\Omega)} f(y) dy = \int_{\Omega} f(u(x)) |\det \nabla u(x)| dx, \quad \forall f \in C^0(u(\overline{\Omega})).$$

Indication. Considérer d'abord le cas $\alpha_1, \beta_2 > 0$ en explicitant $u(\Omega)$ et en calculant $\int_{u(\Omega)} f(y) dy$ à l'aide du changement de variable dans \mathbb{R} , puis en déduire les autres cas.

Exercice 1.10 Supposons que la formule de changement de variable

$$\int_{u(\Omega)} f(y) dy = \int_{\Omega} f(u(x)) |\det \nabla u(x)| dx$$

est vraie pour $u \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ injective et satisfaisant

$$|\det \nabla u(x)| \neq 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Montrer que la formule est également vraie pour le changement de variable en coordonnées polaires sur un disque centré en l'origine.

Exercice 1.11 Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-((x_1)^2 + (x_2)^2)} dx_1 dx_2$$

et en déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

1.6.3 Autres exercices

Exercice 1.12 Soit $f \in C^2(\Omega)$, où

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}.$$

Montrer que, si

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(x, y),$$

alors

$$g_{rr}(r, \theta) + \frac{1}{r} g_r(r, \theta) + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta}(r, \theta) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) = \Delta f(x, y).$$

Exercice 1.13 Soit $f = f(y_1, y_2, y_3) \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Calculer la divergence de

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, x_3) \\ &= \left(f(x_1, x_1, x_1), f\left((x_1)^3, (x_2)^3, (x_3)^3\right), f\left((x_2)^2 (x_3)^2, (x_1)^2 (x_3)^2, (x_1)^2 (x_2)^2\right) \right). \end{aligned}$$

Exercice 1.14 (Multiplicateur de Lagrange) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $g \in C^1(\Omega)$ et

$$M = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}.$$

Soit $f \in C^1(\Omega)$ et $x_0 \in M$ tel que x_0 soit un maximum (ou un minimum) de f sur M , c'est à dire

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in M.$$

(i) En utilisant le Théorème des fonctions implicites, montrer que si $\nabla g(x_0) \neq 0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0).$$

(ii) Donner un exemple montrant que le résultat est en général faux, si l'hypothèse $\nabla g(x_0) \neq 0$ est supprimée.

(iii) Trouver le maximum de la fonction

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

sur la sphère centrée en l'origine et de rayon $\sqrt{14}$.

1.7 Corrigés

Exercice 1.1 (i) Supposons que $f'(x_0)$ existe. On définit l'application linéaire $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$L(h) = f'(x_0)h$$

et on a directement

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)|}{|h|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} \right| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| = 0. \end{aligned}$$

Inversement, lorsque f est différentiable en x_0 , il existe une application linéaire $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)|}{|h|} = 0.$$

Pour retomber sur la définition de $f'(x_0)$, nous écrivons, pour tout $h \neq 0$,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{h} + \frac{L(h)}{h}.$$

Comme L est linéaire, on peut écrire $L(h) = L(1)h$, d'où, en passant à la limite,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0 + L(1) < \infty,$$

et donc $f'(x_0) = L(1)$.

(ii) Puisque

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)|}{|h|} = 0$$

on doit avoir en particulier que

$$\lim_{h \rightarrow 0} |f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)| = 0.$$

Comme L est linéaire (et donc continue) on a que

$$\lim_{h \rightarrow 0} L(h) = L(0) = 0.$$

Combinant les deux dernières équations, on a le résultat, à savoir,

$$\lim_{h \rightarrow 0} |f(x_0 + h) - f(x_0)| = 0.$$

(iii) f est clairement différentiable en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$ et les dérivées partielles sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

f n'est pas continue en $(0, 0)$, car

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = 1/2 \neq 0.$$

Par conséquent, f n'est pas différentiable (contraposée du point (ii)). Par contre, les dérivées partielles de f en $(0, 0)$ existent. En effet, par définition,

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

et de la même manière

$$f_y(0, 0) = 0. \quad \spadesuit$$

Exercice 1.2 Etape 1. Nous montrons d'abord le Théorème des accroissements finis en dimension 1. Soient

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

et

$$F(x) = f(x) - f(a) - m(x - a), \quad x \in [a, b].$$

Alors $F \in C^0([a, b])$, F est différentiable sur $]a, b[$, $F(a) = F(b) = 0$ et

$$F'(x) = f'(x) - m, \quad x \in]a, b[.$$

Il suffit de montrer qu'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $F'(c) = 0$. Comme $[a, b]$ est compact et $F \in C^0([a, b])$, F atteint son maximum et minimum. Si ces extrema sont égaux, F est constante sur $[a, b]$ et on a $F'(t) = 0$ pour tout $t \in]a, b[$. Sinon, l'un de ces extrema, noté M , est distinct de $F(b) = F(a)$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $F(c) = M$; et puisque $F'(c)$ existe, on a $F'(c) = 0$.

Etape 2. Le cas $n \geq 2$ découle directement du cas $n = 1$. On définit la fonction $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\phi(t) = f((1 - t)a + tb).$$

Alors, ϕ est continue dans $[0, 1]$ et différentiable dans $]0, 1[$ avec

$$\phi'(t) = \langle \nabla f((1 - t)a + tb); b - a \rangle.$$

Il suffit d'appliquer l'Etape 1 à ϕ pour avoir le résultat. ♠

Exercice 1.3 Comme Ω est convexe, alors pour tout $x, y \in \Omega$, $[x, y] \subset \Omega$. Par hypothèse, f est continue sur $[x, y]$ et différentiable sur $]x, y[$, ce qui nous permet d'appliquer le Théorème des accroissements finis : il existe $z \in]x, y[$ tel que

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x - y \rangle.$$

En utilisant successivement les valeurs absolues, l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'hypothèse, nous avons

$$|f(x) - f(y)| = |\langle \nabla f(z), x - y \rangle| \leq |\nabla f(z)| |x - y| \leq c |x - y|. \quad \spadesuit$$

Exercice 1.4 Soit $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ et montrons que f est différentiable en x . On doit prouver l'existence d'un $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire tel que, notant $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) - L(h)|}{|h|} = 0. \quad (1.1)$$

On va montrer que

$$L(h) = f_{x_1}(x) h_1 + f_{x_2}(x) h_2 = \langle \nabla f(x), h \rangle$$

vérifie (1.1) (c'est d'ailleurs la seule possibilité). Soit h assez petit pour que $B_{2|h|}(x) \subset \Omega$. On commence par remarquer que

$$\begin{aligned} & f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) - L(h) \\ = & f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) - L(h) \\ & + f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1 + h_1, x_2) \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} & f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) - L(h) \\ = & (f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) - f_{x_2}(x) h_2) \\ & + (f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2) - f_{x_1}(x) h_1). \end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer le Théorème des accroissements finis aux fonctions

$$t \rightarrow f(x_1 + t, x_2) \quad \text{et} \quad t \rightarrow f(x_1 + h_1, x_2 + t)$$

définies respectivement sur $[0, h_1]$ et $[0, h_2]$. En effet, l'existence des dérivées partielles de f implique que ces deux fonctions sont différentiables et continues sur leur domaine (par l'Exercice 1.1). (Par contre, nous *ne pouvons pas* appliquer le Théorème des accroissements finis directement sur $f(x + h) - f(x)$, c'est à dire faire

$$f(x + h) - f(x) = \langle \nabla f(x + \bar{h}), h \rangle \quad \text{pour un certain } \bar{h} \in [0, h],$$

car f n'est *a priori* pas différentiable sur $[x, x+h]$.) Donc, il existe $\bar{h}_1 \in]0, h_1[$ et $\bar{h}_2 \in]0, h_2[$ tels que

$$f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1 + \bar{h}_1, x_2) h_1$$

et

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) = f_{x_2}(x_1 + h_1, x_2 + \bar{h}_2) h_2.$$

Puisque $|h_1|, |h_2| \leq |h|$, en utilisant ce qui précède, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{|f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) - f_{x_2}(x_1 + h_1, x_2) h_2|}{|h|} \\ &= \frac{|f_{x_2}(x_1 + h_1, x_2 + \bar{h}_2) - f_{x_2}(x_1 + h_1, x_2)| |h_2|}{|h|} \\ &\leq |f_{x_2}(x_1 + h_1, x_2 + \bar{h}_2) - f_{x_2}(x_1 + h_1, x_2)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque $|h| \rightarrow 0$ par continuité de f_{x_2} . De même, on a

$$\begin{aligned} & \frac{|f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2) - f_{x_1}(x_1, x_2) h_1|}{|h|} \\ &= \frac{|f_{x_1}(x_1 + \bar{h}_1, x_2) - f_{x_1}(x_1, x_2)| |h_1|}{|h|} \\ &\leq |f_{x_1}(x_1 + \bar{h}_1, x_2) - f_{x_1}(x_1, x_2)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque $|h| \rightarrow 0$ par continuité de f_{x_1} . Au final (1.1) est vérifié. ♠

Exercice 1.5 Puisque f est différentiable en x_0 , on obtient, par l'Exercice 1.1, que

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} < \infty.$$

Par conséquent, la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(h) = \begin{cases} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} & \text{si } h \neq 0 \\ f'(x_0) & \text{si } h = 0 \end{cases}$$

est continue sur \mathbb{R} . La continuité implique que g est bornée sur tout compact $K \subset \mathbb{R}$, c'est à dire qu'il existe une constante $\gamma_K > 0$ telle que

$$\frac{|f(x_0 + h) - f(x_0)|}{|h|} \leq \gamma_K, \quad \forall h \in K \setminus \{0\}.$$

Puisque l'énoncé est trivialement vrai pour $h = 0$, on a donc bien

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq \gamma_K |h|, \quad \forall h \in K. \quad \spadesuit$$

Exercice 1.6 (i) Un calcul facile nous donne

$$\nabla(|x|) = \frac{x}{|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

et donc

$$\nabla h_p(x) = \nabla(|x|^p) = p|x|^{p-1} \nabla(|x|) = p|x|^{p-2} x.$$

Remarquons que cette fonction est bien définie en 0 si $p \geq 1$.

(ii) Notons

$$f_p(t) = \frac{1}{p} h_p \circ G(tx) = \frac{1}{p} |G(tx)|^p.$$

Les formules classiques de dérivation de fonctions composées nous donnent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_p(t) &= \frac{1}{p} \left\langle (\nabla h_p) \circ G(tx); \frac{d}{dt} G(tx) \right\rangle \\ &= |G(tx)|^{p-2} \langle G(tx); \nabla G(tx)x \rangle \end{aligned}$$

où on a utilisé le point (i). ♠

Exercice 1.7 Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est continue sur le compact $\overline{\Omega}$, alors f est uniformément continue, ce qui implique l'existence de subdivisions

$$a_1 = p_1 < p_2 < \dots < p_N = b_1 \quad \text{et} \quad a_2 = q_1 < \dots < q_N = b_2$$

telles que

$$M_{ij} - m_{ij} \leq \epsilon$$

avec, pour $1 \leq i, j \leq N-1$,

$$M_{ij} = \max \{f(x_1, x_2) : x_1 \in [p_i, p_{i+1}], x_2 \in [q_j, q_{j+1}]\}$$

$$m_{ij} = \min \{f(x_1, x_2) : x_1 \in [p_i, p_{i+1}], x_2 \in [q_j, q_{j+1}]\}.$$

Les propriétés de l'intégrale nous permettent d'écrire

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{p_i}^{p_{i+1}} f(x_1, x_2) dx_1$$

et

$$\begin{aligned} \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 &= \sum_{j=1}^{N-1} \int_{q_j}^{q_{j+1}} \left(\sum_{i=1}^{N-1} \int_{p_i}^{p_{i+1}} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq N-1} \int_{q_j}^{q_{j+1}} \left(\int_{p_i}^{p_{i+1}} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2. \end{aligned}$$

Par définition de m_{ij} et M_{ij} , nous obtenons l'inégalité

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq N-1} m_{ij} (p_{i+1} - p_i) (q_{j+1} - q_j) &\leq \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \\ &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq N-1} M_{ij} (p_{i+1} - p_i) (q_{j+1} - q_j). \end{aligned}$$

De la même manière, nous avons également

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq N-1} m_{ij} (p_{i+1} - p_i) (q_{j+1} - q_j) &\leq \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \\ &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq N-1} M_{ij} (p_{i+1} - p_i) (q_{j+1} - q_j). \end{aligned}$$

En combinant les deux inégalités précédentes, nous avons finalement

$$\begin{aligned} &\left| \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 - \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq i, j \leq N-1} (M_{ij} - m_{ij}) (p_{i+1} - p_i) (q_{j+1} - q_j) \leq \epsilon (b_1 - a_1) (b_2 - a_2). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, nous avons bien le résultat désiré. ♠

Exercice 1.8 (i) On trouve immédiatement

$$\det \nabla u(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r.$$

L'aire du disque de rayon R

$$\Omega_R = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1)^2 + (x_2)^2 < R^2 \right\}$$

est donnée par

$$\int_{\Omega_R} dx_1 dx_2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r dr = \pi R^2.$$

(ii) On calcule

$$\begin{aligned} \det \nabla u(r, \theta, \varphi) &= \det \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= -r^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Le volume de la sphère de rayon R

$$\Omega_R = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 < R^2 \right\}$$

est donné par

$$\int_{\Omega_R} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^R r \sin \varphi dr = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

(iii) On obtient

$$\det \nabla u(r, \theta, z) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

Le volume du cylindre de rayon R et de hauteur H

$$\Omega_{R,H} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 < R, 0 < x_3 < H \right\}$$

est donc

$$\int_{\Omega_{R,H}} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \int_0^R r dr = \pi R^2 H. \spadesuit$$

Exercice 1.9 (i) Supposons d'abord que $\alpha_1, \beta_2 > 0$. Comme

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2\}$$

on obtient

$$u(\Omega) = \left\{ (y_1, y_2) : \alpha_1 a_1 < y_1 < \alpha_1 b_1, \beta_2 a_2 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} y_1 < y_2 < \beta_2 b_2 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} y_1 \right\}.$$

Par définition, nous pouvons écrire

$$\int_{\Omega} f(u(x)) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(\alpha_1 x_1, \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) dx_1 \right) dx_2.$$

En effectuant le changement de variable dans \mathbb{R} , $y_1 = \alpha_1 x_1$, nous avons

$$\int_{a_1}^{b_1} f(\alpha_1 x_1, \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) dx_1 = \frac{1}{\alpha_1} \int_{\alpha_1 a_1}^{\alpha_1 b_1} f\left(y_1, \frac{\beta_1}{\alpha_1} y_1 + \beta_2 x_2\right) dy_1$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(u(x)) dx &= \frac{1}{\alpha_1} \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{\alpha_1 a_1}^{\alpha_1 b_1} f(y_1, \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) dy_1 \right) dx_2 \\ &= \frac{1}{\alpha_1} \int_{\alpha_1 a_1}^{\alpha_1 b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(y_1, \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) dx_2 \right) dy_1 \end{aligned}$$

où la permutation des intégrales est justifiée par l'Exercice 1.7 et par le fait que f est continue. Par un second changement de variable, $y_2 = y_2(x_2) = \frac{\beta_1}{\alpha_1} y_1 + \beta_2 x_2$, nous avons

$$\int_{a_2}^{b_2} f(y_1, \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) dx_2 = \frac{1}{\beta_2} \int_{\beta_2 a_2 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} y_1}^{\beta_2 b_2 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} y_1} f(y_1, y_2) dy_2$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(u(x)) dx &= \frac{1}{\alpha_1 \beta_2} \int_{\alpha_1 a_1}^{\alpha_1 b_1} \left(\int_{\beta_2 a_2 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} y_1}^{\beta_2 b_2 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} y_1} f(y_1, y_2) dy_2 \right) dy_1 \\ &= \frac{1}{|\det \nabla u|} \int_{u(\Omega)} f(y) dy. \end{aligned}$$

(ii) Nous démontrons ici le cas $\alpha_1 < 0 < \beta_2$, les autres étant similaires. Posons

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = u(-x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 x_1 \\ -\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[.$$

En effectuant successivement les changements de variable $\tilde{x}_1 = -x_1$ et $\tilde{x}_2 = x_2$, on calcule

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(u(x)) |\det \nabla u(x)| dx \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(\alpha_1 x_1, \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) |\alpha_1 \beta_2| dx_1 \right) dx_2 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left(- \int_{-a_1}^{-b_1} f(-\alpha_1 \tilde{x}_1, -\beta_1 \tilde{x}_1 + \beta_2 \tilde{x}_2) |\alpha_1 \beta_2| d\tilde{x}_1 \right) d\tilde{x}_2 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{-b_1}^{-a_1} f(-\alpha_1 \tilde{x}_1, -\beta_1 \tilde{x}_1 + \beta_2 \tilde{x}_2) |\alpha_1 \beta_2| d\tilde{x}_1 \right) d\tilde{x}_2 \end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\Omega} f(u(x)) |\det \nabla u(x)| dx = \int_{\tilde{\Omega}} f(\tilde{u}(\tilde{x})) |\det \nabla \tilde{u}(\tilde{x})| d\tilde{x} = \int_{\tilde{u}(\tilde{\Omega})} f(y) dy$$

où la dernière égalité découle du point (i), puisque $-\alpha_1 > 0$. Nous remarquons facilement que

$$|\det \nabla \tilde{u}| = |\det \nabla u| = |\alpha_1 \beta_2| \quad \text{et} \quad \tilde{u}(\tilde{\Omega}) = u(\Omega)$$

par conséquent, nous avons bien

$$\int_{\Omega} f(u(x)) |\det \nabla u(x)| dx = \int_{u(\Omega)} f(y) dy. \quad \spadesuit$$

Exercice 1.10 Dans la suite, nous admettrons que pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné et $\Gamma \subset \Omega$ une union finie de courbes simples et régulières, alors

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega \setminus \overline{\Gamma}} f(x) dx \tag{1.2}$$

pour tout $f \in C^0(\overline{\Omega})$. Posons $\Omega =]0, 1[\times]0, 2\pi[$ et

$$u(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta), \quad (r, \theta) \in \overline{\Omega}.$$

On obtient alors que

$$u(\Omega) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1 \right\} \setminus \{0 \leq x_1 < 1, x_2 = 0\}$$

$$\text{int } [u(\overline{\Omega})] = D = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1 \right\}$$

et $u \in C^1(\overline{\Omega}; u(\overline{\Omega}))$. Nous voulons montrer la formule

$$\int_{u(\Omega)} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r f(u(r, \theta)) dr \right) d\theta.$$

Par (1.2), la valeur du membre de gauche est égale à l'intégrale sur le disque D . Nous ne pouvons pas, a priori, appliquer la formule de l'énoncé pour deux raisons : d'une part, le Jacobien r s'annule à l'origine, et d'autre part, u n'est pas injective sur $\overline{\Omega}$, car $u(r, 0) = u(r, 2\pi)$ (par contre, u est injective sur Ω).

Etape 1. Soit $0 < \epsilon < 1$ et considérons l'ensemble

$$\Omega_\epsilon =]\epsilon, 1[\times]\epsilon, 2\pi[.$$

Alors $u \in C^1(\overline{\Omega}_\epsilon; u(\overline{\Omega}_\epsilon))$ est injective et

$$|\det \nabla u(r, \theta)| = r > \epsilon > 0.$$

Nous pouvons ainsi appliquer la formule du changement de variable (de l'énoncé) pour obtenir l'égalité

$$\int_{u(\Omega_\epsilon)} f(x) dx = \int_\epsilon^{2\pi} \left(\int_\epsilon^1 r f(u(r, \theta)) dr \right) d\theta. \quad (1.3)$$

Etape 2. Ensuite, puisque u est injective sur Ω , alors $u(\Omega)$ est ouvert et borné, et nous pouvons écrire

$$u(\Omega) = u(\Omega_\epsilon) \cup u(\Omega \setminus \Omega_\epsilon) = u(\Omega_\epsilon) \cup u(\Omega \setminus \overline{\Omega}_\epsilon) \cup \Gamma$$

où $u(\Omega_\epsilon)$ et $u(\Omega \setminus \overline{\Omega}_\epsilon)$ sont ouverts et Γ est une certaine union finies de courbes régulières. Par (1.2), nous pouvons décomposer l'intégrale

$$\int_{u(\Omega)} f(x) dx = \int_{u(\Omega_\epsilon)} f(x) dx + \int_{u(\Omega \setminus \overline{\Omega}_\epsilon)} f(x) dx$$

et ainsi

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r f(u(r, \theta)) dr \right) d\theta \\ = & \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\epsilon r f(u(r, \theta)) dr \right) d\theta + \int_\epsilon^{2\pi} \left(\int_\epsilon^1 r f(u(r, \theta)) dr \right) d\theta \\ & + \int_0^\epsilon \left(\int_\epsilon^1 r f(u(r, \theta)) dr \right) d\theta. \end{aligned}$$

En combinant les deux égalités précédentes avec (1.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{u(\Omega)} f(x) dx - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r f(u(r, \theta)) dr \right) d\theta \\ = \int_{u(\Omega \setminus \overline{\Omega}_\epsilon)} f(x) dx - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\epsilon r f(u(r, \theta)) dr \right) d\theta \\ - \int_0^\epsilon \left(\int_\epsilon^1 r f(u(r, \theta)) dr \right) d\theta. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Etape 3. Montrons que les trois termes de (1.4) tendent vers 0 quand $\epsilon \rightarrow 0$. D'abord, puisque f est continue sur un compact, f est bornée sur $u(\overline{\Omega})$, c'est à dire

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in u(\overline{\Omega}).$$

Ceci nous donne les inégalités

$$\left| \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\epsilon r f(u(r, \theta)) dr \right) d\theta \right| \leq 2\pi M \int_0^\epsilon r dr = \pi M \epsilon^2 \quad (1.5)$$

et

$$\left| \int_0^\epsilon \left(\int_\epsilon^1 r f(u(r, \theta)) dr \right) d\theta \right| \leq \epsilon M \int_\epsilon^1 r dr = \frac{\epsilon M}{2} (1 - \epsilon^2) \leq \frac{\epsilon M}{2}. \quad (1.6)$$

De plus, en remarquant que

$$u(\Omega \setminus \overline{\Omega}_\epsilon) \subset]-1, 1[\times]-\epsilon, \epsilon[$$

ce qui implique

$$\text{Aire}(\Omega \setminus \overline{\Omega}_\epsilon) \leq 4\epsilon$$

nous obtenons la troisième inégalité

$$\left| \int_{u(\Omega \setminus \overline{\Omega}_\epsilon)} f(x) dx \right| \leq M \text{Aire}(\Omega \setminus \overline{\Omega}_\epsilon) \leq 4M\epsilon. \quad (1.7)$$

En remplaçant les inégalités (1.5)-(1.7) dans (1.4), nous avons finalement

$$\left| \int_{u(\Omega)} f(x) dx - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r f(u(r, \theta)) dr \right) d\theta \right| \leq \frac{\epsilon M}{2} (9 + 2\pi\epsilon).$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $\epsilon > 0$, nous avons la conclusion

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r f(u(r, \theta)) dr \right) d\theta. \quad \spadesuit$$

Exercice 1.11 En passant aux coordonnées polaires $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, nous avons directement

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-((x_1)^2 + x_2^2)} dx dy &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \right) d\theta = 2\pi \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_{r=0}^{r=+\infty} \\ &= \pi(1 - \lim_{r \rightarrow +\infty} e^{-r^2}) = \pi. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x_1)^2} dx_1\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x_2)^2} dx_2\right)} \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-((x_1)^2 + (x_2)^2)} dx_1 dx_2} = \sqrt{\pi}. \quad \spadesuit\end{aligned}$$

Exercice 1.12 (i) Comme $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, on trouve immédiatement que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = r_x = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = r_y = \frac{y}{r}.$$

Par ailleurs comme $x, y > 0$ on a

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

et donc

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \theta_x = \frac{\frac{-y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{r^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \theta_y = \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{r^2}.$$

(ii) Si on pose $f_x = \partial f / \partial x$, $f_y = \partial f / \partial y$, $g_r = \partial g / \partial r$, $g_\theta = \partial g / \partial \theta$, on trouve donc

$$f_x = g_r r_x + g_\theta \theta_x = \frac{x}{r} g_r - \frac{y}{r^2} g_\theta$$

et

$$f_y = g_r r_y + g_\theta \theta_y = \frac{y}{r} g_r + \frac{x}{r^2} g_\theta.$$

(iii) On a

$$\begin{aligned}f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) g_r + \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} (g_r) - y \frac{\partial}{\partial x} (r^{-2}) g_\theta - \frac{y}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} (g_\theta) \\ &= \frac{r - x \frac{x}{r}}{r^2} g_r + \frac{x}{r} \left(\frac{x}{r} g_{rr} - \frac{y}{r^2} g_{r\theta} \right) + \frac{2xy}{r^4} g_\theta - \frac{y}{r^2} \left(\frac{x}{r} g_{r\theta} - \frac{y}{r^2} g_{\theta\theta} \right) \\ &= \frac{y^2}{r^3} g_r + \frac{x^2}{r^2} g_{rr} - \frac{2xy}{r^3} g_{r\theta} + \frac{2xy}{r^4} g_\theta + \frac{y^2}{r^4} g_{\theta\theta}.\end{aligned}$$

Un calcul similaire nous conduit à

$$f_{yy} = \frac{x^2}{r^3} g_r + \frac{y^2}{r^2} g_{rr} + \frac{2xy}{r^3} g_{r\theta} - \frac{2xy}{r^4} g_\theta + \frac{x^2}{r^4} g_{\theta\theta}$$

et donc

$$\Delta f = g_{rr} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\theta\theta}. \quad \spadesuit$$

Exercice 1.13 En notant $F = F(x_1, x_2, x_3)$ et $f = f(y_1, y_2, y_3)$, on a

$$\frac{\partial F^1}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial y_2} + \frac{\partial f}{\partial y_3}, \quad \frac{\partial F^2}{\partial x_2} = 3(x_2)^2 \frac{\partial f}{\partial y_2},$$

$$\frac{\partial F^3}{\partial x_3} = 2(x_2)^2 x_3 \frac{\partial f}{\partial y_1} + 2(x_1)^2 x_3 \frac{\partial f}{\partial y_2}.$$

En sommant, on obtient le résultat. ♠

Exercice 1.14 (i) Sans perte de généralité, on peut supposer que

$$\frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0) \neq 0.$$

On note $x = (x^1, \dots, x^n)$ et $x' = (x^1, \dots, x^{n-1})$. Par le Théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de $x'_0 = (x_0^1, \dots, x_0^{n-1})$ dans \mathbb{R}^{n-1} et $\psi \in C^1(U; \mathbb{R})$, tel que

$$\psi(x'_0) = x_0^n \quad \text{et} \quad g(x', \psi(x')) = 0 \quad \text{pour tout } x' \in U.$$

Ceci implique que pour tout $x' \in U$, on a

$$(x', \psi(x')) \in M = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}.$$

Puisque, x_0 est un point de maximum ou de minimum de f sur M , alors le point x'_0 est un minimum sur U de la fonction $x' \mapsto f(x', \psi(x'))$. Cette fonction étant C^1 sur U (car $f \in C^1(\Omega)$), on a que, pour tout $1 \leq i \leq n-1$,

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} (f(x', \psi(x'))) \right|_{x'=x'_0} = 0$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x'_0) = 0, \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n-1. \quad (1.8)$$

De même, dérivant l'équation $g(x', \psi(x')) = 0$ par rapport à x_i , on obtient

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x'_0) = 0, \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n-1. \quad (1.9)$$

Combinant (1.8) et (1.9), on déduit que, pour tout $1 \leq i \leq n-1$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0)} \right) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0).$$

Remarquant que la dernière équation est trivialement vraie pour $i = n$, on obtient le résultat recherché en posant

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)}{\frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0)}.$$

(ii) Choisir $\Omega = \mathbb{R}^2$, $x_0 = (0, 0)$ et les fonctions

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad g(x_1, x_2) = (x_1)^2 + (x_2)^2.$$

(iii) La sphère centrée en l'origine et de rayon $\sqrt{14}$ est caractérisée par l'équation

$$0 = g(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - 14.$$

Un maximum de f sous la contrainte $g(x) = 0$ est une solution du système d'équations

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 0$$

où x et λ sont inconnus. Comme

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, -2) \quad \text{et} \quad \nabla g(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1, x_2, x_3),$$

alors il faut résoudre

$$\begin{cases} (1, 3, -2) = 2\lambda(x_1, x_2, x_3) \\ (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 14. \end{cases}$$

On obtient facilement les solutions

$$x_1 = \frac{1}{2\lambda}, \quad x_2 = \frac{3}{2\lambda}, \quad x_3 = \frac{-1}{\lambda}, \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}.$$

Donc $(1, 3, -2)$ est un maximum et la valeur du maximum est 14. ♠

Chapitre 2

Courbes et intégrales curvilignes

2.1 Courbes

Définition 2.1 Soit $n \geq 2$.

(i) On dit que $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe simple, s'il existe une fonction continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ (γ est appelée une paramétrisation simple de Γ) telle que

$$\gamma([a, b]) = \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [a, b] \text{ tel que } x = \gamma(t)\}$$

et si $t_1 \in [a, b]$, $t_2 \in]a, b[$, $t_1 \neq t_2$, alors

$$\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$$

(en particulier γ est injective sur $]a, b[$).

(ii) Une courbe simple est dite fermée, si en outre $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(iii) Si Γ est une courbe simple de paramétrisation $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, on définit la courbe

$$-\Gamma = \{\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t) : t \in [a, b]\}.$$

Remarque (i) Une courbe simple Γ peut donc être vue comme une classe d'équivalence.

(ii) On peut considérer, de manière tout à fait analogue, des courbes dont une (ou les deux) extrémité n'appartient pas à Γ . Dans ce cas l'intervalle est de la forme $]a, b[$, $[a, b[$, ou $]a, b]$; les cas $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ se traitent aussi de la même façon. ♠

Exemple Considérons le cercle

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

C'est une courbe simple fermée.

Discussion En effet

(i) On écrit

$$\Gamma = \{\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : \gamma(t) = (\cos t, \sin t)\}$$

et on vérifie que la définition de paramétrisation simple fermée est vérifiée.

(ii) Noter que

$$\Gamma = \{\gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 : \gamma_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t))\}$$

est aussi une paramétrisation de la courbe, mais elle n'est pas simple.

(iii) Une autre paramétrisation simple est

$$\gamma_3 : [-2, 2] \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^2$$

avec

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \left(1+t, -\sqrt{1-(1+t)^2}\right) & \text{si } t \in [-2, 0[\\ \left(1-t, \sqrt{1-(1-t)^2}\right) & \text{si } t \in [0, 2]. \end{cases} \spadesuit$$

On commence par définir la notion de fonction C^1 par morceaux.

Définition 2.2 (i) On dit que $f \in C^1_{\text{morc}}([a, b])$ si $f \in C([a, b])$ et s'il existe

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{N+1} = b$$

tels que, $\forall i = 0, 1, \dots, N$, $f'|_{[a_i, a_{i+1}[}$ est continue et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a_i \\ x > a_i}} f'(x) = f'(a_i + 0) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a_{i+1} \\ x < a_{i+1}}} f'(x) = f'(a_{i+1} - 0)$$

existent et sont finies.

(ii) De même on dira que $F \in C^1_{\text{morc}}([a, b]; \mathbb{R}^n)$ si $F^i \in C^1_{\text{morc}}([a, b])$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Exemple (i) La fonction

$$f(x) = |x|, \quad x \in [-1, 1]$$

est $C^1_{\text{morc}}([-1, 1])$ mais pas $C^1([-1, 1])$.

(ii) La fonction

$$f(x) = \sqrt{|x|}, \quad x \in [-1, 1]$$

est $C^0([-1, 1])$ mais pas $C^1_{\text{morc}}([-1, 1])$. ♠

Définition 2.3 (i) On dit que $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ est une courbe régulière s'il existe une paramétrisation $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$ (une telle paramétrisation est dite régulière) telle que $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ et

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(\gamma'_1)^2 + \dots + (\gamma'_n)^2} \neq 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

(ii) On dit que Γ est une courbe régulière par morceaux s'il existe $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$ telle que $\gamma \in C^1_{\text{morc}}([a, b]; \mathbb{R}^n)$ et $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in [a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N$.

Remarque Par la suite quand nous dirons que Γ est une courbe simple régulière par morceaux, ceci impliquera qu'il existe une paramétrisation simple et régulière par morceaux $\gamma \in C^1_{\text{morc}}([a, b]; \Gamma \subset \mathbb{R}^n)$. ♠

Exemple Soit $I = [a, b]$ et $u \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ alors

$$\Gamma = \{\gamma(t) = (t, u(t)) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

est une courbe simple régulière. Noter qu'ici il y a une paramétrisation naturelle qui est celle ci dessus; de plus

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + |u'(t)|^2}. \quad \spadesuit$$

Exemple Le cercle $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ est une courbe simple fermée régulière. En effet il suffit de choisir $I = [0, 2\pi]$ et $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, qui est une paramétrisation simple et régulière. De plus

$$|\gamma'(t)| \equiv 1, \quad \forall t \in [a, b],$$

cette paramétrisation sera appelée plus tard la paramétrisation par la longueur de l'arc. Par contre la paramétrisation γ_3 donnée dans l'Exemple sur les différentes paramétrisations du cercle, n'est pas régulière. ♠

2.2 Intégrale curviligne d'une fonction

Définition 2.4 (i) Soit $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$. On notera par

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t)) \quad \text{et} \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^n (\gamma'_\nu(t))^2}.$$

Soit $f : \gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale de f le long de γ est définie par

$$\int_{\gamma} f \, dl = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt.$$

(ii) Soit $\gamma \in C^1_{\text{morc}}([a, b]; \mathbb{R}^n)$, alors

$$\int_{\gamma} f \, dl = \sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt.$$

Ceci est une définition purement analytique, mais si on veut qu'elle ait un sens géométrique, alors on aura la définition suivante.

Définition 2.5 Soient $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe simple régulière par morceaux de paramétrisation simple et régulière par morceaux $\gamma \in C_{\text{morc}}^1([a, b]; \Gamma \subset \mathbb{R}^n)$ et $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors

$$\int_{\Gamma} f \, dl = \int_{\gamma} f \, dl.$$

La longueur d'une courbe Γ est obtenue en prenant $f \equiv 1$ dans les définitions ci-dessus, c'est à dire

$$\text{long}(\Gamma) = \int_{\Gamma} dl.$$

Exemple Calculer la longueur du cercle unité.

Discussion On écrit

$$\Gamma = \{\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \gamma(t) = (\cos t, \sin t)\},$$

noter que γ est une paramétrisation simple de Γ , alors

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \quad \text{et} \quad |\gamma'(t)| = 1$$

et donc

$$\text{long}(\Gamma) = \int_{\Gamma} dl = \int_{\gamma} dl = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Noter que si on avait pris

$$\delta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \delta(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$$

on aurait, géométriquement, la même courbe mais parcourue deux fois et on aurait trouvé

$$\int_{\delta} dl = \int_0^{2\pi} 2 \, dt = 4\pi$$

ce qui ne correspond plus à la notion intuitive de longueur (ceci provient du fait que la paramétrisation choisie n'est pas simple). ♠

Exemple. Soit $I = [a, b]$, $u \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ et

$$\Gamma = \{\gamma(t) = (t, u(t)) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

La longueur est alors donnée par

$$\text{long}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + |u'(t)|^2} \, dt. \quad \spadesuit$$

Exemple Calculer $\int_{\Gamma} f \, dl$ quand $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ et

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y = x^2, x \in [0, 1]\}.$$

Discussion Une paramétrisation de la courbe est donnée par

$$\gamma(t) = (t, t^2/2), \quad t \in [0, 1].$$

Alors, comme $\gamma'(t) = (1, t)$, on trouve

$$\int_{\Gamma} f \, dl = \int_0^1 \sqrt{t^2 + 4(t^2/2)^2} \sqrt{1+t^2} \, dt = \int_0^1 t(1+t^2) \, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \quad \spadesuit$$

On a maintenant un résultat qui indique que l'intégrale curviligne est indépendante de la paramétrisation.

Proposition 2.6 Soient $\delta \in C_{\text{morc}}^1([c, d]; \mathbb{R}^n)$ et $\theta : [a, b] \rightarrow [c, d]$ une fonction $C^1([a, b])$ avec $\theta'(t) > 0$ pour tout $t \in [a, b]$ et telle que $\theta(a) = c$, $\theta(b) = d$. Alors

$$\gamma = \delta \circ \theta \in C_{\text{morc}}^1([a, b]; \mathbb{R}^n).$$

De plus si $f : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$\int_{\gamma} f \, dl = \int_{\delta} f \, dl.$$

Démonstration Nous faisons la démonstration quand les paramétrisations sont C^1 , le cas général est analogue. Il suffit d'observer que

$$\gamma([a, b]) = \delta([c, d])$$

que

$$\int_{\gamma} f \, dl = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt \quad \text{et} \quad \int_{\delta} f \, dl = \int_c^d f(\delta(s)) |\delta'(s)| \, ds$$

et de faire un changement de variable en posant $s = \theta(t)$. ■

Une autre propriété qui sera très utile par la suite est :

Proposition 2.7 Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe simple régulière par morceaux et soit $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\left| \int_{\Gamma} f \, dl \right| \leq \sup_{x \in \Gamma} |f(x)| \text{long}(\Gamma).$$

Démonstration On montre ceci quand elle est régulière, de paramétrisation simple et régulière

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f \, dl \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| \, dt \leq \sup_{t \in [a,b]} |f(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt \\ &= \sup_{x \in \Gamma} |f(x)| \operatorname{long}(\Gamma). \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. ■

Maintenant tournons nous vers la notion de paramétrisation par la longueur de l'arc.

Définition 2.8 On dit qu'une paramétrisation simple régulière

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

est une paramétrisation par la longueur de l'arc, si

$$|\gamma'(t)| \equiv 1, \quad \forall t \in [a, b].$$

Idem pour les courbes régulières par morceaux.

Proposition 2.9 Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe simple régulière, alors il existe une paramétrisation par la longueur de l'arc.

Démonstration Soit γ une paramétrisation simple régulière

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)).$$

On pose

$$y = \eta(x) = \int_a^x |\gamma'(t)| \, dt$$

et on observe que

$$\eta : [a, b] \rightarrow [0, \operatorname{long}(\Gamma)]$$

et que η est inversible et $C^1([0, \operatorname{long}(\Gamma)])$. On pose alors

$$\varphi(y) = \gamma(\eta^{-1}(y))$$

et on vérifie que

$$|\varphi'(y)| \equiv 1, \quad \forall y \in [0, \operatorname{long}(\Gamma)].$$

En effet

$$\varphi'(y) = \gamma'(\eta^{-1}(y)) (\eta^{-1})'(y) = \frac{\gamma'(x)}{|\gamma'(x)|}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. ■

Souvent par la suite nous adopterons les notations suivantes.

Notation (i) Si $\gamma \in C_{morc}^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$, alors la "courbe"

$$-\gamma$$

est définie, comme la "courbe" de paramétrisation $\delta \in C_{morc}^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ telle que

$$\delta(t) = \gamma(a + b - t)$$

Donc en particulier $\delta(a) = \gamma(b)$ et $\delta(b) = \gamma(a)$.

(ii) Si $\gamma_1 \in C_{morc}^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ et $\gamma_2 \in C_{morc}^1([c, d]; \mathbb{R}^n)$ avec $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, alors la "courbe"

$$\gamma_1 \oplus \gamma_2$$

(notée aussi $\gamma_1 \cup \gamma_2$ ou $\gamma_1 + \gamma_2$) est définie, comme la "courbe" de paramétrisation $\delta \in C_{morc}^1([a, b + d - c]; \mathbb{R}^n)$ par

$$\delta(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{si } t \in]b, b + d - c]. \end{cases} \spadesuit$$

2.3 Intégrale curviligne d'une application

On commence par définir

Définition 2.10 (i) Soit $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$. Soit

$$F = (F^1, \dots, F^n) : \gamma([a, b]) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

une application continue. L'intégrale de F le long de γ est définie par

$$\int_{\gamma} F \cdot dl = \int_a^b \langle F(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{\nu=1}^n F^{\nu}(\gamma(t)) \gamma'_{\nu}(t) dt.$$

(ii) Soit $\gamma \in C_{morc}^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$, alors

$$\int_{\gamma} F \cdot dl = \sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle F(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle dt.$$

Ceci est une définition purement analytique, mais si on veut qu'elle ait un sens géométrique, alors on aura la définition suivante.

Définition 2.11 Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe simple régulière par morceaux de paramétrisation simple et régulière par morceaux $\gamma \in C_{morc}^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)).$$

Soit $F = (F^1, \dots, F^n) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. L'intégrale de F le long de Γ est définie par

$$\int_{\Gamma} F \cdot dl = \int_{\gamma} F \cdot dl.$$

Exemple Calculer $\int_{\Gamma} F \cdot dl$ quand $F(x, y) = (x^2, 0)$ et

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \cosh x, x \in [0, 1]\}.$$

Discussion Dans ce cas on peut prendre

$$\gamma(t) = (t, \cosh t) \quad \Rightarrow \quad \gamma'(t) = (1, \sinh t).$$

On a donc

$$\int_{\Gamma} F \cdot dl = \int_0^1 \langle (t^2, 0); (1, \sinh t) \rangle dt = \frac{1}{3}. \quad \spadesuit$$

On a maintenant des propriétés analogues à celles des intégrales curvilignes d'un champ scalaire (et nous ne ferons pas les démonstrations).

Proposition 2.12 Soient $\delta \in C_{\text{morc}}^1([c, d]; \mathbb{R}^n)$ et $\theta : [a, b] \rightarrow [c, d]$ une fonction $C^1([a, b])$ avec $\theta'(t) > 0$ pour tout $t \in [a, b]$ et telle que $\theta(a) = c$, $\theta(b) = d$. Alors

$$\gamma = \delta \circ \theta \in C_{\text{morc}}^1([a, b]; \mathbb{R}^n).$$

De plus si $F : \gamma([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application continue, alors

$$\int_{\gamma} F \cdot dl = \int_{\delta} F \cdot dl.$$

Proposition 2.13 Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ une courbe simple régulière par morceaux et soit $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors

$$\left| \int_{\Gamma} F \cdot dl \right| \leq \sup_{x \in \Gamma} \{|F(x)|\} \text{long}(\Gamma).$$

2.4 Exercices

De nombreux exercices concernant ce chapitre, notamment Exercices 2 et 3, se trouvent au Chapitre 2 de [9].

Chapitre 3

Champs qui dérivent d'un potentiel

3.1 Définitions et premiers résultats

Définition 3.1 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F = F(x) = (F^1, \dots, F^n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que F dérive d'un potentiel sur Ω s'il existe $f \in C^1(\Omega)$ (f est appelé le potentiel) tel que

$$F(x) = \text{grad } f(x) = (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x)), \quad \forall x \in \Omega.$$

On a immédiatement une condition nécessaire.

Théorème 3.2 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Si F dérive d'un potentiel sur Ω alors

$$F_{x_j}^i(x) - F_{x_i}^j(x) = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n \text{ et } \forall x \in \Omega. \quad (3.1)$$

Remarque (i) La condition ci-dessus s'écrit aussi

$$\text{rot } F(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

On peut traduire le théorème en termes de forme différentielle. On associe à F une 1-forme différentielle

$$\omega = F^1 dx_1 + \dots + F^n dx_n$$

Dire que F dérive d'un potentiel sur Ω est équivalent à dire que la forme ω est exacte, ce qui veut dire qu'il existe $f \in C^1(\Omega)$ tel que

$$\omega = df.$$

De plus le théorème traduit juste la propriété classique

$$ddf = 0.$$

(ii) La condition (3.1) n'est pas suffisante (cf. un exemple ci-dessous) pour garantir l'existence d'un tel potentiel, il faut pour cela des conditions sur la topologie du domaine Ω , ceci sera discuté dans la Section 3.4.

(iii) Dans un domaine (c'est à dire un ensemble ouvert et connexe) le potentiel est *unique à une constante près* (évident). ♠

Démonstration Comme F dérive d'un potentiel sur Ω alors il existe $f \in C^1(\Omega)$, tel que

$$F(x) = \text{grad } f(x) = (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x)), \quad \forall x \in \Omega.$$

Comme $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$, on déduit que $f \in C^2(\Omega)$. On a donc

$$F_{x_j}^i - F_{x_i}^j = (f_{x_i})_{x_j} - (f_{x_j})_{x_i} = 0.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Voyons maintenant quelques exemples.

Exemple Soit $F(x_1, x_2) = (4(x_1)^3(x_2)^2, 2(x_1)^4 x_2 + x_2)$. Montrer que F dérive d'un potentiel sur $\Omega = \mathbb{R}^2$ et trouver un tel potentiel.

Discussion Le domaine de définition est $\Omega = \mathbb{R}^2$. En dérivant on obtient

$$F_{x_1}^2 - F_{x_2}^1 = 8(x_1)^3 x_2 - 8(x_1)^3 x_2 = 0.$$

Trouvons ce potentiel $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pour trouver ce potentiel on écrit

$$f_{x_1} = 4(x_1)^3(x_2)^2 \quad \text{et} \quad f_{x_2} = 2(x_1)^4 x_2 + x_2.$$

En intégrant la première équation par rapport à la variable x_1 on obtient

$$f(x_1, x_2) = (x_1)^4(x_2)^2 + \alpha(x_2).$$

En dérivant cette dernière expression par rapport à x_2 et en remettant dans la deuxième équation on a

$$f_{x_2} = 2(x_1)^4 x_2 + \alpha'(x_2) = 2(x_1)^4 x_2 + x_2.$$

Ceci implique que

$$\alpha'(x_2) = x_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha(x_2) = \frac{(x_2)^2}{2} + c$$

avec $c \in \mathbb{R}$. Finalement le potentiel cherché est donné par

$$f(x_1, x_2) = (x_1)^4(x_2)^2 + \frac{(x_2)^2}{2} + c. \quad \spadesuit$$

Exemple Soit $F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 \sin x_3, x_3 e^{x_2}, (x_1)^2 \cos x_3 + e^{x_2})$. Montrer que F dérive d'un potentiel sur $\Omega = \mathbb{R}^3$ et trouver un tel potentiel.

Discussion On vérifie si la condition nécessaire, i.e. $\text{rot } F = 0$, est satisfaite. On a

$$\begin{aligned} \text{rot } F &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 2x_1 \sin x_3 & x_3 e^{x_2} & (x_1)^2 \cos x_3 + e^{x_2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{x_2} - e^{x_2} \\ 2x_1 \cos x_3 - 2x_1 \cos x_3 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Noter que le domaine de définition est $\Omega = \mathbb{R}^3$. Trouvons le potentiel f . On écrit alors

$$f_{x_1} = 2x_1 \sin x_3, \quad f_{x_2} = x_3 e^{x_2} \quad \text{et} \quad f_{x_3} = (x_1)^2 \cos x_3 + e^{x_2}.$$

On intègre la première équation par rapport à x_1 et on trouve

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 \sin x_3 + \alpha(x_2, x_3).$$

En dérivant cette dernière expression par rapport à x_2 et x_3 et en remettant dans les deuxième et troisième équations on obtient

$$\begin{cases} f_{x_2} = x_3 e^{x_2} = \alpha_{x_2} \\ f_{x_3} = (x_1)^2 \cos x_3 + e^{x_2} = (x_1)^2 \cos x_3 + \alpha_{x_3}. \end{cases}$$

En intégrant la première équation par rapport à x_2 on trouve

$$\alpha(x_2, x_3) = x_3 e^{x_2} + \beta(x_3).$$

Puis en remettant le résultat dans la deuxième équation on a

$$\alpha_{x_3} = e^{x_2} + \beta'(x_3) = e^{x_2} \quad \Rightarrow \quad \beta'(x_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(x_3) = \beta = \text{constante}.$$

Finalement en résumant on a obtenu

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1)^2 \sin x_3 + x_3 e^{x_2} + \beta. \quad \spadesuit$$

Voici un exemple très important qui sera étudié sous une forme un peu différente en analyse complexe.

Exemple 3.3 Soit

$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

(i) Trouver le domaine de définition de F .

(ii) Soient

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$$

$$\Omega_3 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \text{ et } y = 0\}$$

$$\Omega_4 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

F dérive-t-il d'un potentiel sur Ω_i , $i = 1, 2, 3, 4$? Si oui trouver un tel potentiel, si non trouver $\Gamma \subset \Omega_i$ tel que $\int_{\Gamma} F \cdot dl \neq 0$.

Discussion (i) Le domaine de définition de F est $\Omega_4 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $F \in C^\infty(\Omega_4; \mathbb{R}^2)$. On a par ailleurs

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)_x - \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right)_y = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega_4.$$

On peut aussi noter au passage (mais c'est sans incidence sur les calculs qui suivent) que

$$\operatorname{div} F = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right)_x + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right)_y = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega_4.$$

(ii) Noter que $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \Omega_4$ et Ω_1 et Ω_2 sont convexes, Ω_3 est simplement connexe (mais pas convexe) et Ω_4 n'est pas simplement connexe (pour les définitions de ces notions, voir la section suivante). On va d'abord trouver un potentiel quand $y > 0$ (et donc dans Ω_1) puis quand $y < 0$ (et donc dans Ω_2) et puis enfin on discutera le cas où $y = 0$.

Cas 1. $(x, y) \in \Omega_1$. Cherchons donc un potentiel $f \in C^1(\Omega_1)$. Si un tel f existe on doit avoir

$$f_x = -\frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad f_y = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

En intégrant la première équation par rapport à x on trouve

$$f(x, y) = -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \alpha_+(y).$$

En remettant dans la deuxième équation on trouve $\alpha'_+(y) = 0$ et donc le potentiel cherché dans Ω_1 (c'est à dire lorsque $y > 0$) est

$$f(x, y) = -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \alpha_+, \quad \forall (x, y) \in \Omega_1,$$

où $\alpha_+ \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

Cas 2. $(x, y) \in \Omega_2$. La même analyse que précédemment conduit à

$$f(x, y) = -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \alpha_-, \quad \forall (x, y) \in \Omega_2$$

où $\alpha_- \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire.

Cas 3. $(x, y) \in \Omega_3$. Par les Cas 1 et 2, s'il existe un potentiel $f \in C^1(\Omega_3)$ alors il doit nécessairement être de la forme

$$f(x, y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \alpha_+ & \text{si } y > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \alpha_- & \text{si } y < 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Il reste à savoir si on peut choisir les constantes α_+ et α_- de manière à prolonger continûment un tel f à la demi-droite $(x, 0)$ avec $x > 0$. Ceci est possible car (x étant positif)

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f(x, y) = -\frac{\pi}{2} + \alpha_+ \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} f(x, y) = \frac{\pi}{2} + \alpha_-.$$

Il suffit donc de choisir $\alpha_+ = \alpha_- + \pi$ et on aura bien que

$$f(x, y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + (\alpha_- + \pi) & \text{si } y > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \alpha_- + \frac{\pi}{2} & \text{si } y = 0 \text{ et } x > 0 \\ -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \alpha_- & \text{si } y < 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

est un potentiel $C^1(\Omega_3)$ (cf. Exercice 3.12) de F , $\alpha_- \in \mathbb{R}$ étant une constante arbitraire.

Remarque Noter qu'on peut écrire de manière équivalente (si on choisit $\alpha_- = 0$ et c'est cette version qu'on utilisera au Chapitre 8)

$$f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R} \\ \pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x < 0 \text{ et } y > 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0. \end{cases}$$

Cas 4. $(x, y) \in \Omega_4$. La même analyse que précédemment ne nous permet pas de définir continûment f sur $y = 0$ quand $x < 0$ car on aurait alors

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} [f(x, y)] = \frac{\pi}{2} + \alpha_- + \pi = \alpha_- + \frac{3\pi}{2}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} [f(x, y)] = -\frac{\pi}{2} + \alpha_-$$

et ceci est impossible. Donc F ne dérive pas d'un potentiel sur Ω_4 . Montrons ceci différemment (en anticipant les résultats de la section suivante). Soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \Omega_4$. On a alors

$$\int_{\Gamma} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \langle (-\sin \theta, \cos \theta); (-\sin \theta, \cos \theta) \rangle d\theta = 2\pi \neq 0.$$

Au vu du Théorème 3.8 on a ainsi montré que F ne dérive pas d'un potentiel sur Ω_4 . ♠

3.2 Quelques notions topologiques

On commence par rappeler les notions suivantes

Définition 3.4 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(i) On dit que Ω est convexe (cf. Figure 3.1) si, $\forall t \in [0, 1]$, $\forall x, y \in \Omega$, on a

$$(1-t)x + ty \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad [x, y] \subset \Omega$$

(en termes géométriques ceci se traduit par $\forall x, y \in \Omega$, alors le segment de droite, noté $[x, y]$, joignant x à y est entièrement contenu dans Ω).

(ii) On dit que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est étoilé s'il existe $a \in \Omega$ (on dit alors que Ω est étoilé par rapport à a) tel que

$$[a, x] \subset \Omega, \quad \forall x \in \Omega.$$

(iii) On dit que Ω est connexe (cf. Figure 3.1) si chaque fois que

$$\Omega = X \cup Y \quad \text{avec} \quad X, Y \text{ ouverts (relativement à } \Omega) \quad \text{et} \quad X \cap Y = \emptyset$$

alors $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$.

(iv) On dit que Ω est connexe par arcs si, $\forall x, y \in \Omega$, il existe une fonction continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$, joignant $x = \gamma(0)$ à $y = \gamma(1)$ qui est entièrement contenue dans Ω .

Remarque (i) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. On rappelle qu'un ensemble U est dit *ouvert* dans Ω (ou *ouvert relativement à* Ω) s'il existe $W \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert (dans \mathbb{R}^n) tel que

$$U = W \cap \Omega.$$

En particulier Ω est ouvert relativement à lui même.

(ii) On dit parfois que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un *domaine* s'il est à la fois ouvert et connexe.

Proposition 3.5 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(i) Si $n = 1$, alors

$$\begin{array}{ccccc} \text{convexe} & \Leftrightarrow & \text{étoilé} & \Leftrightarrow & \text{connexe par arcs} \\ & & \Leftrightarrow & & \text{connexe} \Leftrightarrow \text{intervalle.} \end{array}$$

(ii) Si $n \geq 2$, alors

$$\begin{array}{ccccccc} \text{convexe} & \Rightarrow & \text{étoilé} & \Rightarrow & \text{connexe par arcs} & \Rightarrow & \text{connexe.} \\ & \nLeftarrow & & \nLeftarrow & & \nLeftarrow & \end{array}$$

(iii) Si de plus Ω est ouvert, alors

$$\text{connexe par arcs} \Leftrightarrow \text{connexe.}$$

De plus dans ce cas, les fonctions γ intervenant dans la définition de connexe par arcs peuvent être prises C^∞ et pas seulement continues.

Démonstration Ceci est vu en topologie, mais voici, quand même, quelques indications.

(i) Sans démonstration, cf. Fleming [13] Proposition 2.11 page 57.

(ii) La seule implication qui ne soit pas triviale est

$$\text{connexe par arcs} \Rightarrow \text{connexe.}$$

- Commençons par $\text{connexe par arcs} \Rightarrow \text{connexe}$. Supposons que Ω ne soit pas connexe, on peut alors trouver des ouverts $X \neq \emptyset$ et $Y \neq \emptyset$ tels que

$$\Omega = X \cup Y \quad \text{et} \quad X \cap Y = \emptyset.$$

On raisonne par contradiction. On peut alors trouver $x \in X$, $y \in Y$ et une fonction continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$, joignant $x = \gamma(0)$ à $y = \gamma(1)$ qui est entièrement contenue dans Ω . Comme γ est continue, on a que

$$A = \gamma^{-1}(X) \cap [0, 1] \quad \text{et} \quad B = \gamma^{-1}(Y) \cap [0, 1]$$

sont ouverts relativement à $[0, 1]$, ils sont non vide (car $0 = \gamma^{-1}(x) \in \gamma^{-1}(X)$ et $1 = \gamma^{-1}(y) \in \gamma^{-1}(Y)$). De plus

$$[0, 1] = A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B = \emptyset;$$

(clairement $A \cap B = \emptyset$, de plus $[0, 1] = A \cup B$ car si $t \in [0, 1]$ et $t \notin A$ alors $\gamma(t) \notin X$ et $\gamma(t) \in \Omega$ et donc $\gamma(t) \in Y$ ce qui est équivalent à $t \in \gamma^{-1}(Y)$) ce qui implique que $[0, 1]$ n'est pas connexe, contradiction.

- Comme contre exemple à l'implication précédente on peut prendre l'exemple suivant (cf. Fleming [13] page 58)

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad \text{où} \quad \Omega_1 = \{0\} \times [-1, 1] \quad \text{et} \quad \Omega_2 = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : x > 0 \right\}.$$

On peut montrer que Ω est connexe mais pas connexe par arcs (en fait il n'y a aucun chemin joignant $(0, 0) \in \Omega$ à un point de Ω_2).

(iii) Nous ne démontrerons pas, mais c'est standard, qu'un ouvert connexe est connexe par arcs. Par contre le fait qu'on puisse prendre des courbes lisses dans la définition résulte immédiatement de la Proposition 3.6 qui suit. ■

On a utilisé ci-dessus le résultat d'approximation suivant (ceci sera démontré explicitement aux exercices sur l'intégrale de Lebesgue, cf. Exercice 16.7) et que nous utiliserons à nouveau dans la démonstration du Théorème 3.8 qui est énoncé dans la section suivante.

Proposition 3.6 *Soit $f \in C([a, b]; \mathbb{R}^n)$. Alors il existe*

$$f_\nu \in C^\infty([a, b]; \mathbb{R}^n) \quad \text{avec} \quad f_\nu(a) = f(a) \quad \text{et} \quad f_\nu(b) = f(b)$$

telle que

$$f_\nu \rightarrow f \quad \text{uniformément quand} \quad \nu \rightarrow \infty.$$

En particulier si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et si

$$\Gamma = f([a, b]) \subset \Omega$$

alors pour ν suffisamment grand on a aussi

$$\Gamma_\nu = f_\nu([a, b]) \subset \Omega.$$

Pour les champs qui dérivent d'un potentiel la bonne notion est la suivante.

Définition 3.7 *On dit que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est simplement connexe (cf. Figure 3.1) (s'il est connexe par arcs et) si*

$$\gamma_0 : [a, b] \rightarrow \Omega \quad \text{et} \quad \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$$

sont continues avec

$$\gamma_0(a) = \gamma_1(a) \quad \text{et} \quad \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$$

alors il existe

$$\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$$

continue, telle que

$$\begin{aligned} \gamma(t, 0) &= \gamma_0(t), \quad \gamma(t, 1) = \gamma_1(t), \quad \forall t \in [a, b] \\ \gamma(a, s) &= \gamma_0(a) = \gamma_1(a), \quad \forall s \in [0, 1] \\ \gamma(b, s) &= \gamma_0(b) = \gamma_1(b), \quad \forall s \in [0, 1] \\ \gamma(t, s) &\in \Omega, \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

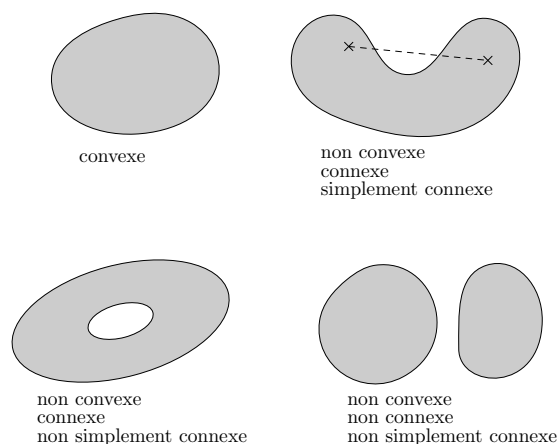


FIG. 3.1 –

Remarque (i) Par une proposition tout à fait analogue à Proposition 3.6, on peut se restreindre si Ω est ouvert et simplement connexe à considérer, sans perte de généralité, dans la Définition 3.7

$$\gamma \in C^\infty([a, b] \times [0, 1]; \Omega)$$

au lieu de seulement

$$\gamma \in C([a, b] \times [0, 1]; \Omega).$$

On aura besoin de ce résultat dans le Théorème 3.9.

(ii) Le cas $n = 1$ est un peu différent des cas $n \geq 2$. En effet la notion de connexité et convexité sont les mêmes (comme déjà vu), alors que la notion de connexité simple n'a plus d'intérêt.

(iii) On a toujours

$\Omega \text{ étoilé} \quad \Rightarrow \quad \Omega \text{ simplement connexe} \quad \Rightarrow \quad \Omega \text{ connexe.}$
$\quad \Leftarrow \quad \quad \quad \Leftarrow \quad$

(Attention, certains auteurs ne requièrent pas dans la définition de connexité simple que l'ensemble considéré soit connexe ou connexe par arcs. Dans ce cas on a que Ω simplement connexe n'implique plus que Ω soit connexe en général).

(iv) De façon intuitive un ensemble de \mathbb{R}^2 est simplement connexe s'il n'a pas de trous (attention, dans \mathbb{R}^3 ce n'est plus le cas, cf. Exemple (v) ci dessous).



Exemple Les exemples suivants sont les plus souvent utilisés.

(i) $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ et \mathbb{R} sont des ensembles convexes. Par contre $[0, 1] \cup [2, 3]$ n'est pas convexe.

(ii) $B_R(x) \subset \mathbb{R}^n$ et \mathbb{R}^n sont convexes (et donc simplement connexes et connexes).

(iii) $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ n'est ni convexe, ni simplement connexe mais par contre il est connexe par arcs et donc connexe.

(iv) $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ et } x \leq 0\}$ n'est pas convexe, mais il est simplement connexe (et donc connexe).

(v) $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ n'est pas convexe mais il est simplement connexe (et donc connexe).

(vi) $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ n'est ni convexe, ni simplement connexe, mais il est connexe par arcs et donc connexe. ♠

3.3 Intégrales curvilignes et champs qui dérivent d'un potentiel

Théorème 3.8 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et soit $F \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Les affirmations suivantes sont alors équivalentes.

(i) F dérive d'un potentiel sur Ω .

(ii) Soit $\gamma \in C_{\text{morc}}^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, telle que

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

alors

$$\int_{\gamma} F \cdot dl = 0.$$

(iii) Soient $\gamma_0, \gamma_1 \in C_{\text{morc}}^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$

$$\gamma_0 : [a, b] \rightarrow \Omega \quad \text{et} \quad \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$$

telles que

$$\gamma_0(a) = \gamma_1(a) \quad \text{et} \quad \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$$

alors

$$\int_{\gamma_0} F \cdot dl = \int_{\gamma_1} F \cdot dl.$$

Démonstration (i) \Rightarrow (ii) Soit $\gamma \in C_{\text{morc}}^1([a, b]; \Omega)$, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ telle que

$$\gamma(a) = \gamma(b).$$

Les intervalles de continuité de la dérivée sont donnés par

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{N+1} = b.$$

Comme F dérive d'un potentiel sur Ω , il existe $f \in C^1(\Omega)$ tel que

$$F(x) = \text{grad } f(x) = (f_{x_1}(x), \cdots, f_{x_n}(x)), \quad \forall x \in \Omega.$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} F \cdot dl &= \sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle F(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle dt \\
 &= \sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle \text{grad } f(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle dt = \sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] dt \\
 &= \sum_{i=0}^N [f(\gamma(a_{i+1})) - f(\gamma(a_i))] = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0.
 \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (iii) Soient $\gamma_0, \gamma_1 \in C_{morc}^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$

$$\gamma_0 : [a, b] \rightarrow \Omega \quad \text{et} \quad \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$$

telles que

$$\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = p \quad \text{et} \quad \gamma_0(b) = \gamma_1(b) = q$$

On définit $\delta \in C_{morc}^1([a, 2b-a]; \mathbb{R}^n)$

$$\delta : [a, 2b-a] \rightarrow \Omega$$

par

$$\delta(t) = \begin{cases} \gamma_0(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \gamma_1(2b-t) & \text{si } t \in [b, 2b-a]. \end{cases}$$

Noter que

$$\delta = \gamma_0 \oplus (-\gamma_1)$$

et que c'est une paramétrisation C_{morc}^1 (car $\delta(b) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b) = q$) et

$$\delta(a) = \gamma_0(a) = p \quad \text{et} \quad \delta(2b-a) = \gamma_1(a) = p.$$

En appliquant (ii) on a

$$\int_{\delta} F \cdot dl = 0$$

et comme

$$\int_{\delta} F \cdot dl = \int_{\gamma_0} F \cdot dl - \int_{\gamma_1} F \cdot dl.$$

on a le résultat.

(iii) \Rightarrow (i) Fixons $p \in \Omega$ et définissons, pour tout $x \in \Omega$, une courbe $\gamma_x \in C_{morc}^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ joignant p à x (une telle courbe existe car Ω est ouvert et connexe par arcs et grâce à la Proposition 3.5 (iii) qui résulte de la Proposition 3.6),

$$\gamma_x : [a, b] \rightarrow \Omega, \quad \gamma_x(a) = p \quad \text{et} \quad \gamma_x(b) = x.$$

Puis on définit (ici on utilise (iii))

$$f(x) = \int_{\gamma_x} F \cdot dl.$$

On prétend que ceci est un potentiel pour F sur Ω . Il faut donc vérifier que, pour tout $x \in \Omega$,

$$f_{x_i}(x) = F^i(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Comme Ω est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$x + t h e_i \in \Omega, \quad |h| < \epsilon, \quad t \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n$$

où $\{e_1, \dots, e_n\}$ sont les vecteurs de la base canonique. On définit (pour h fixé comme ci-dessus)

$$\gamma_h : [0, 1] \rightarrow \Omega \quad \text{par} \quad \gamma_h(t) = x + t h e_i$$

et par conséquent $\delta = \gamma_x \oplus \gamma_h \in C_{morc}^1([a, b+1]; \mathbb{R}^n)$ (cf. Figure 3.2) est paramétrée par

$$\delta : [a, b+1] \rightarrow \Omega \quad \text{et} \quad \delta(t) = \begin{cases} \gamma_x(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \gamma_h(t-b) & \text{si } t \in [b, b+1]. \end{cases}$$

On a alors facilement (ici on utilise aussi (iii)) que

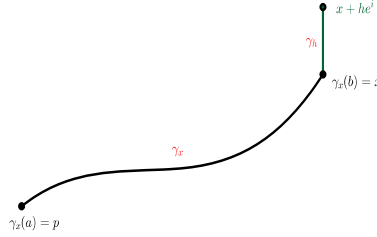


FIG. 3.2 –

$$\begin{aligned} f(x + h e_i) - f(x) &= \int_{\delta} F \cdot dl - \int_{\gamma_x} F \cdot dl \stackrel{\text{déf de } \delta}{=} \int_{\gamma_h} F \cdot dl \\ &= \int_0^1 \langle F(\gamma_h(t)); \gamma_h'(t) \rangle dt = h \int_0^1 \langle F(x + t h e_i); e_i \rangle dt \\ &= h \int_0^1 F^i(x + t h e_i) dt. \end{aligned}$$

En passant à la limite (ce qui est légal car F est continu) on trouve

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + h e_i) - f(x)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 F^i(x + t h e_i) dt = F^i(x).$$

On a donc

$$f_{x_i}(x) = F^i(x)$$

et comme les F^i sont continues, on a que $f \in C^1(\Omega)$ et

$$F(x) = \text{grad } f(x) = (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x)), \quad \forall x \in \Omega.$$

C'est ce que nous voulions démontrer. ■

3.4 Condition suffisante

Théorème 3.9 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert simplement connexe et $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ tel que

$$F_{x_j}^i(x) - F_{x_i}^j(x) = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \forall x \in \Omega. \quad (3.2)$$

Alors F dérive d'un potentiel sur Ω .

Remarque Pour une autre démonstration quand Ω est étoilé voir Exercice 3.9. ♠

Démonstration On va faire la démonstration sous l'hypothèse plus forte que les fonctions

$$\gamma : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega, \quad \gamma = \gamma(t, s),$$

qui apparaissent dans la définition de simplement connexe sont C^2 (cf. la remarque (i) qui suit la Définition 3.7).

En invoquant le Théorème 3.8, il suffit de montrer que pour tout $\gamma_0, \gamma_1 \in C^2([a, b]; \Omega)$ joignant deux points quelconques $p \in \Omega$ à $q \in \Omega$ alors

$$\int_{\gamma_0} F \cdot dl = \int_{\gamma_1} F \cdot dl.$$

On définit, pour le $\gamma = \gamma(t, s)$ qui apparaît dans la définition de simplement connexe,

$$\Phi(s) = \int_a^b \left\langle F(\gamma(t, s)); \frac{\partial \gamma}{\partial t}(t, s) \right\rangle dt = \int_a^b \left[\sum_{\nu=1}^n F^\nu(\gamma(t, s)) \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial t}(t, s) \right] dt.$$

On doit montrer que $\Phi(0) = \Phi(1)$; et pour ceci nous montrerons que $\Phi'(s) = 0$. Calculons donc la dérivée

$$\begin{aligned} \Phi'(s) &= \int_a^b \left[\sum_{\nu=1}^n F^\nu(\gamma(t, s)) \frac{\partial^2 \gamma_\nu}{\partial t \partial s}(t, s) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu, j=1}^n \frac{\partial F^\nu}{\partial x_j}(\gamma(t, s)) \frac{\partial \gamma_j}{\partial s}(t, s) \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial t}(t, s) \right] dt \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \Phi'(s) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{\nu=1}^n F^\nu(\gamma(t, s)) \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial s}(t, s) \right] dt \\ &\quad + \int_a^b \sum_{\nu, j=1}^n \frac{\partial F^\nu}{\partial x_j}(\gamma(t, s)) \left[\frac{\partial \gamma_j}{\partial s} \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial t} - \frac{\partial \gamma_j}{\partial t} \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial s} \right] dt. \end{aligned}$$

En réécrivant les choses différemment on s'aperçoit que

$$\sum_{\nu,j=1}^n \frac{\partial F^\nu}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \gamma_j}{\partial s} \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial t} - \frac{\partial \gamma_j}{\partial t} \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial s} \right] = \sum_{\nu,j=1}^n \left[\frac{\partial F^\nu}{\partial x_j} - \frac{\partial F^j}{\partial x_\nu} \right] \frac{\partial \gamma_j}{\partial s} \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial t}$$

et comme (3.2) a lieu, on a que

$$\begin{aligned} \Phi'(s) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{\nu=1}^n F^\nu(\gamma(t,s)) \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial s}(t,s) \right] dt \\ &= \sum_{\nu=1}^n \left[F^\nu(\gamma(b,s)) \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial s}(b,s) - F^\nu(\gamma(a,s)) \frac{\partial \gamma_\nu}{\partial s}(a,s) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

la dernière identité provenant du fait que

$$\begin{aligned} \gamma(a,s) &= \gamma_0(a) = \gamma_1(a), \quad \forall s \in [0,1] \Rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial s}(a,s) \equiv 0 \\ \gamma(b,s) &= \gamma_0(b) = \gamma_1(b), \quad \forall s \in [0,1] \Rightarrow \frac{\partial \gamma}{\partial s}(b,s) \equiv 0. \end{aligned}$$

Le résultat est donc démontré. ■

3.5 Exercices

De nombreux autres exercices concernant ce chapitre, notamment Exercices 2, 5, 6 et 7, se trouvent au Chapitre 3 de [9].

3.5.1 Exercices sur les notions topologiques

Exercice 3.1 Montrer qu'un ensemble convexe est connexe par arcs.

Exercice 3.2 Soient les ensembles

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x^2, x \neq 0\} \\ T &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Déterminer s'ils sont connexes ou non-connexes

3.5.2 Exercices sur les champs qui dérivent d'un potentiel

Exercice 3.3 Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \geq m+1$ et

$$F(x,y) = \left(x^{2m} y^{2n-2m+1} (x^2 + y^2)^{-n-1}, -x^{2m+1} y^{2n-2m} (x^2 + y^2)^{-n-1} \right).$$

- (i) Trouver le domaine de définition Ω de F .
- (ii) Calculer le rotationnel de F .
- (iii) F dérive-t-il d'un potentiel sur Ω ? Si oui trouver un potentiel, si non justifier votre réponse.

Exercice 3.4 Soient $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 , $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$F(x) = f(|x|)x$$

où $|x|^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2$.

- (i) Calculer $\operatorname{div} F$ et $\operatorname{rot} F$.
- (ii) Pour quel f a-t-on $\operatorname{div} F = 0$?
- (iii) Le champ F dérive-t-il d'un potentiel sur Ω ? Si oui trouver ce potentiel, sinon justifier votre réponse.

Exercice 3.5 Soient $n \geq 1$ un entier et

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2)^n}, \frac{y}{(x^2 + y^2)^n} \right).$$

- (i) Trouver le domaine de définition Ω de F . Dire s'il est connexe et s'il est simplement connexe.
- (ii) Calculer le rotationnel de F .
- (iii) F dérive-t-il d'un potentiel sur Ω ? Si oui trouver un potentiel, si non justifier votre réponse.

Exercice 3.6 Soit

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(z^2 + 1)(x^2 + y^2)^2}, \frac{y}{(z^2 + 1)(x^2 + y^2)^2}, \frac{z}{(z^2 + 1)^2(x^2 + y^2)} \right).$$

- (i) Trouver le domaine de définition Ω de F . L'ensemble Ω est-il simplement connexe?
- (ii) Calculer le rotationnel de F .
- (iii) F dérive-t-il d'un potentiel sur Ω ? Si oui trouver un potentiel, si non justifier votre réponse.

Exercice 3.7 Soit

$$F(x, y, z) = \left(\begin{array}{l} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x}{(x^2 + z^2)^2} \\ \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y}{(y^2 + z^2)^2} \\ \frac{z}{(x^2 + z^2)^2} + \frac{z}{(y^2 + z^2)^2} \end{array} \right).$$

- (i) Trouver le domaine de définition Ω de F . L'ensemble Ω est-il simplement connexe?
- (ii) Calculer le rotationnel de F .
- (iii) F dérive-t-il d'un potentiel sur Ω ? Si oui trouver un potentiel, si non justifier votre réponse.

Exercice 3.8 Soient $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ et

$$F(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, f(x, y, z) \right).$$

(i) Trouver le domaine de définition Ω de F . L'ensemble Ω est-il simplement connexe ?

(ii) Trouver f , le plus général possible, pour que $\operatorname{rot} F = 0$ et $\operatorname{div} F = 0$.

(iii) Le champ F trouvé à la question (ii) dérive-t-il d'un potentiel sur Ω ? Si oui trouver un potentiel, si non justifier votre réponse.

Exercice 3.9 (voir aussi Exercice 2 du Chapitre 3 de [9]) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert étoilé par rapport à x_0 . Soit $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$

$$F = F(u) = (F^1(u), \dots, F^n(u))$$

satisfaisant, pour tout $x \in \Omega$,

$$\frac{\partial F^i}{\partial u_j}(x) = \frac{\partial F^j}{\partial u_i}(x), \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Soit enfin

$$f(x) = \int_0^1 \langle F(x_0 + t(x - x_0)); x - x_0 \rangle dt.$$

Montrer que $F = \operatorname{grad} f$ dans Ω .

Exercice 3.10 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ouvert étoilé par rapport à l'origine et $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$\operatorname{div} F = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

On dénote le produit vectoriel par \wedge , ce qui veut dire que si $x, y \in \mathbb{R}^3$, alors

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Soit l'application

$$\Phi(x) = \int_0^1 [F(tx) \wedge x] t dt = \left(\int_0^1 [F(tx) \wedge x]^i t dt \right)_{i=1,2,3} \quad x \in \Omega.$$

Montrer que

$$F = \operatorname{rot} \Phi \quad \text{dans } \Omega.$$

Indication. S'inspirer de l'Exercice 3.9.

Exercice 3.11 Généraliser l'Exercice 3.10 de la manière suivante. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $F \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

$$F = F(x) = (F^1(x), \dots, F^n(x))$$

tel que $\operatorname{div} F = 0$. On définit, pour tout $1 \leq i, j \leq n$,

$$\Phi^{ij}(x) = \int_0^1 [F^j(tx) x_i - F^i(tx) x_j] t^{n-2} dt.$$

Etablir que

$$F^j(x) = \sum_{i=1(i \neq j)}^n \Phi_{x_i}^{ij}(x).$$

Suggestion. On montrera tout d'abord que

$$\sum_{i=1(i \neq j)}^n \Phi_{x_i}^{ij}(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [t^{n-1} F^j(tx)] dt.$$

Exercice 3.12 Soient (cf. Exemple 3.3)

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$$

$$\Omega_3 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \text{ et } y = 0\}$$

et

$$f(x, y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \pi & \text{si } y > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } y = 0 \text{ et } x > 0 \\ -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} & \text{si } y < 0 \text{ et } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Montrer que $f \in C^1(\Omega_3)$.

3.6 Corrigés

Exercice 3.1 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ convexe et $x, y \in \Omega$ et définissons $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\alpha(t) = (1-t)x + ty.$$

Comme Ω est convexe, alors

$$\alpha([0, 1]) = [x, y] \subset \Omega$$

et donc Ω est connexe par arc. ♠

Exercice 3.2 (i) Les ensembles

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x, x > 0\} \quad \text{et} \quad S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq -x, x < 0\}$$

sont ouverts dans S ; en effet

$$S_1 = S \cap \{x > 0\} \quad \text{et} \quad S_2 = S \cap \{x < 0\}.$$

De plus, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ et $S = S_1 \cup S_2$. Par conséquent S n'est pas connexe.

(ii) Les ensembles

$$T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 = 1, y > 0\}$$

et

$$T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 = 1, y < 0\}$$

sont ouverts dans T ; en effet

$$T_1 = T \cap \{y > 0\} \quad \text{et} \quad T_2 = T \cap \{y < 0\}.$$

De plus, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ et $T = T_1 \cup T_2$. Par conséquent T n'est pas connexe. ♠

Exercice 3.3 (i) Le domaine de définition Ω de F est

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

qui n'est pas simplement connexe.

(ii) Un calcul direct donne que si $F(x, y) = (F^1(x, y), F^2(x, y))$, alors

$$F_x^2 = F_y^1 = x^{2m} y^{2n-2m} (x^2 + y^2)^{-n-2} [(2n - 2m + 1)x^2 - (2m + 1)y^2]$$

et donc $\text{rot } F = 0$.

(iii) Soit γ le cercle unité. On trouve tout de suite que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) \cdot (-\sin \theta, \cos \theta) d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} (\cos \theta)^{2m} (\sin \theta)^{2n-2m} d\theta < 0 \end{aligned}$$

et donc F ne dérive pas d'un potentiel sur Ω . ♠

Exercice 3.4 (i) On a

$$\frac{\partial F^i}{\partial x_j} = f(|x|) \delta_{ij} + f'(|x|) \frac{x_i x_j}{|x|}$$

et donc

$$\text{div } F = 3f(|x|) + f'(|x|)|x| \quad \text{et} \quad \text{rot } F = 0.$$

(ii) Ainsi $\operatorname{div} F = 0$ est équivalent à $3f(t) + f'(t)t = 0$ et donc à

$$f(t) = \frac{\lambda}{t^3} \Rightarrow F(x) = \lambda \frac{x}{|x|^3}.$$

(iii) Si on appelle $\varphi'(t) = tf(t)$ et $\Phi(x) = \varphi(|x|)$, on a bien

$$F(x) = \operatorname{grad} \Phi(x) = f(|x|)x. \quad \spadesuit$$

Exercice 3.5 (i) Le domaine de définition est

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$$

qui est connexe mais pas simplement connexe.

(ii) On a

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F &= \frac{\partial}{\partial y} \left[x(x^2 + y^2)^{-n} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[y(x^2 + y^2)^{-n} \right] \\ &= x \left[-2ny(x^2 + y^2)^{-n-1} \right] - y \left[-2nx(x^2 + y^2)^{-n-1} \right] = 0. \end{aligned}$$

(iii) On cherche f tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x(x^2 + y^2)^{-n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y(x^2 + y^2)^{-n}.$$

On a donc

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{2(1-n)} (x^2 + y^2)^{1-n} & \text{si } n \geq 2. \end{cases} \quad \spadesuit$$

Exercice 3.6 (i) Le domaine de définition est

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$$

qui n'est pas simplement connexe.

(ii) On trouve

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{(z^2+1)(x^2+y^2)^2} & \frac{y}{(z^2+1)(x^2+y^2)^2} & \frac{z}{(z^2+1)^2(x^2+y^2)} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) F dérive bien d'un potentiel sur Ω , car

$$f(x, y, z) = \frac{-1}{2(z^2 + 1)(x^2 + y^2)} + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$, est bien tel que

$$F = \operatorname{grad} f \quad \text{dans } \Omega. \quad \spadesuit$$

Exercice 3.7 (i) Le domaine de définition est

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus [\{x = y = 0\} \cup \{x = z = 0\} \cup \{y = z = 0\}]$$

qui n'est pas simplement connexe.

(ii) On trouve

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x}{(x^2+z^2)^2} & \frac{y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y}{(y^2+z^2)^2} & \frac{z}{(x^2+z^2)^2} + \frac{z}{(y^2+z^2)^2} \end{vmatrix}$$

et donc $\operatorname{rot} F = 0$.

(iii) F dérive bien d'un potentiel sur Ω , car

$$f(x, y, z) = \frac{-1}{2} \left[\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{x^2 + z^2} + \frac{1}{y^2 + z^2} \right] + C,$$

où $C \in \mathbb{R}$, est bien tel que

$$F = \operatorname{grad} f \quad \text{dans } \Omega. \quad \spadesuit$$

Exercice 3.8 (i) Le domaine de définition est

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$$

qui n'est pas simplement connexe ; par contre il est connexe.

(ii) On trouve $\operatorname{div} F = f_z$ et

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & f(x, y, z) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} f_y \\ -f_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent si l'on souhaite que $\operatorname{rot} F = 0$ et $\operatorname{div} F = 0$, il faut que $f = c$ une constante.

(iii) F ne dérive pas d'un potentiel sur Ω , car si on considère, par exemple, la courbe

$$\Gamma = \{\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) : \theta \in [0, 2\pi]\}$$

on trouve que

$$\int_{\Gamma} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \langle (-\sin \theta, \cos \theta, c) ; (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \rangle d\theta = 2\pi \neq 0.$$

Noter que le calcul précédent montre que le champ F ne dérive pas d'un potentiel indépendamment de f . \spadesuit

Exercice 3.9 Notons par la suite

$$\gamma(t, x) = (\gamma_t^1, \dots, \gamma_t^n) = x_0 + t(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \gamma_t(t, x) = x - x_0 \\ \frac{\partial \gamma^i}{\partial x_j} = \gamma_{x_j}^i(t, x) = t \delta_j^i. \end{cases}$$

On observe que, pour tout $j = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial}{\partial t} [t F^j(\gamma(t, x))] = F^j(\gamma(t, x)) + t \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^j}{\partial u_i}(\gamma(t, x)) \gamma_t^i(t, x).$$

De plus

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{i=1}^n F^i(\gamma(t, x)) \gamma_t^i(t, x) \right] &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial u_k} \gamma_{x_j}^k \gamma_t^i + \sum_{i=1}^n F^i \gamma_{t x_j}^i \\ &= F^j(\gamma(t, x)) + t \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial u_j}(\gamma(t, x)) \gamma_t^i(t, x). \end{aligned}$$

Comme $\partial F^i / \partial u_j = \partial F^j / \partial u_i$ on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{i=1}^n F^i(\gamma(t, x)) \gamma_t^i(t, x) \right] &= F^j(\gamma(t, x)) + t \sum_{i=1}^n \frac{\partial F^j}{\partial u_i}(\gamma(t, x)) \gamma_t^i(t, x) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [t F^j(\gamma(t, x))]. \end{aligned}$$

De la définition on obtient que

$$f(x) = \int_0^1 \langle F(\gamma(t, x)); \gamma_t(t, x) \rangle dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n F^i(\gamma(t, x)) \gamma_t^i(t, x) dt$$

on déduit alors, en utilisant les identités précédentes, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j} &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{i=1}^n F^i(\gamma(t, x)) \gamma_t^i(t, x) \right] dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} [t F^j(\gamma(t, x))] dt \\ &= t F^j(\gamma(t, x)) \Big|_0^1 = F^j(x). \quad \spadesuit \end{aligned}$$

Exercice 3.10 On note $y = (y_1, y_2, y_3)$,

$$\Phi = \Phi(x) = (\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3) \quad \text{et} \quad F = F(y) = (F^1, F^2, F^3).$$

On rappelle que

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 [F^2(tx) x_3 - F^3(tx) x_2] t dt \\ \int_0^1 [F^3(tx) x_1 - F^1(tx) x_3] t dt \\ \int_0^1 [F^1(tx) x_2 - F^2(tx) x_1] t dt \end{pmatrix}$$

et

$$\operatorname{rot} \Phi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \Phi^1 & \Phi^2 & \Phi^3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{x_2}^3 - \Phi_{x_3}^2 \\ \Phi_{x_3}^1 - \Phi_{x_1}^3 \\ \Phi_{x_1}^2 - \Phi_{x_2}^1 \end{pmatrix}.$$

On calcule la troisième composante de $\operatorname{rot} \Phi$

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \Phi)^3 &= \Phi_{x_1}^2 - \Phi_{x_2}^1 \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} [F^3(tx) x_1 - F^1(tx) x_3] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_2} [F^2(tx) x_3 - F^3(tx) x_2] \right] t dt \end{aligned}$$

et on trouve

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \Phi)^3 &= \int_0^1 [t F_{y_1}^3(tx) x_1 + F^3(tx) - t F_{y_1}^1(tx) x_3 \\ &\quad - t F_{y_2}^2(tx) x_3 + t F_{y_2}^3(tx) x_2 + F^3(tx)] t dt \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \Phi)^3 &= \int_0^1 [2t F^3(tx) - t^2 (F_{y_1}^1(tx) + F_{y_2}^2(tx)) x_3 \\ &\quad + t^2 (F_{y_1}^3(tx) x_1 + F_{y_2}^3(tx) x_2)] dt. \end{aligned}$$

L'hypothèse $\operatorname{div} F = 0$ implique que

$$F_{y_3}^3(tx) = - (F_{y_1}^1(tx) + F_{y_2}^2(tx))$$

et par conséquent

$$(\operatorname{rot} \Phi)^3 = \int_0^1 [2t F^3(tx) + t^2 F_{y_3}^3(tx) x_3 + t^2 (F_{y_1}^3(tx) x_1 + F_{y_2}^3(tx) x_2)] dt$$

Ceci nous conduit finalement à

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \Phi)^3(x) &= \int_0^1 [2t F^3(tx) + t^2 \langle \nabla F^3(tx); x \rangle] dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t^2 F^3(tx)] dt = F^3(x). \end{aligned}$$

On montre de manière similaire que $(\operatorname{rot} \Phi)^1 = F^1$ et $(\operatorname{rot} \Phi)^2 = F^2$. ♠

Exercice 3.11 On a immédiatement que

$$\Phi_{x_i}^{ij}(x) = \int_0^1 [F^j(tx) + t F_{x_i}^j(tx) x_i - t F_{x_i}^i(tx) x_j] t^{n-2} dt.$$

On infère de ceci que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1(i \neq j)}^n \Phi_{x_i}^{ij}(x) &= \int_0^1 [(n-1) F^j(tx) \\ &\quad + t \left(\sum_{i=1(i \neq j)}^n F_{x_i}^j(tx) x_i - x_j \sum_{i=1(i \neq j)}^n F_{x_i}^i(tx) \right)] t^{n-2} dt. \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{div} F = 0$ on obtient que

$$\sum_{i=1(i \neq j)}^n F_{x_i}^i(tx) = -F_{x_j}^j(tx)$$

et donc

$$\sum_{i=1(i \neq j)}^n F_{x_i}^j(tx) x_i - x_j \sum_{i=1(i \neq j)}^n F_{x_i}^i(tx) = \sum_{i=1}^n F_{x_i}^j(tx) x_i.$$

On a ainsi trouvé que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1(i \neq j)}^n \Phi_{x_i}^{ij}(x) &= \int_0^1 \left[(n-1) F^j(tx) + t \left(\sum_{i=1}^n F_{x_i}^j(tx) x_i \right) \right] t^{n-2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t^{n-1} F^j(tx)] dt = F^j(x). \quad \spadesuit \end{aligned}$$

Exercice 3.12 On a clairement que $f \in C^1(\Omega_1) \cap C^1(\Omega_2)$, il suffit donc d'étudier ce qui se passe sur la demi droite

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y = 0\}.$$

On voit immédiatement que, pour $\bar{x} > 0$ et $y \neq 0$,

$$\lim_{y \rightarrow 0} |f(\bar{x}, y) - f(\bar{x}, 0)| = 0.$$

(i) Etudions maintenant la continuité dans toutes les directions. Soit $(\bar{x}, 0) \in D$. Soit $x > 0$ tel que

$$|x - \bar{x}| \leq \frac{\bar{x}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{x}}{2} \leq x \leq \frac{3\bar{x}}{2}$$

et soit $0 < |y| \leq \bar{x}$. Comme alors $(x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ on a que

$$f(x, y) - f(\bar{x}, y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [f((1-t)\bar{x} + tx, y)] dt.$$

Par ailleurs on a immédiatement que

$$(1-t)\bar{x} + tx \geq \frac{\bar{x}}{2}$$

et donc, pour $t \in [0, 1]$,

$$|f_x((1-t)\bar{x} + tx, y)| = \left| \frac{-y}{((1-t)\bar{x} + tx)^2 + y^2} \right| \leq \frac{|y|}{(\bar{x}/2)^2} \leq \frac{4}{\bar{x}}.$$

On a, par conséquent, l'estimation suivante, pour x et y comme ci-dessus,

$$|f(x, y) - f(\bar{x}, y)| \leq |x - \bar{x}| \int_0^1 |f_x((1-t)\bar{x} + tx, y)| dt \leq \frac{4}{\bar{x}} |x - \bar{x}|.$$

On déduit donc que si $y \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(\bar{x}, 0)| &\leq |f(x, y) - f(\bar{x}, y)| + |f(\bar{x}, y) - f(\bar{x}, 0)| \\ &\leq \frac{4}{\bar{x}} |x - \bar{x}| + |f(\bar{x}, y) - f(\bar{x}, 0)|. \end{aligned}$$

Noter que si $y = 0$, on a que $f(x, 0) - f(\bar{x}, 0) = 0$ et donc l'inégalité a aussi trivialement lieu dans ce cas. On infère finalement que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (\bar{x}, 0)} |f(x, y) - f(\bar{x}, 0)| \leq \frac{4}{\bar{x}} \lim_{x \rightarrow \bar{x}} |x - \bar{x}| + \lim_{y \rightarrow 0} |f(\bar{x}, y) - f(\bar{x}, 0)| = 0.$$

On a donc bien montré la continuité sur la demi droite D .

(ii) Pour la continuité des dérivées f_x et f_y c'est automatique car dans $\Omega_1 \cup \Omega_2$ on a

$$(f_x, f_y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

qui sont clairement continues sur la demi droite D . ♠

Chapitre 4

Théorème de Green

4.1 Le théorème et ses corollaires

Notation (Théorème de Jordan) Si $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ est une courbe simple fermée on notera par $\text{int } \Gamma = \Omega$ l'ensemble ouvert et borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\partial\Omega = \Gamma$. ♠

Définition 4.1 On dit qu'une courbe simple fermée régulière par morceaux $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, de paramétrisation $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$, est orientée positivement, (cf. Figure 4.1) si en tout point $x \in \Gamma$, $x = \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, où γ est C^1 , le vecteur normal à la courbe en x ,

$$\nu(x) = (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)),$$

est une normale extérieure à $\Omega = \text{int } \Gamma$ (où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est tel que $\partial\Omega = \Gamma$); c'est-à-dire que $\forall \epsilon > 0$ suffisamment petit

$$x + \epsilon \nu(x) \in \overline{\Omega}^c, \quad x - \epsilon \nu(x) \in \Omega.$$

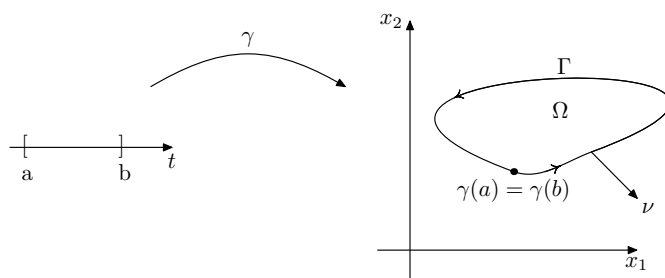


FIG. 4.1 –

Remarque Une façon plus simple, mais moins précise, de dire qu'une courbe Γ est orientée positivement c'est de dire qu'en se déplaçant sur Γ on doit avoir le domaine $\Omega = \text{int } \Gamma$ à gauche. ♠

Définition 4.2 (i) On dit que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine régulier (cf. Figure 4.2) s'il existe $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_m \subset \mathbb{R}^2$ des ouverts bornés tels que

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^m \overline{\Omega}_j \\ \overline{\Omega}_j &\subset \Omega_0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m \\ \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j &= \emptyset \quad \text{si } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, m \\ \partial\Omega_j &= \Gamma_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m\end{aligned}$$

où les Γ_j sont des courbes simples fermées régulières par morceaux.

(ii) On dit que $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$ est orienté positivement si le sens de parcours sur chacun des Γ_j , $j = 0, 1, \dots, m$, laisse le domaine Ω à gauche.

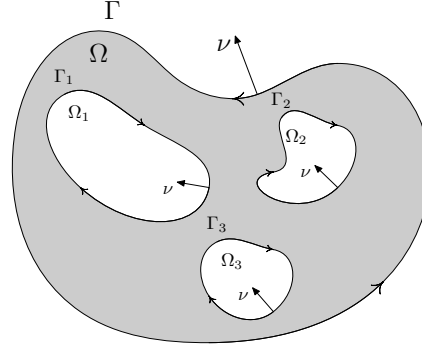


FIG. 4.2 –

Remarque La définition de l'orientation de $\partial\Omega$ est intuitive, une définition précise se trouve ci-dessus. En particulier le sens de parcours de Γ_0 doit être le sens positif mais le sens de parcours sur $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ est le sens négatif. ♠

Théorème 4.3 (Théorème de Green) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord $\partial\Omega$ est orienté positivement. Soit

$$F = F(x_1, x_2) = (F^1(x_1, x_2), F^2(x_1, x_2))$$

avec $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ alors

$$\iint_{\Omega} \text{rot } F(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} (F_{x_1}^2 - F_{x_2}^1) dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} F \cdot dl.$$

En particulier si $F^1 = 0$, respectivement $F^2 = 0$, alors

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} F_{x_1}^2 dx_1 dx_2 &= \int_{\partial\Omega} (0, F^2) \cdot dl \\ \iint_{\Omega} F_{x_2}^1 dx_1 dx_2 &= - \int_{\partial\Omega} (F^1, 0) \cdot dl.\end{aligned}$$

Exemple Soient $F(x_1, x_2) = ((x_2)^2, x_1)$

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1 \right\}.$$

Vérifier le Théorème de Green.

Discussion (i) Calcul de $\iint_{\Omega} \text{rot } F dx_1 dx_2$. On vérifie facilement que $\text{rot } F = 1 - 2x_2$. En posant $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, on obtient

$$\iint_{\Omega} \text{rot } F dx_1 dx_2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - 2r \sin \theta) r dr d\theta = \pi.$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Omega} F \cdot dl$. On pose $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ et on a alors

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \langle (\sin^2 \theta, \cos \theta); (-\sin \theta, \cos \theta) \rangle d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi. \quad \spadesuit$$

Exemple Soient $F(x_1, x_2) = ((x_1)^2 x_2, 2x_1 x_2)$ et

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 < (x_1)^2 + (x_2)^2 < 4 \right\}.$$

Vérifier le Théorème de Green.

Discussion (i) Calcul de $\iint_{\Omega} \text{rot } F dx_1 dx_2$. On trouve que

$$\text{rot } F = F_{x_1}^2 - F_{x_2}^1 = 2x_2 - (x_1)^2$$

et donc, en passant aux coordonnées polaires,

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \text{rot } F dx_1 dx_2 &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} (2r \sin \theta - r^2 \cos^2 \theta) r dr d\theta \\ &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} -r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = -\pi \int_1^2 r^3 dr = -\frac{15}{4} \pi.\end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Omega} F \cdot dl$. On pose

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$$

$$\Gamma_2 = \{\gamma_2(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$$

et on obtient

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \int_{\Gamma_2} F \cdot dl - \int_{\Gamma_1} F \cdot dl.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \langle (8 \cos^2 \theta \sin \theta, 8 \cos \theta \sin \theta); (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta) \rangle d\theta \\ &= -16 \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta \\ &= -16 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = -4\pi \\ \int_{\Gamma_1} F \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \langle (\cos^2 \theta \sin \theta, \cos \theta \sin \theta); (-\sin \theta, \cos \theta) \rangle d\theta = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

et donc finalement

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = -\frac{15}{4} \pi. \spadesuit$$

Corollaire 4.4 (Théorème de la divergence dans le plan) Soient Ω , $\partial\Omega$ comme dans le théorème et $\Phi \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$. Soit ν un champ de normales extérieures unité à $\partial\Omega$, alors

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \Phi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} (\Phi_{x_1}^1 + \Phi_{x_2}^2) dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \langle \Phi; \nu \rangle dl$$

ou plus précisément

$$\iint_{\Omega} \Phi_{x_1}^1 dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \Phi^1 \nu_1 dl \quad \text{et} \quad \iint_{\Omega} \Phi_{x_2}^2 dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} \Phi^2 \nu_2 dl.$$

Démonstration On va faire la démonstration seulement dans le cas où Ω n'a pas de trous et $\partial\Omega$ est une courbe simple fermée régulière de paramétrisation

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \partial\Omega, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)).$$

On a vu que le vecteur normal extérieur unité est donné par

$$\nu(x) = \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{|\gamma'(t)|}.$$

Par ailleurs on pose

$$F^1 = -\Phi^2 \quad \text{et} \quad F^2 = \Phi^1$$

et on observe que

$$\operatorname{div} \Phi = \operatorname{rot} F.$$

On applique le Théorème de Green à F et on a donc

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} \operatorname{div} \Phi \, dx_1 \, dx_2 &= \iint_{\Omega} \operatorname{rot} F \, dx_1 \, dx_2 = \int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \int_a^b \langle F(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle \, dt \\
 &= \int_a^b [F^1(\gamma_1, \gamma_2) \gamma'_1 + F^2(\gamma_1, \gamma_2) \gamma'_2] \, dt \\
 &= \int_a^b \left[F^1(\gamma_1, \gamma_2) \frac{\gamma'_1}{|\gamma'(t)|} + F^2(\gamma_1, \gamma_2) \frac{\gamma'_2}{|\gamma'(t)|} \right] |\gamma'(t)| \, dt \\
 &= \int_a^b [\Phi^1 \nu_1 + \Phi^2 \nu_2] |\gamma'(t)| \, dt = \int_{\partial\Omega} \langle \Phi; \nu \rangle \, dl.
 \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. ■

Remarque Le théorème de Green et le théorème de la divergence nous permettent d'expliquer la terminologie : rotationnel et divergence. En effet soit $\Omega = B_r(\bar{x})$ le disque centré en \bar{x} et de rayon r .

(i) Interprétation du terme "rotationnel" :

$$\operatorname{rot} F(\bar{x}) = \lim_{\operatorname{Aire}(\Omega) \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\operatorname{Aire}(\Omega)} \iint_{\Omega} \operatorname{rot} F \right] = \lim_{\operatorname{Aire}(\Omega) \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\operatorname{Aire}(\Omega)} \int_{\partial\Omega} F \cdot dl \right].$$

(ii) Interprétation du terme "divergence" :

$$\operatorname{div} F(\bar{x}) = \lim_{\operatorname{Aire}(\Omega) \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\operatorname{Aire}(\Omega)} \iint_{\Omega} \operatorname{div} F \right] = \lim_{\operatorname{Aire}(\Omega) \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\operatorname{Aire}(\Omega)} \int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle \, dl \right]. \spadesuit$$

Corollaire 4.5 Soient Ω et $\partial\Omega$ comme dans le théorème. Soient $F(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$, $G_1(x_1, x_2) = (0, x_1)$ et $G_2(x_1, x_2) = (-x_2, 0)$, alors

$$\operatorname{Aire}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \int_{\partial\Omega} G_1 \cdot dl = \int_{\partial\Omega} G_2 \cdot dl.$$

Démonstration Evident, une fois qu'on se rappelle que

$$\operatorname{Aire}(\Omega) = \iint_{\Omega} dx_1 \, dx_2.$$

Ceci termine la démonstration. ■

4.2 Démonstration du théorème

On conclut maintenant avec la démonstration du Théorème de Green. On ne fera la démonstration complète que dans un cas simple; puis on indiquera succinctement comment traiter des cas plus généraux. Pour une démonstration plus complète on peut se référer à [4] 363-364, [13] 360 ou [21] 436-445.

Définition 4.6 (i) On dit qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est x_2 -simple si il existe $a < b$ et

$$\alpha, \beta \in C^1([a, b])$$

tels que

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a < x_1 < b, \alpha(x_1) < x_2 < \beta(x_1)\}.$$

De même en intervertissant le rôle de x_1 et de x_2 on aura la notion d'ouvert Ω qui est x_1 -simple.

(ii) Si les fonctions sont seulement $C([a, b]) \cap C_{morc}^1([a, b])$, on dit alors que Ω est x_2 -simple (respectivement x_1 -simple) au sens généralisé.

Remarque (i) Le carré

$$\Omega =]-1, 1[)^2$$

est à la fois x_1 -simple et x_2 -simple ; car on peut choisir $\alpha = -1$ et $\beta = 1$, c'est à dire

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in]-1, 1[, -1 < x_2 < 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \in]-1, 1[, -1 < x_1 < 1\}. \end{aligned}$$

(ii) Le disque est à la fois x_1 -simple et x_2 -simple, mais au sens généralisé ; car

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1, \alpha(x_1) < x_2 < \beta(x_1)\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_2 < 1, \alpha(x_2) < x_1 < \beta(x_2)\} \end{aligned}$$

où $\alpha, \beta \in C([-1, 1]) \cap C^1(]-1, 1[)$ sont données par

$$\alpha(t) = -\sqrt{1-t^2} \quad \text{et} \quad \beta(t) = \sqrt{1-t^2}.$$

(iii) On rappelle (cf. Définition 2.2) que $f \in C([a, b]) \cap C_{morc}^1([a, b])$ si $f \in C([a, b])$ et s'il existe

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{N+1} = b$$

tels que, $\forall i = 0, \dots, N$, $f'|_{]a_i, a_{i+1}[}$ est continue et, $\forall i = 1, \dots, N-1$,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a_i \\ x > a_i}} f'(x) = f'(a_i + 0) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a_{i+1} \\ x < a_{i+1}}} f'(x) = f'(a_{i+1} - 0)$$

existent et sont finies ; par contre en $a_0 = a$ et $a_{N+1} = b$ la limite de la dérivée existe mais peut être infinie (comme c'est le cas quand on paramétrise le cercle en coordonnées Cartésiennes). ♠

Démonstration (Théorème 4.3). La démonstration du théorème se fera en quatre étapes dont seules les deux premières seront détaillées ; pour les autres nous indiquerons uniquement les idées principales. Les trois premières étapes

discutent le cas où il n'y a pas de trous, i.e. $\Omega_1 = \dots = \Omega_m = \emptyset$. La dernière traitant le cas général. De plus la démonstration, quand le domaine n'a pas de trous, se fera sous les conditions plus restrictives suivantes. Le domaine Ω est régulier et s'écrit comme

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \overline{U}_i$$

où $U_i, i = 1, \dots, N$, sont des ouverts x_1 -simple et x_2 -simple au sens généralisé et $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

Etape 1. On va tout d'abord démontrer le théorème dans le cas où Ω est un domaine régulier qui est aussi simultanément x_1 -simple et x_2 -simple. Plus précisément on va montrer que si Ω est x_2 -simple alors

$$\iint_{\Omega} F_{x_2}^1 dx_1 dx_2 = - \int_{\partial\Omega} (F^1, 0) \cdot dl.$$

De même en supposant que Ω est x_1 -simple on aura alors

$$\iint_{\Omega} F_{x_1}^2 dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} (0, F^2) \cdot dl.$$

La combinaison de ces deux résultats, donne le théorème. Comme les deux cas sont traités de la même façon, on ne montrera que le premier cas.

Etape 1.1. Calcul de $\iint_{\Omega} F_{x_2}^1$. On a donc

$$\iint_{\Omega} F_{x_2}^1 dx_1 dx_2 = \int_a^b \int_{\alpha(x_1)}^{\beta(x_1)} F_{x_2}^1 dx_2 dx_1$$

et par conséquent

$$\iint_{\Omega} F_{x_2}^1 dx_1 dx_2 = \int_a^b [F^1(x_1, \beta(x_1)) - F^1(x_1, \alpha(x_1))] dx_1. \quad (4.1)$$

Noter que le résultat précédent est vrai même si $\alpha, \beta \in C^0([a, b])$.

Etape 1.2. Calcul de $\int_{\partial\Omega} (F^1, 0) \cdot dl$. On a que si (cf. Figure 4.3)

$$\Gamma_{\alpha} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \alpha(x_1) \text{ avec } x_1 : a \rightarrow b\}$$

$$\Gamma_{\beta} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \beta(x_1) \text{ avec } x_1 : b \rightarrow a\}$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma_b &= \{(b, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x_2 : \alpha(b) \rightarrow \beta(b)\} \\ &= \{(b, t) \text{ avec } t \in [\alpha(b), \beta(b)]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_a &= \{(a, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } x_2 : \beta(a) \rightarrow \alpha(a)\} \\ &= \{(a, \alpha(a) + \beta(a) - t) \text{ avec } t \in [\alpha(a), \beta(a)]\} \end{aligned}$$

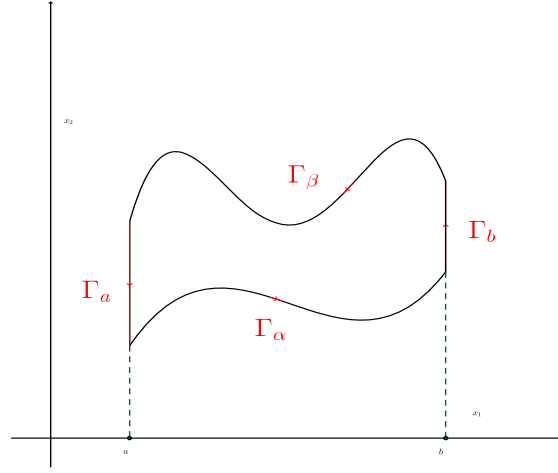


FIG. 4.3 –

alors $\partial\Omega$ et son sens de parcours sont donnés par

$$\partial\Omega = \Gamma_\alpha \cup \Gamma_b \cup \Gamma_\beta \cup \Gamma_a .$$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_\alpha} (F^1, 0) \cdot dl &= - \int_a^b \langle (F^1(x_1, \alpha(x_1)), 0); (1, \alpha'(x_1)) \rangle dx_1 \\ &= - \int_a^b F^1(x_1, \alpha(x_1)) dx_1 \\ - \int_{\Gamma_\beta} (F^1, 0) \cdot dl &= \int_a^b \langle (F^1(x_1, \beta(x_1)), 0); (1, \beta'(x_1)) \rangle dx_1 \\ &= \int_a^b F^1(x_1, \beta(x_1)) dx_1 . \end{aligned}$$

De même on obtient

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_b} (F^1, 0) \cdot dl &= - \int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} \langle (F^1(b, t), 0); (0, 1) \rangle dt = 0 \\ - \int_{\Gamma_a} (F^1, 0) \cdot dl &= - \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} \langle (F^1(a, \alpha(a) + \beta(a) - t), 0); (0, -1) \rangle dt = 0 . \end{aligned}$$

En combinant ces résultats, on a bien obtenu que

$$- \int_{\partial\Omega} (F^1, 0) \cdot dl = \int_a^b [F^1(x_1, \beta(x_1)) - F^1(x_1, \alpha(x_1))] dx_1$$

ce qui établit le théorème dans le cas particulier.

Etape 2. On se place toujours dans le cas où le domaine Ω est régulier, n'a pas de trous et est simultanément x_1 et x_2 -simple, mais cette fois-ci au sens généralisé. Comme dans l'Étape 1 nous allons uniquement montrer que si Ω est x_2 -simple, mais cette fois-ci

$$\alpha, \beta \in C([a, b]) \cap C_{morc}^1(]a, b[).$$

(au lieu de $\alpha, \beta \in C^1([a, b])$), alors

$$\iint_{\Omega} F_{x_2}^1 dx_1 dx_2 = - \int_{\partial\Omega} (F^1, 0) \cdot dl.$$

L'autre cas étant montré de manière analogue.

Etape 2.1. Commençons par établir le résultat quand

$$\alpha, \beta \in C_{morc}^1([a, b]).$$

Comme déjà observé on a toujours (4.1) à savoir

$$\iint_{\Omega} F_{x_2}^1 dx_1 dx_2 = \int_a^b [F^1(x_1, \beta(x_1)) - F^1(x_1, \alpha(x_1))] dx_1.$$

De plus, comme dans l'Étape 1.2, on a que

$$\partial\Omega = \Gamma_{\alpha} \cup \Gamma_b \cup \Gamma_{\beta} \cup \Gamma_a$$

et

$$\int_{\Gamma_b} (F^1, 0) \cdot dl = \int_{\Gamma_a} (F^1, 0) \cdot dl = 0.$$

Par conséquent

$$- \int_{\partial\Omega} (F^1, 0) \cdot dl = - \int_{\Gamma_{\beta}} (F^1, 0) \cdot dl - \int_{\Gamma_{\alpha}} (F^1, 0) \cdot dl.$$

Soient donc

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{N+1} = b$$

tels que $\alpha, \beta \in C([a, b])$ et

$$\alpha, \beta \in C^1([a_i, a_{i+1}]), \quad i = 0, \dots, N.$$

On trouve donc que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\alpha}} (F^1, 0) \cdot dl &= \sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle (F^1(x_1, \alpha(x_1)), 0); (1, \alpha'(x_1)) \rangle dx_1 \\ &= \sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{a_{i+1}} F^1(x_1, \alpha(x_1)) dx_1 = \int_a^b F^1(x_1, \alpha(x_1)) dx_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_\beta} (F^1, 0) \cdot dl &= - \sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{a_{i+1}} \langle (F^1(x_1, \beta(x_1)), 0); (1, \beta'(x_1)) \rangle dx_1 \\
&= - \sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{a_{i+1}} F^1(x_1, \beta(x_1)) dx_1 = - \int_a^b F^1(x_1, \beta(x_1)) dx_1.
\end{aligned}$$

En résumant on a obtenu le résultat souhaité, à savoir

$$\iint_{\Omega} F_{x_2}^1 = - \int_{\partial\Omega} (F^1, 0) \cdot dl = \int_a^b [F^1(x_1, \beta(x_1)) - F^1(x_1, \alpha(x_1))] dx_1.$$

Etape 2.2. Montrons maintenant le théorème dans le cas où

$$\alpha, \beta \in C([a, b]) \cap C_{morc}^1(]a, b[).$$

Ici aussi on a que

$$\iint_{\Omega} F_{x_2}^1 dx_1 dx_2 = \int_a^b [F^1(x_1, \beta(x_1)) - F^1(x_1, \alpha(x_1))] dx_1. \quad (4.2)$$

On définit, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit,

$$\Omega_\epsilon = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a + \epsilon < x_1 < b - \epsilon, \alpha(x_1) < x_2 < \beta(x_1)\}$$

et on observe que $\alpha, \beta \in C_{morc}^1([a + \epsilon, b - \epsilon])$ et ainsi Ω_ϵ (voir Figure 4.4) satisfait aux hypothèses de l'Étape 2.1 et on déduit que

$$- \int_{\partial\Omega_\epsilon} (F^1, 0) \cdot dl = \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} [F^1(x_1, \beta(x_1)) - F^1(x_1, \alpha(x_1))] dx_1.$$

Comme $F^1 \in C^0(\overline{\Omega})$ on infère que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\partial\Omega_\epsilon} (F^1, 0) \cdot dl \right] = \int_a^b [F^1(x_1, \beta(x_1)) - F^1(x_1, \alpha(x_1))] dx_1. \quad (4.3)$$

Finalement, comme $\partial\Omega$ et $\partial\Omega_\epsilon$ sont des courbes simples fermées régulières par morceaux et que $F^1 \in C^0(\overline{\Omega})$, on peut montrer facilement (cf. Étape 2.3) que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\partial\Omega_\epsilon} (F^1, 0) \cdot dl \right] = - \int_{\partial\Omega} (F^1, 0) \cdot dl. \quad (4.4)$$

En combinant (4.2), (4.3) et (4.4) on a montré le théorème (sous les hypothèses de l'Étape 2), à savoir

$$\iint_{\Omega} F_{x_2}^1 = - \int_{\partial\Omega} (F^1, 0) \cdot dl = \int_a^b [F^1(x_1, \beta(x_1)) - F^1(x_1, \alpha(x_1))] dx_1.$$

Etape 2.3. Il reste donc à montrer (4.4). On commence par observer (voir Figure 4.4) que

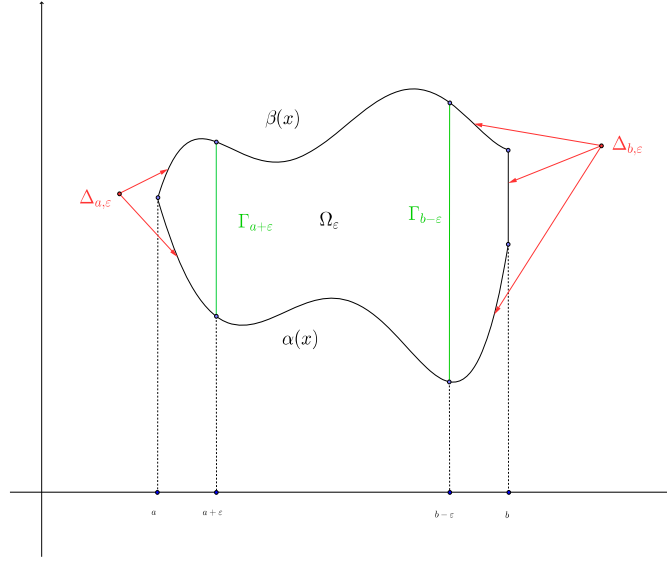


FIG. 4.4 –

$$\partial\Omega_\epsilon = (\partial\Omega \cap \partial\Omega_\epsilon) \cup (\Gamma_{b-\epsilon}) \cup (\Gamma_{a+\epsilon})$$

$$\partial\Omega = (\partial\Omega \cap \partial\Omega_\epsilon) \cup (\Delta_{b,\epsilon}) \cup (\Delta_{a,\epsilon})$$

où

$$\Gamma_{b-\epsilon} = \{(b-\epsilon, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } t : \alpha(b-\epsilon) \rightarrow \beta(b-\epsilon)\}$$

$$\Gamma_{a+\epsilon} = \{(a+\epsilon, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } t : \beta(a+\epsilon) \rightarrow \alpha(a+\epsilon)\}$$

et

$$\Delta_{b,\epsilon} = \Gamma_{\alpha,b,\epsilon} \cup \Gamma_{\beta,b,\epsilon} \cup \Gamma_b$$

$$\Delta_{a,\epsilon} = \Gamma_{\alpha,a,\epsilon} \cup \Gamma_{\beta,a,\epsilon} \cup \Gamma_a$$

avec

$$\Gamma_{\alpha,b,\epsilon} = \{(t, \alpha(t)) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } t : b-\epsilon \rightarrow b\}$$

$$\Gamma_{\beta,b,\epsilon} = \{(t, \beta(t)) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } t : b \rightarrow b-\epsilon\}$$

$$\Gamma_b = \{(b, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } t : \alpha(b) \rightarrow \beta(b)\}$$

$$\Gamma_{\alpha,a,\epsilon} = \{(t, \beta(t)) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } t : a+\epsilon \rightarrow a\}$$

$$\Gamma_{\beta,a,\epsilon} = \{(t, \alpha(t)) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } t : a \rightarrow a+\epsilon\}$$

$$\Gamma_a = \{(a, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } t : \beta(a) \rightarrow \alpha(a)\}.$$

On a par conséquent

$$\int_{\partial\Omega} - \int_{\partial\Omega_\epsilon} = \int_{\Delta_{b,\epsilon}} + \int_{\Delta_{a,\epsilon}} - \int_{\Gamma_{b-\epsilon}} - \int_{\Gamma_{a+\epsilon}}.$$

On note que, comme précédemment,

$$\int_{\Gamma_{a+\epsilon}} (F^1, 0) \cdot dl = \int_{\Gamma_{b-\epsilon}} (F^1, 0) \cdot dl = 0.$$

Il reste donc à montrer que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Delta_{a,\epsilon}} (F^1, 0) \cdot dl \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Delta_{b,\epsilon}} (F^1, 0) \cdot dl \right] = 0. \quad (4.5)$$

Les deux limites se calculant de la même façon nous allons montrer seulement la seconde. La paramétrisation de $\Delta_{b,\epsilon}$ ci-dessus ne convient pas car α et β ne sont, a priori, pas dérivables en b . Il nous faut donc choisir une autre paramétrisation. Comme $\partial\Omega$ est une courbe simple fermée régulière par morceaux, on peut trouver $\gamma \in C^1_{morc}([0, 1]; \mathbb{R}^2)$, $\gamma = \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, une paramétrisation simple et régulière par morceaux de $\Delta_{b,\epsilon}$. On a donc (voir Figure 4.5) que

$$\gamma_1(0) = \gamma_1(1) = b - \epsilon, \quad \gamma_2(0) = \alpha(b - \epsilon) \quad \text{et} \quad \gamma_2(1) = \beta(b - \epsilon).$$

On observe ensuite qu'il existe $0 < \delta \leq 1 - \delta' < 1$ tels que

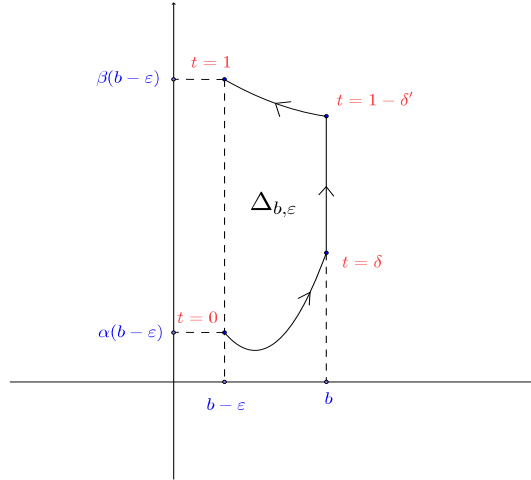


FIG. 4.5 –

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} < b & \text{sur } [0, \delta[\\ = b & \text{sur } [\delta, 1 - \delta'] \\ < b & \text{sur }]1 - \delta', 1]. \end{cases}$$

Supposons pour simplifier que $\gamma_1 \in C^1([0, 1])$ (mais la démonstration est identique dans le cas $\gamma_1 \in C^1_{morc}([0, 1])$). Comme sur $[0, \delta[$ la paramétrisation γ n'est qu'une reparamétrisation de la courbe

$$\{(t, \alpha(t)) : t \in [b - \epsilon, b[\}$$

on infère que $\gamma'_1(t) > 0$ sur $[0, \delta[$. Le même raisonnement étant vrai sur $]1 - \delta', 1]$, on déduit que

$$\gamma'_1(t) = \begin{cases} > 0 & \text{sur } [0, \delta[\\ = 0 & \text{sur } [\delta, 1 - \delta'] \\ < 0 & \text{sur }]1 - \delta', 1] . \end{cases}$$

Comme $F^1 \in C^0(\overline{\Omega})$ on peut trouver une constante $M > 0$ telle que $|F^1| \leq M$ dans $\overline{\Omega}$ et par conséquent

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Delta_{b,\epsilon}} (F^1, 0) \cdot dl \right| &= \left| \int_0^1 F^1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma'_1(t) dt \right| \\ &\leq M \int_0^1 |\gamma'_1(t)| dt = M \left[\int_0^\delta \gamma'_1(t) dt - \int_{1-\delta'}^1 \gamma'_1(t) dt \right] \end{aligned}$$

et on obtient finalement

$$\left| \int_{\Delta_{b,\epsilon}} (F^1, 0) \cdot dl \right| \leq M [\gamma_1(\delta) - \gamma_1(0) - \gamma_1(1) + \gamma_1(1 - \delta')] = 2M\epsilon.$$

On a donc bien montré (4.5) et par conséquent (4.4).

Etape 3. Finalement considérons un domaine régulier Ω (mais sans trous) qui s'écrit comme (voir Figure 4.6)

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \overline{U}_i$$

où U_i , $i = 1, \dots, N$, sont des ouverts vérifiant les hypothèses de l'Etape 2 et $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$. De l'Etape 2 on déduit que

$$\iint_{U_i} \text{rot } F = \int_{\partial U_i} F \cdot dl$$

et par conséquent

$$\iint_{\Omega} \text{rot } F = \sum_{i=1}^N \iint_{U_i} \text{rot } F = \sum_{i=1}^N \int_{\partial U_i} F \cdot dl.$$

On observe ensuite que

$$\int_{\partial \Omega} F \cdot dl = \sum_{i=1}^N \int_{\partial U_i} F \cdot dl$$

car si

$$\Gamma_{ij} = \partial U_i \cap \partial U_j$$

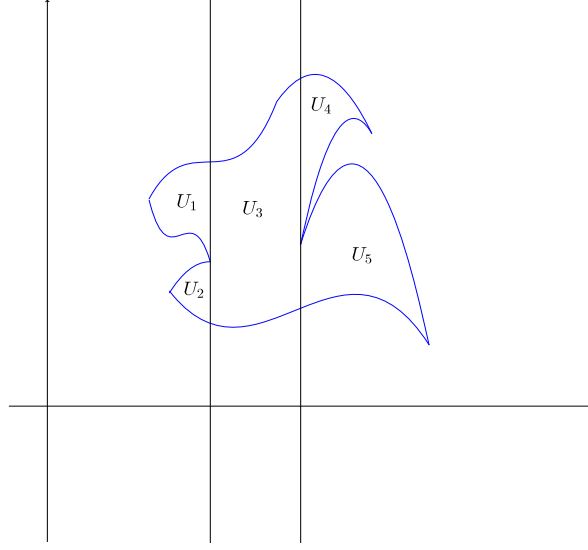


FIG. 4.6 –

alors cette courbe a une contribution nulle à l'intégrale, car elle est parcourue une fois dans un sens, suivant qu'on regarde le domaine U_i , et une fois dans l'autre sens, si on se place dans U_j . La combinaison des deux équations et de l'observation que nous venons de faire implique le théorème dans le cas où Ω n'a pas de trous.

Etape 4. Le cas général où $\Omega_1, \dots, \Omega_m \neq \emptyset$, se déduit par induction du cas sans trous. En effet quand $m = 0$ (i.e. $\Omega_1 = \dots = \Omega_m = \emptyset$) le résultat a déjà été démontré; supposons le vrai jusqu'à l'ordre $(m - 1)$ et montrons le pour m .

(i) Fixons les notations (cf. Figure 4.7). L'idée est de faire une petite incision dans Ω pour le partager en deux ensembles un sans trous et l'autre avec $(m - 1)$ trous. La construction est alors la suivante.

- Soient $p_1, q_1 \in \partial\Omega_1$ et $\Gamma_{p_1q_1}$ la courbe contenue dans $\partial\Omega_1$ et joignant p_1 à q_1 .
- Soient $p_0, q_0 \in \partial\Omega_0$ et $\Gamma_{p_0q_0}$ la courbe contenue dans $\partial\Omega_0$ et joignant p_0 à q_0 .
- Soient $\Gamma_{p_0p_1}$ et $\Gamma_{q_0q_1}$ deux courbes simples et régulières par morceaux (sans intersection) joignant respectivement p_0 à p_1 et q_0 à q_1 .
- Soit A l'ouvert dont le bord est $\partial A = \Gamma_{p_0q_0} \cup \Gamma_{q_0q_1} \cup \Gamma_{p_1q_1} \cup \Gamma_{p_0p_1}$.
- Soit $B = \Omega \setminus \overline{A}$.

On choisit p_0, q_0 et p_1, q_1 suffisamment proches pour que \overline{A} ne rencontre aucun des $\overline{\Omega}_2, \dots, \overline{\Omega}_m$. La construction est donc telle que A et B sont des domaines réguliers au sens du théorème, avec A sans trous et B avec $(m - 1)$ trous à savoir $\overline{\Omega}_2, \dots, \overline{\Omega}_m$.

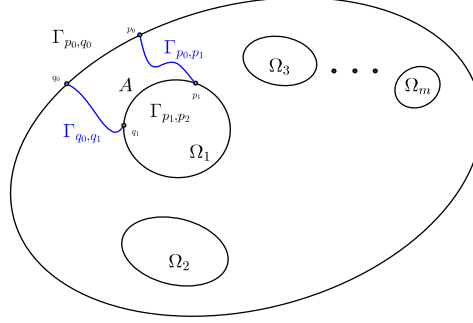


FIG. 4.7 –

(ii) On applique alors l'hypothèse d'induction et on trouve

$$\iint_A \operatorname{rot} F = \int_{\partial A} F \cdot dl \quad \text{et} \quad \iint_B \operatorname{rot} F = \int_{\partial B} F \cdot dl.$$

Comme les courbes $\Gamma_{p_0 p_1}$ et $\Gamma_{q_0 q_1}$ sont parcourues une fois dans un sens (pour $\int_{\partial A}$) une fois dans l'autre (pour $\int_{\partial B}$), on infère des deux égalités ci-dessus le résultat souhaité

$$\iint_{\Omega} \operatorname{rot} F = \int_{\partial \Omega} F \cdot dl.$$

Ceci termine l'idée de la démonstration. ■

4.3 Exercices

De nombreux autres exercices concernant ce chapitre, notamment Exercices 3 et 9, se trouvent au Chapitre 4 de [9].

On adopte ici et dans les chapitres suivants la notation suivante.

Notation 4.7 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine régulier et $u \in C^1(\Omega)$. Soit $\nu = \nu(x)$ le vecteur normal unité extérieur en $x \in \partial\Omega$. On définit la dérivée normale de u au point $x \in \partial\Omega$ par

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \langle \nabla u(x); \nu(x) \rangle.$$

4.3.1 Un exercice calculatoire

Exercice 4.1 Soient $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ et

$$F(x, y) = \begin{cases} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) & \text{si } (x, y) \in \overline{\Omega} \setminus \{(0, 0)\} \\ (0, 0) & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (i) Calculer $\operatorname{rot} F(x, y)$ quand $(x, y) \neq (0, 0)$.
- (ii) Calculer $\iint_{\Omega} \operatorname{rot} F(x, y) dx dy$ et $\int_{\partial\Omega} F \cdot dl$. Le résultat contredit-il le Théorème de Green ?

4.3.2 Identités de Green et applications

Exercice 4.2 (Identités de Green dans le plan) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine régulier, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ la normale extérieure unitaire à $\partial\Omega$. Pour tout $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, vérifier les trois identités suivantes

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} [v \Delta u + \langle \nabla u, \nabla v \rangle] dx dy &= \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dl, \\ \iint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx dy &= \int_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] dl, \\ \iint_{\Omega} \Delta u dx dy &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dl. \end{aligned}$$

Exercice 4.3 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert borné et régulier, $f \in C^0(\overline{\Omega})$ et $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$.

- (i) Soit le problème

$$\begin{cases} \Delta w(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ w(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.6)$$

où $w \in C^2(\overline{\Omega})$ est l'inconnue. Montrer que $w \equiv 0$ est l'unique solution de (4.6).

Indication. Utiliser la première identité de Green.

- (ii) En déduire que le problème

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x) & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.7)$$

admet au plus une solution $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

4.3.3 Autres exercices

Exercice 4.4 Soit

$$\Omega = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1)^2 + x_2^2 < 1 \right\}.$$

Pour $x \in \partial\Omega$ et $u \in C^1(\overline{\Omega})$, on dénote par

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} = x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

(i) Calculer

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ [u(\cos \theta, \sin \theta)]^2 \right\}.$$

En déduire que

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0.$$

(ii) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in C^2(\overline{\Omega})$ vérifiant

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda \frac{\partial u}{\partial \tau} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Montrer, à l'aide du Théorème de Green et de la question précédente, que $u \equiv \text{constante}$.

Exercice 4.5 Montrer le Théorème de Green pour Ω le disque unité centré en 0 et pour F quelconque (écrire tous les détails de la démonstration).

Exercice 4.6 Vérifier le Théorème de la divergence dans le plan quand

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1)^2 < x_2 < 1 \right\}.$$

4.4 Corrigés

Exercice 4.1 (i) On a directement $\text{rot } F = 0$ dans $\overline{\Omega} \setminus \{(0, 0)\}$.

(ii) On trouve immédiatement

$$\iint_{\Omega} \text{rot } F(x, y) \, dx \, dy = 0$$

et

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \langle (-\sin \theta, \cos \theta); (-\sin \theta, \cos \theta) \rangle d\theta = 2\pi \neq 0.$$

Mais cela ne contredit pas le Théorème de Green car F n'est pas continue en zéro, et donc $F \notin C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$. ♠

Exercice 4.2 La première identité suit du Théorème de la divergence appliqué à $v \nabla u$. En effet, $\operatorname{div}(v \nabla u) = v \Delta u + \langle \nabla u; \nabla v \rangle$ et donc

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} [v \Delta u + \langle \nabla u; \nabla v \rangle] dx dy &= \iint_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) dx dy \\ &= \int_{\partial \Omega} \langle v \nabla u; \nu \rangle dl = \int_{\partial \Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dl. \end{aligned}$$

Les deux autres identités se déduisent de la première, d'une part en permutant les rôles de u et v et en soustrayant les deux identités obtenues, d'autre part en choisissant $v \equiv 1$. ♠

Exercice 4.3 (i) Soit $w \in C^2(\overline{\Omega})$ une solution de (4.6). Par la première identité de Green avec $u = v = w$, on a alors

$$\iint_{\Omega} |\nabla w|^2 dx = 0$$

ce qui implique que $\nabla w = 0$. Donc, comme $w \in C^2(\overline{\Omega})$, w est constante sur chacune des composantes connexes de Ω et puisque $w = 0$ sur $\partial \Omega$, par continuité, w est nulle sur tout $\overline{\Omega}$. Par conséquent, $w \equiv 0$ est l'unique solution de (4.6).

(ii) Soient $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ deux solutions de (4.7) et posons $w = u - v$. On a alors

$$\begin{cases} \Delta w(x) = \Delta u(x) - \Delta v(x) = f(x) - f(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ w(x) = u(x) - v(x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0 & \text{si } x \in \partial \Omega. \end{cases}$$

Par le point précédent, $w \equiv 0$ est l'unique solution, et donc $u = v$, d'où la conclusion. ♠

Exercice 4.4 (i) On a si $x_1 = \cos \theta$ et $x_2 = \sin \theta$ que

$$u \frac{\partial u}{\partial \tau} = \sin \theta \left(u \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \cos \theta \left(u \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} [u^2(\cos \theta, \sin \theta)].$$

et par conséquent

$$\int_{\partial \Omega} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} [u^2(\cos \theta, \sin \theta)] d\theta = 0.$$

(ii) En multipliant l'équation par u et en utilisant le Théorème de Green et (i) on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\Omega} u \Delta u = - \iint_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 + \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \\ &= - \iint_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2 + \lambda \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = - \iint_{\Omega} |\operatorname{grad} u|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent $\operatorname{grad} u = 0$ et donc $u \equiv \text{constante}$. ♠

Exercice 4.5 *Etape 1.* (i) On commence par calculer

$$\begin{aligned} - \iint_{\Omega} F_{x_2}^1 dx_1 dx_2 &= - \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-(x_1)^2}}^{\sqrt{1-(x_1)^2}} F_{x_2}^1 dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-1}^1 \left[F^1 \left(x_1, -\sqrt{1-(x_1)^2} \right) - F^1 \left(x_1, \sqrt{1-(x_1)^2} \right) \right] dx_1. \end{aligned}$$

(ii) On a de même

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} F_{x_1}^2 dx_1 dx_2 &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-(x_2)^2}}^{\sqrt{1-(x_2)^2}} F_{x_1}^2 dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-1}^1 \left[F^2 \left(\sqrt{1-(x_2)^2}, x_2 \right) - F^2 \left(-\sqrt{1-(x_2)^2}, x_2 \right) \right] dx_2. \end{aligned}$$

Etape 2. (i) On écrit $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left\{ \gamma_1(t) = (t, -\sqrt{1-t^2}) : t : -1 \rightarrow 1 \right\} \\ \Gamma_2 &= \left\{ \gamma_2(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) : t : 1 \rightarrow -1 \right\}. \end{aligned}$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (F^1, 0) \cdot dl &= \int_{-1}^1 (F^1(t, -\sqrt{1-t^2}), 0) \cdot \left(1, \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt \\ &\quad - \int_{-1}^1 (F^1(t, \sqrt{1-t^2}), 0) \cdot \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt. \end{aligned}$$

On remarque que $\gamma_1, \gamma_2 \in C^0([-1, 1]) \cap C^1(-1, 1)$, mais $\gamma_1, \gamma_2 \notin C^1([-1, 1])$. Toutefois on montre facilement que l'intégrale est quand même bien définie.

(ii) On écrit ensuite $\partial\Omega = \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ où

$$\Gamma_3 = \left\{ (\sqrt{1-t^2}, t) : t : -1 \rightarrow 1 \right\} \quad \text{et} \quad \Gamma_4 = \left\{ (-\sqrt{1-t^2}, t) : t : 1 \rightarrow -1 \right\}.$$

On déduit alors que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (0, F^2) \cdot dl &= \int_{-1}^1 (0, F^2(\sqrt{1-t^2}, t)) \cdot \left(\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, 1 \right) dt \\ &\quad - \int_{-1}^1 (0, F^2(-\sqrt{1-t^2}, t)) \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, 1 \right) dt. \end{aligned}$$

La même remarque que précédemment s'applique.

(iii) Finalement, en regroupant les résultats, on a bien obtenu que

$$\iint_{\Omega} (F_{x_1}^2 - F_{x_2}^1) dx_1 dx_2 = \int_{\partial\Omega} (F^1, F^2) \cdot dl. \quad \spadesuit$$

Exercice 4.6 (i) Calcul de $\iint_{\Omega} \operatorname{div} F$. On écrit Ω de deux manières différentes, à savoir

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1)^2 < x_2 < 1 \text{ et } x_1 \in [-1, 1] \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{x_2} < x_1 < \sqrt{x_2} \text{ et } x_2 \in [0, 1] \right\}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} F_{x_1}^1 &= \int_0^1 dx_2 \int_{-\sqrt{x_2}}^{\sqrt{x_2}} F_{x_1}^1 dx_1 = \int_0^1 [F^1(\sqrt{x_2}, x_2) - F^1(-\sqrt{x_2}, x_2)] dx_2 \\ \iint_{\Omega} F_{x_2}^2 &= \int_{-1}^1 dx_1 \int_{(x_1)^2}^1 F_{x_2}^2 dx_2 = \int_{-1}^1 [F^2(x_1, 1) - F^2(x_1, (x_1)^2)] dx_1\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} \operatorname{div} F &= \int_0^1 [F^1(\sqrt{x_2}, x_2) - F^1(-\sqrt{x_2}, x_2)] dx_2 \\ &\quad + \int_{-1}^1 [F^2(x_1, 1) - F^2(x_1, (x_1)^2)] dx_1.\end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle dl$. On a que

$$\partial\Omega = \Gamma_p \cup \Gamma_d$$

où (ν dénote la normale extérieure unité)

$$\Gamma_p = \{\gamma_p(t) = (t, t^2) \text{ et } t \in [-1, 1]\} \Rightarrow \gamma_p'(t) = (1, 2t) \Rightarrow \nu = \frac{(2t, -1)}{|\gamma_p'(t)|}$$

$$\Gamma_d = \{\gamma_d(t) = (t, 1) \text{ et } t \in [-1, 1]\} \Rightarrow \gamma_d'(t) = (1, 0) \Rightarrow \nu = (0, 1).$$

Par ailleurs on a

$$\int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle dl = \int_{\Gamma_p} (F^1\nu_1 + F^2\nu_2) dl + \int_{\Gamma_d} (F^1\nu_1 + F^2\nu_2) dl.$$

Un calcul direct nous donne

$$\int_{\Gamma_p} (F^1\nu_1 + F^2\nu_2) dl = \int_{-1}^1 2t F^1(t, t^2) dt - \int_{-1}^1 F^2(t, t^2) dt$$

$$\int_{\Gamma_d} (F^1\nu_1 + F^2\nu_2) dl = \int_{-1}^1 F^2(t, 1) dt.$$

Comme

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 2t F^1(t, t^2) dt &= \int_0^1 2t F^1(t, t^2) dt + \int_{-1}^0 2t F^1(t, t^2) dt \\ &= \int_0^1 2t F^1(t, t^2) dt + \int_1^0 2s F^1(-s, s^2) ds \\ &= \int_0^1 [F^1(\sqrt{u}, u) - F^1(-\sqrt{u}, u)] du,\end{aligned}$$

on trouve, en combinant ces résultats, que le théorème est démontré. ♠

Chapitre 5

Surfaces et intégrales de surfaces

5.1 Surfaces

On va ici faire des considérations un peu simplificatrices et si nécessaire il faut se référer à la bibliographie.

Définition 5.1 Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.

(I) On dit que Σ est une surface régulière et orientable si (entre autres) il existe un ouvert borné $A \subset \mathbb{R}^2$ tel que ∂A soit une courbe simple fermée régulière par morceaux (et donc A est aussi connexe) et $\sigma : \overline{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (σ est appelée une paramétrisation régulière de Σ) tels que

- (i) $\sigma \in C^1(\overline{A}; \mathbb{R}^3)$, $\sigma = \sigma(u, v) = (\sigma^1(u, v), \sigma^2(u, v), \sigma^3(u, v))$;
- (ii) $\sigma(\overline{A}) = \Sigma$ et σ est injective dans le sens suivant

$$\left. \begin{array}{l} \sigma(u_1, v_1) = \sigma(u_2, v_2) \\ (u_1, v_1) \in \overline{A}, (u_2, v_2) \in A \end{array} \right\} \Rightarrow (u_1, v_1) = (u_2, v_2)$$

(noter qu'a posteriori, mais seulement a posteriori, $(u_1, v_1) \in A$);

- (iii) le vecteur

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \sigma_u^1 & \sigma_u^2 & \sigma_u^3 \\ \sigma_v^1 & \sigma_v^2 & \sigma_v^3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 \sigma_v^3 - \sigma_u^3 \sigma_v^2 \\ \sigma_u^3 \sigma_v^1 - \sigma_u^1 \sigma_v^3 \\ \sigma_u^1 \sigma_v^2 - \sigma_u^2 \sigma_v^1 \end{pmatrix};$$

est tel que

$$|\sigma_u \wedge \sigma_v| \neq 0, \quad \forall (u, v) \in \overline{A};$$

(iv) soit $x \in \Sigma$, $x = \sigma(u, v)$, alors

$$\nu = \nu(x) = \nu(\sigma(u, v)) = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{|\sigma_u \wedge \sigma_v|}$$

est le vecteur normal unité à la surface au point x . Pour que la surface Σ soit orientable il faut que l'application $x \rightarrow \nu(x)$ soit continue sur Σ .

(II) Le bord (cf. Figure 5.1) d'une telle surface Σ , noté $\partial\Sigma$, est défini comme suit. Comme ∂A est une courbe simple régulière par morceaux, on peut l'écrire

$$\partial A = \bigcup_{i=1}^m \gamma_i \quad \text{et} \quad \sigma(\partial A) = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i \quad \text{où} \quad \Gamma_i = \sigma(\gamma_i).$$

Le bord $\partial\Sigma$ est composé de $\sigma(\partial A)$ auquel on a enlevé les Γ_i qui sont réduits à des points et ceux qui sont des courbes qui sont parcourues deux fois, une fois dans un sens une fois dans l'autre. Le sens de parcours de $\partial\Sigma$ induit par la paramétrisation σ est celui obtenu en parcourant positivement la courbe simple fermée $\partial A \subset \mathbb{R}^2$.

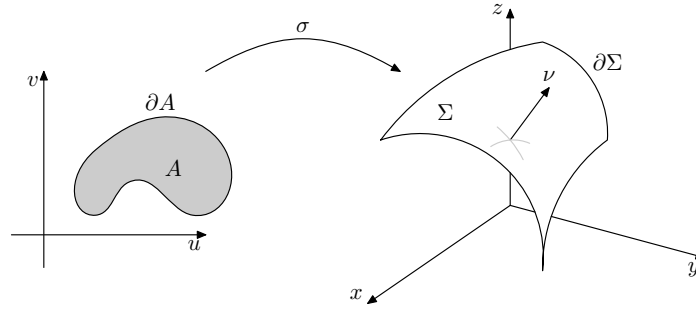


FIG. 5.1 –

Remarque (i) Le vecteur "normale unité" est indépendant, au signe près, du choix de la paramétrisation (cf. Proposition 5.2, ci-dessous). Si toutefois on prend les paramètres (u, v) dans l'ordre (v, u) on obtient une normale changée de signe (car $\sigma_v \wedge \sigma_u = -\sigma_u \wedge \sigma_v$).

(ii) Le bord $\partial\Sigma$ est aussi indépendant du choix de la paramétrisation.

(iii) Dans certains exemples ci-dessous on peut se permettre de relaxer légèrement l'hypothèse

$$|\sigma_u \wedge \sigma_v| \neq 0, \quad \forall (u, v) \in \overline{A}$$

par exemple en demandant la non égalité seulement sur A (et pas \overline{A}).

(iv) La façon dont on a défini le bord n'est pas la manière usuelle de le définir. Le bord $\partial\Sigma$ est habituellement défini comme le bord au sens topologique, à savoir

$\partial\Sigma = \overline{\Sigma} \setminus \text{int } \Sigma$ (int Σ étant vu comme ouvert relativement à Σ). Cette définition coïncide avec la nôtre. L'avantage de la nôtre est que, non seulement elle est moins géométrique (et ne nécessite qu'une représentation dans \mathbb{R}^2 et pas \mathbb{R}^3), mais elle donne aussi un sens de parcours.

(v) Nous n'avons défini ici que des surfaces compactes (car $\Sigma = \sigma(\overline{A})$, σ étant continue et \overline{A} compact). On peut évidemment définir de manière analogue des surfaces non compactes (non bornées ou non fermées). ♠

Exemple (Graphe d'une fonction) Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné tel que ∂A soit une courbe simple fermée régulière. Soit $f \in C^1(\overline{A})$, alors la surface (cf. Figure 5.2)

$$\Sigma = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \overline{A}\}$$

est une surface régulière et orientable. De plus son bord est donné par

$$\partial\Sigma = \sigma(\partial A) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \partial A\}.$$

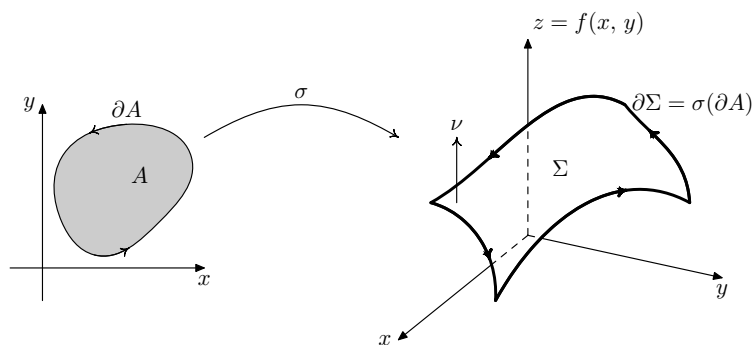


FIG. 5.2 –

Discussion On prend comme paramétrisation

$$\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad (x, y) \in \overline{A}$$

qui a clairement toutes les propriétés requises pour être une paramétrisation régulière de la surface. De plus

$$\sigma_x \wedge \sigma_y = (-f_x, -f_y, 1)$$

et donc un champ de normale unité à Σ est donné par

$$\nu = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Le bord de Σ est par définition

$$\partial\Sigma = \sigma(\partial A) = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \partial A\}$$

et le sens de parcours de $\partial\Sigma$ induit par la paramétrisation σ est le sens positif usuel. ♠

Exemple (Demi-sphère) Soit

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 0\}.$$

C'est une surface régulière et orientable (cf. Figure 5.3). Son bord $\partial\Sigma$ est donné par

$$\partial\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z = 0\}.$$

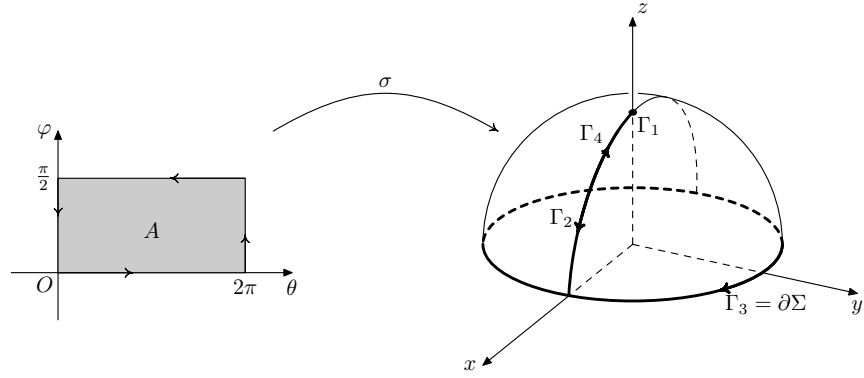


FIG. 5.3 –

Discussion On prend $A =]0, 2\pi[\times]0, \pi/2[$ et

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi).$$

On trouve

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = -\sin \varphi (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$$

et

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

où

$$\Gamma_1 = \{\sigma(\theta, 0) : \theta : 0 \rightarrow 2\pi\} = \{(0, 0, 1)\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \sigma(2\pi, \varphi) : \varphi : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \right\} = \left\{ (\sin \varphi, 0, \cos \varphi) : \varphi : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \sigma\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) : \theta : 2\pi \rightarrow 0 \right\} = \{(\cos \theta, \sin \theta, 0) : \theta : 2\pi \rightarrow 0\}$$

$$\Gamma_4 = \left\{ \sigma(0, \varphi) : \varphi : \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \right\} = \left\{ (\sin \varphi, 0, \cos \varphi) : \varphi : \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \right\} = -\Gamma_2.$$

Grâce à nos conventions on trouve que

$$\partial \Sigma = \Gamma_3$$

et que le sens de parcours de $\partial \Sigma$ induit par la paramétrisation σ est le sens négatif (car $\theta : 2\pi \rightarrow 0$).

Note. On aurait pu prendre ici comme paramétrisation de Σ

$$\tilde{\sigma}(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right), \quad (x, y) \in B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

et on aurait retrouvé que

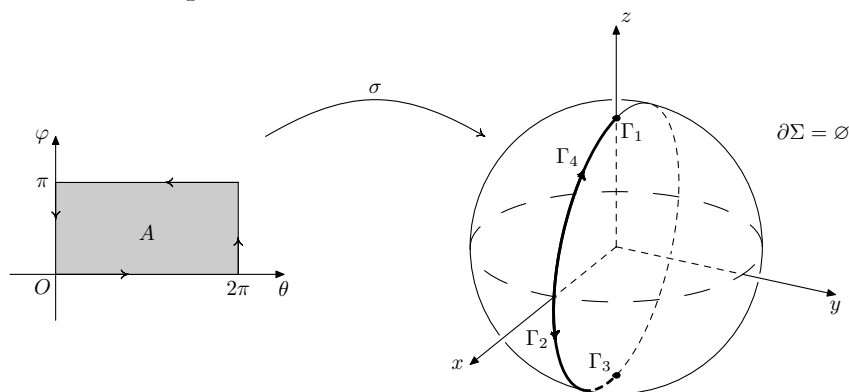
$$\partial \Sigma = \tilde{\sigma}(\partial B) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z = 0\}.$$

(Noter toutefois que $\tilde{\sigma} \in C^1(B; \mathbb{R}^3)$ mais $\tilde{\sigma} \notin C^1(\overline{B}; \mathbb{R}^3)$.) ♠

Exemple (Sphère) Soit

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

C'est une surface régulière et orientable. Son bord $\partial \Sigma = \emptyset$.



Discussion On paramètre Σ par $\sigma : \overline{A} \rightarrow \Sigma$ où $A =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ et

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi), \quad (\theta, \varphi) \in \overline{A}.$$

Noter que cette paramétrisation n'est pas régulière sur \overline{A} mais au vu de la Remarque ci-dessus ceci ne nous causera pas de problème. Une normale calculée à l'aide de la paramétrisation est

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = -\sin \varphi (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$$

et donc

$$\nu = \frac{\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi}{|\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi|}$$

est une normale unité (intérieure au volume $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$).

Calculons

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

où

$$\Gamma_1 = \{\sigma(\theta, 0) : \theta : 0 \rightarrow 2\pi\} = \{(0, 0, 1)\}$$

$$\Gamma_2 = \{\sigma(2\pi, \varphi) : \varphi : 0 \rightarrow \pi\} = \{(\sin \varphi, 0, \cos \varphi) : \varphi : 0 \rightarrow \pi\}$$

$$\Gamma_3 = \{\sigma(\theta, \pi) : \theta : 2\pi \rightarrow 0\} = \{(0, 0, -1)\}$$

$$\Gamma_4 = \{\sigma(0, \varphi) : \varphi : \pi \rightarrow 0\} = \{(\sin \varphi, 0, \cos \varphi) : \varphi : \pi \rightarrow 0\} = -\Gamma_2.$$

En conclusion et avec la convention que nous avons faite dans la Remarque, on trouve $\partial \Sigma = \emptyset$. ♠

Exemple (Cylindre) Soit (cf. Figure 5.4)

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}.$$

C'est une surface régulière et orientable dont le bord est

$$\partial \Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$$

où

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z = 0\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z = 1\}.$$

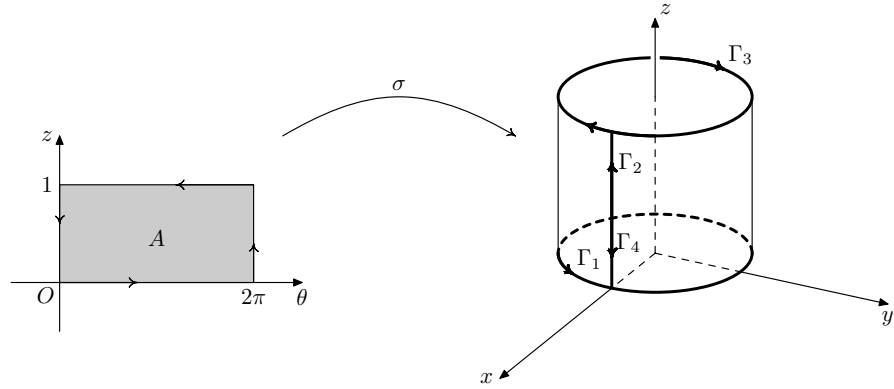


FIG. 5.4 –

Discussion On prend $A =]0, 2\pi[\times]0, 1[$ et

$$\sigma(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z).$$

Le champ de normale unité induit par la paramétrisation est

$$\nu = \sigma_\theta \wedge \sigma_z = (\cos \theta, \sin \theta, 0).$$

On a de plus

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

où

$$\Gamma_1 = \{\sigma(\theta, 0) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) : \theta : 0 \rightarrow 2\pi\}$$

$$\Gamma_2 = \{\sigma(2\pi, z) = (1, 0, z) : z : 0 \rightarrow 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{\sigma(\theta, 1) = (\cos \theta, \sin \theta, 1) : \theta : 2\pi \rightarrow 0\}$$

$$\Gamma_4 = \{\sigma(0, z) = (1, 0, z) : z : 1 \rightarrow 0\} = -\Gamma_2.$$

On a donc

$$\partial \Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$$

et le sens de parcours de $\partial \Sigma$ induit par la paramétrisation σ est positif sur Γ_1 et négatif sur Γ_3 . ♠

Pas toutes les surfaces sont orientables.

Exemple (Anneau de Möbius) Soit (cf. Figure 5.5)

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \sigma(\theta, r), (\theta, r) \in \overline{A}\}$$

où $A =]0, 2\pi[\times]-1/2, 1/2[$ et

$$\sigma(\theta, r) = \left(\left(1 + r \sin \frac{\theta}{2}\right) \cos \theta, \left(1 + r \sin \frac{\theta}{2}\right) \sin \theta, r \cos \frac{\theta}{2} \right).$$

C'est une surface régulière, mais non orientable.

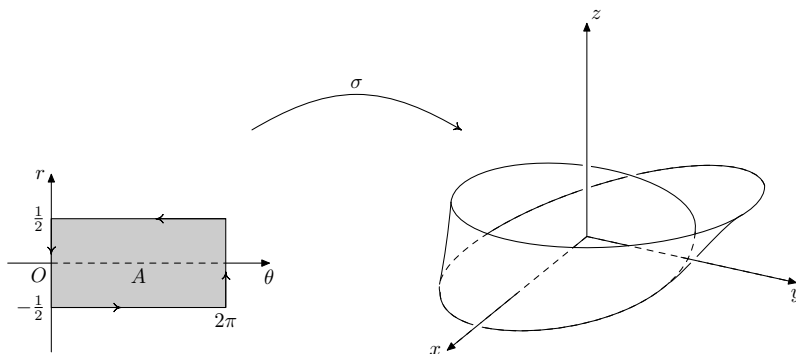


FIG. 5.5 –

Discussion Noter que

$$\sigma(0, r) = (1, 0, r) = \sigma(2\pi, -r).$$

Par ailleurs la normale est donnée par

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_r = \begin{pmatrix} \left(1 + r \sin \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta + \frac{r}{2} \sin \theta \\ \left(1 + r \sin \frac{\theta}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta - \frac{r}{2} \cos \theta \\ - \left(1 + r \sin \frac{\theta}{2}\right) \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

et

$$|\sigma_\theta \wedge \sigma_r|^2 = \left(1 + r \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{r^2}{4} > 0, \quad \forall (\theta, r) \in \overline{A}.$$

On a donc que

$$\nu(\theta, r) = \frac{\sigma_\theta \wedge \sigma_r}{|\sigma_\theta \wedge \sigma_r|} \quad \text{est continue,} \quad \forall (\theta, r) \in A.$$

Toutefois on remarque que l'application $x \mapsto \nu(x)$ n'est pas continue sur Σ . En effet on a

$$x = (1, 0, 0) = \sigma(0, 0) = \sigma(2\pi, 0)$$

alors que

$$\nu(x) = \nu(\sigma(0, 0)) = (1, 0, 0) \quad \text{et} \quad \nu(x) = \nu(\sigma(2\pi, 0)) = (-1, 0, 0)$$

La surface n'est donc pas orientable. ♠

La notion de normale est indépendante de la paramétrisation.

Proposition 5.2 Soient $A, B \subset \mathbb{R}^2$ des ouverts bornés tels que ∂A et ∂B soient des courbes simples fermées régulières par morceaux et $\tau \in C^1(\overline{B}; \mathbb{R}^3)$. S'il existe une application $\varphi : \overline{A} \rightarrow \overline{B}$, telle que

$$\varphi \in C^1(\overline{A}; \mathbb{R}^2), \quad \varphi^{-1} \in C^1(\overline{B}; \mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad \det \nabla \varphi(x_1, x_2) > 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \overline{A}$$

alors $\sigma = \tau \circ \varphi \in C^1(\overline{A}; \mathbb{R}^3)$ et

$$\sigma_{x_1}(x_1, x_2) \wedge \sigma_{x_2}(x_1, x_2) = \det \nabla \varphi(x_1, x_2) [\tau_{y_1}(\varphi(x_1, x_2)) \wedge \tau_{y_2}(\varphi(x_1, x_2))].$$

On aura aussi souvent affaire à des surfaces régulières par morceaux telles que : des cubes, des demi sphères dont on a rajouté le couvercle ou des cylindres dont on a rajouté les couvercles du dessus et du dessous.... Sans entrer dans les détails, elles se définissent comme ci-dessus, mais par morceaux et en particulier la paramétrisation est donnée par une paramétrisation $\sigma \in C^1_{\text{morc}}(\overline{A}; \mathbb{R}^3)$ dans le sens suivant.

Définition 5.3 Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert connexe tel que ∂A soit une courbe simple fermée régulière par morceaux.

(i) On dit que $f \in C_{\text{morc}}^1(\overline{A})$ si $f \in C(\overline{A})$ et s'il existe $A_1, \dots, A_m \subset A$ des ouverts tels que

$$\overline{A} = \bigcup_{j=1}^m \overline{A}_j$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, m$$

$$\partial A_j = \Gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

où les Γ_j sont des courbes simples fermées régulières par morceaux et $f \in C^1(\overline{A}_i)$, $i = 1, \dots, m$.

(ii) De même on dira que $F \in C_{\text{morc}}^1(\overline{A}; \mathbb{R}^n)$ si $F^i \in C_{\text{morc}}^1(\overline{A})$, $\forall i = 1, \dots, n$.

5.2 Intégrales de surface

On peut maintenant définir la notion d'intégrale de surface, on va d'abord le faire analytiquement, puis géométriquement.

Définition 5.4 Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné tel que ∂A soit une courbe simple fermée régulière par morceaux (et donc A est aussi connexe).

(i) Soit $\sigma \in C^1(\overline{A}; \mathbb{R}^3)$ et $f : \sigma(\overline{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors on définit l'intégrale de f sur $\sigma(\overline{A})$ comme

$$\iint_{\sigma} f \, ds = \iint_A f(\sigma(u, v)) |\sigma_u \wedge \sigma_v| \, du \, dv.$$

(ii) Si $\sigma \in C_{\text{morc}}^1(\overline{A}; \mathbb{R}^3)$ alors

$$\iint_{\sigma} f \, ds = \sum_{i=1}^m \iint_{A_i} f(\sigma(u, v)) |\sigma_u \wedge \sigma_v| \, du \, dv.$$

(iii) Soit $\sigma \in C^1(\overline{A}; \mathbb{R}^3)$ et $F : \sigma(\overline{A}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel continu. On appelle intégrale du champ vectoriel F sur $\sigma(\overline{A})$ dans la direction $\nu = \sigma_u \wedge \sigma_v$ la quantité

$$\iint_{\sigma} F \cdot ds = \iint_A \langle F(\sigma(u, v)); \sigma_u \wedge \sigma_v \rangle \, du \, dv.$$

(iv) Si $\sigma \in C_{\text{morc}}^1(\overline{A}; \mathbb{R}^3)$, alors

$$\iint_{\sigma} F \cdot ds = \sum_{i=1}^m \iint_{A_i} \langle F(\sigma(u, v)); \sigma_u \wedge \sigma_v \rangle \, du \, dv.$$

Tournons nous maintenant vers la version géométrique.

Définition 5.5 Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière par morceaux (avec $\sigma = \sigma(u, v) : \overline{A} \rightarrow \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière par morceaux de Σ).

(i) Si $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors on définit l'intégrale de f sur Σ comme

$$\iint_{\Sigma} f \, ds = \iint_{\sigma} f \, ds.$$

(ii) Si de plus $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est orientable et si $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ vectoriel continu. On appelle intégrale du champ vectoriel F sur Σ dans la direction $\nu = \sigma_u \wedge \sigma_v$ la quantité

$$\iint_{\Sigma} F \cdot ds = \iint_{\sigma} F \cdot ds.$$

Remarque (i) Si $f \equiv 1$ alors on définit

$$\text{Aire}(\Sigma) = \iint_{\Sigma} ds.$$

(ii) L'intégrale $\iint_{\Sigma} F \cdot ds$ est aussi appelée *flux* à travers Σ dans la direction ν .

(iii) Les définitions ci-dessus sont indépendantes du choix de la paramétrisation (au signe près pour celle du flux, cf. Exercice 5.2). ♠

(Pour plus de détails, cf. [4] 376-389, [13] 334 et [21] 452-459).

Exemple Calculer $\iint_{\Sigma} f \, ds$, puis étudier le cas particulier où $f \equiv 1$ (i.e. calculer l'aire de Σ) dans le cas où

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Discussion On définit

$$\sigma(\theta, \varphi) = (R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi)$$

et

$$A =]0, 2\pi[\times]0, \pi[.$$

On a

$$\sigma_{\theta} \wedge \sigma_{\varphi} = -R^2 \sin \varphi (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$$

et donc

$$|\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi| = R^2 \sin \varphi.$$

On trouve donc que

$$\iint_{\Sigma} f \, ds = R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \varphi) \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi$$

L'aire de Σ est alors donnée par

$$\text{Aire}(\Sigma) = \iint_{\Sigma} ds = R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi = 4\pi R^2. \quad \spadesuit$$

Exemple Calculer $\iint_{\Sigma} f \, ds$ où $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z$ et

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}.$$

Discussion On définit

$$\sigma(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$$

et

$$A =]0, 2\pi[\times]0, 1[.$$

On trouve

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$$

ce qui donne

$$|\sigma_\theta \wedge \sigma_z| = 1.$$

Le résultat souhaité est donc

$$\iint_{\Sigma} f \, ds = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2z) \, d\theta \, dz = 2\pi \int_0^1 (1 + 2z) \, dz = 4\pi. \quad \spadesuit$$

Exemple Soient $F(x, y, z) = (y, -x, z^2)$ et

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}.$$

Calculer le flux passant à travers Σ dans la direction ascendante (c'est-à-dire dans la direction des $z > 0$).

Discussion Dans ce cas on pose

$$\sigma(\theta, z) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z)$$

avec

$$A =]0, 2\pi[\times]0, 1[.$$

On obtient

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = (z \cos \theta, z \sin \theta, -z).$$

Comme $-z < 0$, on choisit comme normale $\nu = -(\sigma_\theta \wedge \sigma_z)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} F \cdot ds &= - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle (z \sin \theta, -z \cos \theta, z^2); (z \cos \theta, z \sin \theta, -z) \rangle dz d\theta \\ &= - \int_0^1 \int_0^{2\pi} (z^2 \cos \theta \sin \theta - z^2 \cos \theta \sin \theta - z^3) dz d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 z^3 dz = \frac{\pi}{2}. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

5.3 Exercices

De nombreux autres exercices concernant ce chapitre, notamment Exercices 3, 4, 5 et 6, se trouvent au Chapitre 5 de [9].

Exercice 5.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $\Gamma \subset \Omega$ une courbe simple, régulière et $f \in C^1(\overline{\Omega})$, $f > 0$. Considérons la surface

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Gamma, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Montrer que

$$\int_{\Gamma} f dl = \text{Aire}(\Sigma) = \iint_{\Sigma} 1 ds.$$

Exercice 5.2 Soient $A, B \subset \mathbb{R}^2$ deux ouverts bornés et $\tau = \tau(y_1, y_2) \in C^1(\overline{B}; \mathbb{R}^3)$. Soit une application $\varphi : \overline{A} \rightarrow \overline{B}$, telle que

$$\varphi \in C^1(\overline{A}; \mathbb{R}^2), \quad \varphi^{-1} \in C^1(\overline{B}; \mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad \det \nabla \varphi(x_1, x_2) > 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \overline{A}.$$

(i) Posons $\sigma = \sigma(x_1, x_2) = \tau \circ \varphi(x_1, x_2) \in C^1(\overline{A}; \mathbb{R}^3)$. Exprimer les dérivées partielles de σ en fonction de celles de τ et φ , et montrer que

$$\sigma_{x_1}(x_1, x_2) \wedge \sigma_{x_2}(x_1, x_2) = \det \nabla \varphi(x_1, x_2) [\tau_{y_1}(\varphi(x_1, x_2)) \wedge \tau_{y_2}(\varphi(x_1, x_2))].$$

(ii) En déduire que pour tout $f \in C^0(\mathbb{R}^3)$ et $F \in C^0(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$,

$$\iint_{\sigma} f ds = \iint_{\tau} f ds \quad \text{et} \quad \iint_{\sigma} F \cdot ds = \iint_{\tau} F \cdot ds.$$

5.4 Corrigés

Exercice 5.1 Soit $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [0, 1] \rightarrow \Gamma$ une paramétrisation simple et régulière de la courbe Γ . Définissons $\sigma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$\sigma(t, h) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), h f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))).$$

Alors, σ est une paramétrisation de Σ , avec

$$\sigma_t \wedge \sigma_h = \begin{pmatrix} \gamma'_2(t) f(\gamma(t)) \\ -\gamma'_1(t) f(\gamma(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$|\sigma_t \wedge \sigma_h| = f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| > 0.$$

En utilisant la définition de l'intégrale de surface, on obtient

$$\iint_{\Sigma} 1 \, ds = \int_0^1 \int_0^1 |\sigma_t \wedge \sigma_h| \, dt \, dh = \int_0^1 f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt = \int_{\Gamma} f \, dl \quad \spadesuit.$$

Exercice 5.2 (i) Notons $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$. Utilisant la formule de dérivation des fonctions composées, on obtient

$$\sigma_{x_1}(x_1, x_2) = \varphi_{x_1}^1(x_1, x_2) \tau_{y_1}(\varphi(x_1, x_2)) + \varphi_{x_1}^2(x_1, x_2) \tau_{y_2}(\varphi(x_1, x_2))$$

et

$$\sigma_{x_2}(x_1, x_2) = \varphi_{x_2}^1(x_1, x_2) \tau_{y_1}(\varphi(x_1, x_2)) + \varphi_{x_2}^2(x_1, x_2) \tau_{y_2}(\varphi(x_1, x_2)).$$

Par les propriétés élémentaires du produit vectoriel, nous obtenons, en omettant d'écrire les variables des applications,

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} \wedge \sigma_{x_2} &= (\varphi_{x_1}^1 \tau_{y_1} + \varphi_{x_1}^2 \tau_{y_2}) \wedge (\varphi_{x_2}^1 \tau_{y_1} + \varphi_{x_2}^2 \tau_{y_2}) \\ &= \varphi_{x_1}^1 \varphi_{x_2}^1 (\tau_{y_1} \wedge \tau_{y_1}) + \varphi_{x_1}^1 \varphi_{x_2}^2 (\tau_{y_1} \wedge \tau_{y_2}) \\ &\quad + \varphi_{x_1}^2 \varphi_{x_2}^1 (\tau_{y_2} \wedge \tau_{y_1}) + \varphi_{x_1}^2 \varphi_{x_2}^2 (\tau_{y_2} \wedge \tau_{y_2}) \end{aligned}$$

et donc

$$\sigma_{x_1} \wedge \sigma_{x_2} = (\varphi_{x_1}^1 \varphi_{x_2}^2 - \varphi_{x_2}^1 \varphi_{x_1}^2) (\tau_{y_1} \wedge \tau_{y_2}) = \det(\nabla \varphi) (\tau_{y_1} \wedge \tau_{y_2}).$$

(ii) Par définition de l'intégrale de surface, la formule de changement de variable et le point (i), nous avons directement

$$\begin{aligned} \iint_{\tau} f \, ds &= \iint_{\overline{B}=\varphi(\overline{A})} f(\tau) |\tau_{y_1} \wedge \tau_{y_2}| \, dy_1 \, dy_2 \\ &= \iint_{\overline{A}} f(\tau \circ \varphi) |(\tau_{y_1} \circ \varphi) \wedge (\tau_{y_2} \circ \varphi)| |\det \nabla \varphi| \, dx_1 \, dx_2 \end{aligned}$$

et ainsi

$$\iint_{\tau} f \, ds = \iint_{\overline{A}} f(\sigma) |\sigma_{y_1} \wedge \sigma_{y_2}| \, dy_1 \, dy_2 = \iint_{\sigma} f \, ds.$$

De manière analogue on prouve que

$$\iint_{\tau} F \cdot ds = \iint_{\sigma} F \cdot ds. \quad \spadesuit$$

Chapitre 6

Le Théorème de la divergence

6.1 Théorème de la divergence et ses corollaires

Définition 6.1 On dit que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine régulier (cf. Figure 6.1) s'il existe

$$\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_m \subset \mathbb{R}^3$$

des ouverts connexes bornés tels que

- (i) $\overline{\Omega}_j \subset \Omega_0$, $j = 1, 2, \dots, m$,
- (ii) $\Omega = \Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^m \overline{\Omega}_j$, ($\Rightarrow \partial\Omega = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_m$)
- (iii) $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \emptyset$ si $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$,
- (iv) $\partial\Omega_j = \Sigma_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$ sont des surfaces régulières par morceaux, orientables.
- (v) Il existe un champ (continu par morceaux) de normales extérieures et unité ν à Ω .

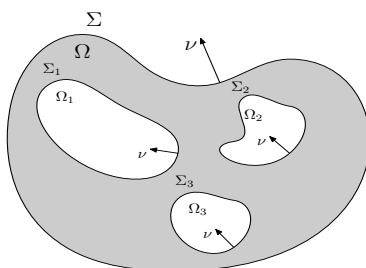


FIG. 6.1 –

Théorème 6.2 (Théorème de la divergence) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et ν une normale extérieure unité à Ω . Soit $F : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, alors

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds.$$

Corollaire 6.3 Si Ω et ν sont comme dans le théorème et si

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, x_2, x_3), & G_1(x_1, x_2, x_3) &= (x_1, 0, 0), \\ G_2(x_1, x_2, x_3) &= (0, x_2, 0), & G_3(x_1, x_2, x_3) &= (0, 0, x_3) \end{aligned}$$

alors

$$\operatorname{Vol}(\Omega) = \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds = \iint_{\partial\Omega} \langle G_i; \nu \rangle ds, \quad i = 1, 2, 3.$$

Démonstration La démonstration est immédiate, une fois qu'on se rappelle que

$$\operatorname{Vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Ceci termine la démonstration. ■

Exemple Vérifier le Théorème de la divergence pour

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 < 1 \right\}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_2, x_3).$$

Discussion (i) Calcul de $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F$. On trouve que

$$\operatorname{div} F = x_2 + 2.$$

Donc, en passant en coordonnées sphériques $x_1 = r \cos \theta \sin \varphi$, $x_2 = r \sin \theta \sin \varphi$, $x_3 = r \cos \varphi$, on obtient

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x_2 + 2) dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (2 + r \sin \theta \sin \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi 2r^2 \sin \varphi dr d\varphi = \frac{4}{3}\pi \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$

et donc

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F = \frac{8}{3}\pi.$$

(ii) Calcul de $\iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds$. Une paramétrisation de la surface est alors donnée par

$$\partial\Omega = \Sigma = \{ \sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi), (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi] \}.$$

Un calcul immédiat donne

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = -\sin \varphi (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$$

qui est clairement une normale intérieure. En observant que sur $\partial\Omega$ on a

$$F \cdot (-\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi) = (\cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi) \cdot (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi) \sin \varphi$$

on obtient

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\cos^2 \theta \sin \theta \sin^4 \varphi + \sin^2 \theta \sin^3 \varphi + \cos^2 \varphi \sin \varphi) d\varphi d\theta \\ &= \pi \int_0^\pi \sin^3 \varphi d\varphi + 2\pi \int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= \pi \left[-\cos \varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^\pi - 2\pi \left[\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^\pi = \frac{8}{3} \pi. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

Exemple Vérifier le Théorème de la divergence pour

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1 \text{ et } 0 < x_3 < 1 \right\} \text{ et } F(x_1, x_2, x_3) = \left((x_1)^2, 0, 0 \right).$$

Discussion (i) Calcul de $\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F$. On trouve que

$$\operatorname{div} F = 2x_1.$$

En passant aux coordonnées cylindriques, $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, $x_3 = z$, on obtient

$$\iiint_{\Omega} (2x_1) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 2r \cos \theta r dr d\theta dz = 0.$$

(ii) Calcul de $\iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds$. On a que

$$\partial\Omega = \overline{\Sigma}_0 \cup \overline{\Sigma}_1 \cup \overline{\Sigma}_2,$$

où

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1 \text{ et } x_3 = 0 \right\} \\ \Sigma_1 &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 < 1 \text{ et } x_3 = 1 \right\} \\ \Sigma_2 &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 \text{ et } 0 < x_3 < 1 \right\}, \end{aligned}$$

dont les paramétrisations et les normales sont données respectivement par

$$\sigma^0(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0) \Rightarrow \sigma_r^0 \wedge \sigma_\theta^0 = (0, 0, r), \text{ (normale intérieure)}$$

$$\sigma^1(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1) \Rightarrow \sigma_r^1 \wedge \sigma_\theta^1 = (0, 0, r), \text{ (normale extérieure)}$$

$$\sigma^2(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z) \Rightarrow \sigma_\theta^2 \wedge \sigma_z^2 = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \text{ (normale extérieure).}$$

On obtient par conséquent

$$\iint_{\Sigma_0} \langle F; \nu \rangle ds = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle (r^2 \cos^2 \theta, 0, 0); (0, 0, r) \rangle dr d\theta = 0$$

$$\iint_{\Sigma_1} \langle F; \nu \rangle ds = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle (r^2 \cos^2 \theta, 0, 0); (0, 0, r) \rangle dr d\theta = 0$$

$$\iint_{\Sigma_2} \langle F; \nu \rangle ds = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle (\cos^2 \theta, 0, 0); (\cos \theta, \sin \theta, 0) \rangle d\theta dz = 0.$$

Finalement on a bien trouvé que

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds = 0. \spadesuit$$

6.2 Démonstration du théorème

On conclut maintenant avec la démonstration du Théorème de la divergence. On ne va la faire que dans un cas simple, où le domaine n'a pas de trous et a une structure très simple. Dans le cas plus général on procède comme dans le Théorème de Green et pour des démonstrations plus complètes on peut se référer à [4] 397-407, [13] 340-349 et [21] 475-479.

Définition 6.4 On dit qu'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est x_3 -simple s'il existe $A \subset \mathbb{R}^2$ tel que ∂A soit une courbe simple fermée régulière par morceaux et il existe

$$\alpha, \beta \in C^1(\overline{A})$$

tels que

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in A, \alpha(x_1, x_2) < x_3 < \beta(x_1, x_2)\}.$$

De même on aura la notion d'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ x_1 -simple et x_2 -simple.

Remarque (i) Le cube

$$\Omega =]-1, 1[)^3$$

est à la fois x_1 -simple, x_2 -simple et x_3 -simple ; car on peut choisir $\alpha = -1$ et $\beta = 1$, c'est à dire

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in (]-1, 1[)^2, -1 < x_3 < 1 \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_3) \in (]-1, 1[)^2, -1 < x_2 < 1 \right\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_2, x_3) \in (]-1, 1[)^2, -1 < x_1 < 1 \right\}.\end{aligned}$$

(ii) On peut supposer, presque sans changements, que les deux fonctions sont seulement

$$\alpha, \beta \in C(\overline{A}) \cap C_{morc}^1(A).$$

Dans ce cas beaucoup d'autres domaines deviennent à la fois x_1 -simple, x_2 -simple et x_3 -simple ; par exemple : la sphère. ♠

Démonstration (Théorème 6.2). On va démontrer le théorème seulement dans le cas où Ω est un domaine régulier qui est aussi simultanément x_1 -simple, x_2 -simple et x_3 -simple. Plus précisément on va montrer que si Ω est x_3 -simple alors

$$\iiint_{\Omega} F_{x_3}^3 dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} F^3 \nu_3 ds.$$

De même en supposant que Ω est x_2 -simple (respectivement x_1 -simple) on aura alors

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} F_{x_2}^2 dx_1 dx_2 dx_3 &= \iint_{\partial\Omega} F^2 \nu_2 ds \\ \iiint_{\Omega} F_{x_1}^1 dx_1 dx_2 dx_3 &= \iint_{\partial\Omega} F^1 \nu_1 ds.\end{aligned}$$

La combinaison de ces trois résultats, donne le théorème. Comme les trois cas sont traités de la même façon, on ne montrera que le premier cas.

Etape 1. Calculons tout d'abord $\iiint_{\Omega} F_{x_3}^3$. On a tout de suite

$$\iiint_{\Omega} F_{x_3}^3 dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_A \int_{\alpha(x_1, x_2)}^{\beta(x_1, x_2)} F_{x_3}^3 dx_1 dx_2 dx_3$$

et donc

$$\iiint_{\Omega} F_{x_3}^3 = \iint_A [F^3(x_1, x_2, \beta(x_1, x_2)) - F^3(x_1, x_2, \alpha(x_1, x_2))] dx_1 dx_2.$$

Etape 2. Calculons maintenant $\iint_{\partial\Omega} F^3 \nu_3 ds$. Noter que

$$\partial\Omega = \overline{\Sigma}_{\beta} \cup \overline{\Sigma}_{\alpha} \cup \overline{\Sigma}_c$$

où

$$\begin{aligned}\Sigma_\beta &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in A, x_3 = \beta(x_1, x_2)\} \\ &= \{\sigma^\beta(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \beta(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in A\} \\ \Sigma_\alpha &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in A, x_3 = \alpha(x_1, x_2)\} \\ &= \{\sigma^\alpha(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \alpha(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in A\}.\end{aligned}$$

Enfin pour bien paramétrer

$$\Sigma_c = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \partial A, \alpha(x_1, x_2) < x_3 < \beta(x_1, x_2)\}$$

il faut paramétrer le bord de A (ici on fait aussi l'hypothèse que ∂A est régulière, mais la démonstration est quasiment identique si le bord est seulement régulier par morceaux) disons par

$$\partial A = \{(x_1, x_2) = \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \mathbb{R}^2 \text{ où } t \in [a, b]\}$$

et ainsi

$$\Sigma_c = \{\sigma^c(t, x_3) = (\gamma(t), x_3) : t \in [a, b], \alpha(\gamma(t)) < x_3 < \beta(\gamma(t))\}.$$

(Remarquer que $\overline{\Sigma}_\beta \cap \overline{\Sigma}_c \neq \emptyset$ et $\overline{\Sigma}_\alpha \cap \overline{\Sigma}_c \neq \emptyset$, mais ces ensembles ont une contribution nulle à l'intégrale). Calculons les normales correspondantes

$$\begin{aligned}\sigma_{x_1}^\beta \wedge \sigma_{x_2}^\beta &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \beta_{x_1} \\ 0 & 1 & \beta_{x_2} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_{x_1} \\ -\beta_{x_2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_{x_1}^\alpha \wedge \sigma_{x_2}^\alpha &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \alpha_{x_1} \\ 0 & 1 & \alpha_{x_2} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_{x_1} \\ -\alpha_{x_2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_t^c \wedge \sigma_{x_3}^c &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \gamma_1'(t) & \gamma_2'(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Les normales extérieures unitaires à Σ_β et Σ_α sont donc respectivement

$$\nu_\beta = \frac{(-\beta_{x_1}, -\beta_{x_2}, 1)}{|(-\beta_{x_1}, -\beta_{x_2}, 1)|} \quad \text{et} \quad \nu_\alpha = \frac{(\alpha_{x_1}, \alpha_{x_2}, -1)}{|(\alpha_{x_1}, \alpha_{x_2}, -1)|}$$

alors que la normale extérieure unitaire à Σ_c a comme troisième composante

$$(\nu_c)_3 = 0.$$

Par conséquent on obtient

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma_\beta} F^3 (\nu_\beta)_3 \, ds \\ = & \iint_A F^3 (x_1, x_2, \beta (x_1, x_2)) \frac{1}{|(-\beta_{x_1}, -\beta_{x_2}, 1)|} |(-\beta_{x_1}, -\beta_{x_2}, 1)| \, dx_1 \, dx_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma_\alpha} F^3 (\nu_\alpha)_3 \, ds \\ = & \iint_A F^3 (x_1, x_2, \alpha (x_1, x_2)) \frac{-1}{|(\alpha_{x_1}, \alpha_{x_2}, -1)|} |(\alpha_{x_1}, \alpha_{x_2}, -1)| \, dx_1 \, dx_2 \end{aligned}$$

et

$$\iint_{\Sigma_c} F^3 (\nu_c)_3 \, ds = 0.$$

En combinant les trois résultats, on a bien démontré que

$$\iint_{\partial\Omega} F^3 \nu_3 \, ds = \iint_A [F^3 (x_1, x_2, \beta (x_1, x_2)) - F^3 (x_1, x_2, \alpha (x_1, x_2))] \, dx_1 \, dx_2.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. ■

6.3 Exercices

De nombreux autres exercices concernant ce chapitre, notamment Exercices 6 et 9, se trouvent au Chapitre 6 de [9].

6.3.1 Quelques exercices calculatoires

Exercice 6.1 Soient $F(x, y, z) = (x, x^2y, 0)$ et

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + y^2)^2 < z < \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

Vérifier le Théorème de la divergence.

Exercice 6.2 Soient $F(x, y, z) = (0, 0, z)$ et

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{2}{9} (x^2 + y^2) < z < 1 - \left| 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \right| \right\}.$$

Vérifier le Théorème de la divergence.

6.3.2 Identités de Green et applications

Exercice 6.3 (Identités de Green dans l'espace) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier, ν la normale extérieure unité à $\partial\Omega$. Pour tout $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, vérifier les trois identités suivantes

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} [v \Delta u + \langle \nabla u; \nabla v \rangle] dx dy dz &= \iint_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \\ \iiint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx dy dz &= \iint_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] ds \\ \iiint_{\Omega} \Delta u dx dy dz &= \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds. \end{aligned}$$

Exercice 6.4 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ domaine régulier, $f \in C^0(\overline{\Omega})$ et $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$.

(i) Soit le problème

$$\begin{cases} \Delta w(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial \nu}(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (6.1)$$

où $w \in C^2(\overline{\Omega})$ est l'inconnue. Déterminer l'ensemble des solutions de (6.1).

(ii) Que peut-on dire sur l'unicité des solutions du problème

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \varphi(x) & \text{si } x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (6.2)$$

(iii) Si (6.2) admet une solution $u \in C^2(\overline{\Omega})$, quelle condition nécessaire doivent satisfaire f et φ ?

6.3.3 Autres applications du Théorème de la divergence

Exercice 6.5 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et ν la normale extérieure unité à $\partial\Omega$. Soit $u \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ tel que

$$u = \nu \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

(i) Montrer que

$$\text{Aire}(\partial\Omega) = \iiint_{\Omega} \text{div } u.$$

(ii) A l'aide de la question précédente, montrer que si Ω est la boule centrée en 0 et de rayon R , alors

$$\text{Aire}(\partial\Omega) = \frac{3}{R} \text{Volume}(\Omega).$$

Exercice 6.6 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, $f, g \in C^0(\overline{\Omega})$.

(i) Soit $k > 0$ entier et $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$(a_1 + \dots + a_k)^2 \leq k (a_1^2 + \dots + a_k^2).$$

(ii) Montrer que

$$\iiint_{\Omega} |f(x) g(x)| dx \leq \left(\iiint_{\Omega} f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iiint_{\Omega} g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Indication. On pourra utiliser soit le fait que

$$ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2.$$

(iii) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier. A l'aide de la question précédente, montrer que si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Alors il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\iiint_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \leq \gamma \left(\iiint_{\Omega} u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iiint_{\Omega} |\nabla^2 u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

où $\nabla^2 u$ est la matrice Hessienne de u et

$$|\nabla^2 u(x)|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} (u_{x_i x_j})^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2.$$

Exercice 6.7 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et ν une normale extérieure unité à Ω . Soit $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, montrer alors que

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{rot} F dx = - \iint_{\partial\Omega} (F \wedge \nu) ds.$$

Exercice 6.8 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $u \not\equiv 0$, tels que

$$\begin{cases} \Delta u(x) = \lambda u(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

A l'aide du Théorème de la divergence, montrer que $\lambda < 0$.

Exercice 6.9 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et $\nu = \nu(x)$ la normale extérieure unité en $x \in \partial\Omega$.

- On dénote le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 par $\langle \cdot; \cdot \rangle$, c'est à dire

$$\langle x; y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

- On note

$$\mathcal{H}(\overline{\Omega}) = \left\{ G \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3) : \begin{cases} \operatorname{div} G = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{rot} G = 0 & \text{dans } \Omega \\ \langle G; \nu \rangle = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \right\}.$$

(i) Montrer que, pour tout $f \in C^1(\overline{\Omega})$ et $G \in \mathcal{H}(\overline{\Omega})$,

$$\operatorname{div}(fG) = \langle \operatorname{grad} f; G \rangle.$$

(ii) Montrer, à l'aide du Théorème de la divergence, que, pour tout $f \in C^1(\overline{\Omega})$ et $G \in \mathcal{H}(\overline{\Omega})$,

$$\iiint_{\Omega} \langle \operatorname{grad} f(x); G(x) \rangle dx = 0.$$

(iii) A l'aide de la question précédente, montrer que si Ω est simplement connexe alors

$$G \in \mathcal{H}(\overline{\Omega}) \Leftrightarrow G \equiv 0.$$

Exercice 6.10 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et soit ν la normale extérieure unité à $\partial\Omega$. On note pour

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

le produit scalaire et la norme par

$$\langle x; y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad \text{et} \quad |x| = \langle x; x \rangle^{1/2} = \left((x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 \right)^{1/2}.$$

Soit

$$F(x) = \frac{x}{|x|^3}.$$

(i) Montrer que si B est une boule ouverte de \mathbb{R}^3 centrée en 0, alors

$$\iint_{\partial B} \langle F; \nu \rangle ds = 4\pi.$$

(ii) Montrer que si $0 \notin \overline{\Omega}$, alors

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds = 0.$$

(iii) Montrer que si $0 \in \Omega$, alors

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds = 4\pi.$$

Exercice 6.11 Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ une fonction harmonique dans \mathbb{R}^3 (c'est à dire que $\Delta u = 0$ dans \mathbb{R}^3). Soient $r > 0$ et

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < r\} \quad \text{où} \quad |x| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}.$$

Soit $\nu = \nu(x) = \frac{x}{|x|}$ la normale extérieure unité à ∂B_r en x . On dénote le produit scalaire de deux vecteurs x et y par $\langle x; y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$.

(i) Montrer que

$$\iint_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0 \quad \text{où} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \text{grad } u; \nu \rangle.$$

(ii) Montrer que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4\pi \epsilon^2} \iint_{\partial B_\epsilon} u ds \right] = u(0).$$

(iii) Soit, pour $x \neq 0$,

$$\psi(x) = \frac{1}{|x|}.$$

Montrer que

$$\Delta \psi = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

et que si $x \in \partial B_r$, alors

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu}(x) = \langle \text{grad } \psi(x); \nu(x) \rangle = \frac{-1}{r^2}.$$

(iv) Soit $\Omega = B_r \setminus B_\epsilon$ où $0 < \epsilon < r$. Calculer, dans Ω ,

$$\text{div}(u \text{ grad } \psi - \psi \text{ grad } u)$$

et en déduire que

$$\iint_{\partial \Omega} \left[u \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - \psi \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] ds = 0.$$

Montrer à l'aide du calcul précédent et des questions précédentes que

$$\frac{1}{r^2} \iint_{\partial B_r} u ds = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\partial B_\epsilon} u ds.$$

(v) Dédurre des questions précédentes que

$$u(0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B_r} u ds.$$

Exercice 6.12 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier, $a \in C^1(\overline{\Omega})$, $f \in C^0(\overline{\Omega})$ et $u = (u_1, u_2, u_3) \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$\begin{cases} \operatorname{div} u + \langle \operatorname{grad} a; u \rangle = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où $\langle \cdot; \cdot \rangle$ dénote le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 . Montrer, à l'aide du Théorème de la divergence, que

$$\iiint_{\Omega} e^{a(x)} f(x) dx = 0.$$

Exercice 6.13 Soient B la boule unité de \mathbb{R}^3 et $u \in C^1(\overline{B})$.

(i) Montrer que, pour tout x dans B ,

$$\operatorname{div} [x (u(x))^2] \geq 2 [u(x)]^2 - |\operatorname{grad} u(x)|^2$$

où pour $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ on note $|\xi|^2 = (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)^2$.

(ii) A l'aide du Théorème de la divergence, montrer que

$$\iiint_B [u(x)]^2 dx \leq \frac{1}{2} \iiint_B |\operatorname{grad} u(x)|^2 dx + \frac{1}{2} \iint_{\partial B} [u(x)]^2 ds.$$

Exercice 6.14 Soient B la boule unité de \mathbb{R}^3 et $u \in C^1(\overline{B})$. Pour

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3$$

on note le produit scalaire et la norme par

$$\langle \xi; \eta \rangle = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 \quad \text{et} \quad |\xi|^2 = (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)^2.$$

(i) Montrer que

$$\iint_{\partial B} u^2 ds = 3 \iiint_B u^2 dx + \iiint_B \langle x; \operatorname{grad} (u^2) \rangle dx.$$

Suggestions. Observer que, pour tout $x \in \partial B$,

$$[u(x)]^2 = \left\langle x; x [u(x)]^2 \right\rangle$$

et appliquer le Théorème de la divergence.

(ii) Montrer que, pour tout $0 < \epsilon < 1$,

$$2 \langle \xi; \eta \rangle \leq \epsilon |\xi|^2 + \frac{|\eta|^2}{\epsilon}.$$

(iii) A l'aide des deux questions précédentes, déduire que

$$\iint_{\partial B} u^2 ds \leq \left(3 + \frac{1}{\epsilon}\right) \iiint_B u^2 dx + \epsilon \iiint_B |\operatorname{grad} u|^2 dx.$$

Exercice 6.15 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et $\nu = \nu(x)$ la normale extérieure unité en $x \in \partial\Omega$. On dénote le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 par $\langle \cdot; \cdot \rangle$, c'est à dire

$$\langle x; y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfaisant

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) + \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (6.3)$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \text{grad } u; \nu \rangle.$$

Montrer que $u \equiv 0$ est la seule solution du problème (6.3).

Suggestions. Multiplier l'équation $\Delta u = 0$ par u , puis utiliser le Théorème de la divergence.

Exercice 6.16 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier, $\alpha > 0$ et $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i, j \leq 3$, vérifiant

$$\sum_{i,j=1}^3 (a_{ij}(x) \xi_i \xi_j) \geq \alpha |\xi|^2 = \alpha \sum_{i=1}^3 (\xi_i)^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega} \text{ et } \forall \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Soit $u \in C^2(\overline{\Omega})$ une solution de

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^3 (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où on note les dérivées partielles d'une fonction f par f_{x_j} (au lieu de $\partial f / \partial x_j$) et idem pour les dérivées d'ordre supérieur. Montrer que $u = 0$ est la seule solution du problème.

Suggestion. Multiplier l'équation par u et utiliser le Théorème de la divergence.

Exercice 6.17 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ la normale extérieure unité. On dénote le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 par $\langle \cdot; \cdot \rangle$, c'est à dire

$$\langle x; y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

et le produit vectoriel par \wedge , c'est à dire

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que si $F, G \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$, alors

$$\iiint_{\Omega} [\langle \text{rot } F; G \rangle - \langle F; \text{rot } G \rangle] dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_{\partial\Omega} \langle \nu \wedge F; G \rangle ds.$$

Exercice 6.18 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domaine régulier et $u \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$. Soient

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{et} \quad u = u(x) = (u^1(x), u^2(x), u^3(x)).$$

On note pour $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ la norme par

$$|\xi|^2 = (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)^2$$

et

$$|\nabla u|^2 = |\text{grad } u^1|^2 + |\text{grad } u^2|^2 + |\text{grad } u^3|^2.$$

(i) Vérifier que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[|\text{rot } u|^2 + |\text{div } u|^2 - |\nabla u|^2 \right] \\ &= \left[(u^1 u_{x_2}^2)_{x_1} - (u^1 u_{x_1}^2)_{x_2} \right] + \left[(u^1 u_{x_3}^3)_{x_1} - (u^1 u_{x_1}^3)_{x_3} \right] \\ & \quad + \left[(u^2 u_{x_3}^3)_{x_2} - (u^2 u_{x_2}^3)_{x_3} \right] \end{aligned}$$

où on note, comme d'habitude, les dérivées partielles d'une fonction f par f_{x_j} (au lieu de $\partial f / \partial x_j$) et idem pour les dérivées d'ordre supérieur.

(ii) A l'aide de la question précédente et du Théorème de la divergence montrer que si de plus $u = 0$ sur $\partial\Omega$, alors

$$\iiint_{\Omega} |\nabla u|^2 = \iiint_{\Omega} |\text{rot } u|^2 + \iiint_{\Omega} |\text{div } u|^2.$$

6.4 Corrigés

Exercice 6.1 (i) On a $\text{div } F = 1 + x^2$ et $r^4 < z < r < 1$. On a ainsi (cf. Figure 6.2)

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \text{div } F &= \int_0^1 \int_{r^4}^r \int_0^{2\pi} (1 + r^2 \cos^2 \theta) r \, d\theta \, dz \, dr = \pi \int_0^1 \int_{r^4}^r (2r + r^3) \, dz \, dr \\ &= \pi \int_0^1 (2r + r^3) (r - r^4) \, dr = \pi \int_0^1 (2r^2 + r^4 - 2r^5 - r^7) \, dr \\ &= \pi \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right) = \frac{49}{120} \pi. \end{aligned}$$

(ii) On a $\partial\Omega = \Sigma^1 \cup \Sigma^2$ où

$$\Sigma^1 = \{ \sigma^1(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r^4) : (r, \theta) \in]0, 1[\times]0, 2\pi[\}$$

$$\Sigma^2 = \{ \sigma^2(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r) : (r, \theta) \in]0, 1[\times]0, 2\pi[\}.$$

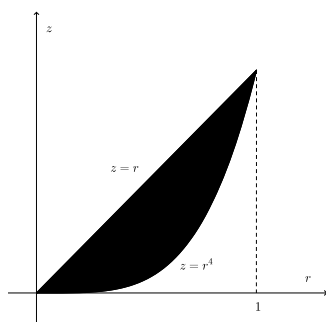


FIG. 6.2 –

Les normales sont

$$\sigma_r^1 \wedge \sigma_\theta^1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & 4r^3 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -4r^4 \cos \theta \\ -4r^4 \sin \theta \\ r \end{pmatrix};$$

$$\sigma_r^2 \wedge \sigma_\theta^2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cos \theta \\ -r \sin \theta \\ r \end{pmatrix};$$

qui sont respectivement des normales intérieure et extérieure. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^1} \langle F; \nu \rangle ds &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle (r \cos \theta, r^3 \cos^2 \theta \sin \theta, 0); (4r^4 \cos \theta, 4r^4 \sin \theta, r) \rangle d\theta dr \\ &= 4 \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^5 \cos^2 \theta + r^7 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\theta dr \\ &= \pi \int_0^1 (4r^5 + r^7) dr = \pi \left(\frac{4}{6} + \frac{1}{8} \right) = \frac{19}{24} \pi = \frac{95}{120} \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^2} \langle F; \nu \rangle ds &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle (r \cos \theta, r^3 \cos^2 \theta \sin \theta, 0); (-r \cos \theta, -r \sin \theta, -r) \rangle d\theta dr \\ &= - \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2 \theta + r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\theta dr \\ &= -\pi \int_0^1 \left(r^2 + \frac{r^4}{4} \right) dr = -\pi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{20} \right) = -\frac{23}{60} \pi = -\frac{46}{120} \pi. \spadesuit \end{aligned}$$

Exercice 6.2 (i) On a $\operatorname{div} F = 1$ et $\frac{2}{9}r^2 < z < 1 - |1 - r|$. Le domaine s'écrit

(cf. Figure 6.3) donc

$$\frac{2}{9}r^2 < z < \begin{cases} r & r < 1 \\ 2-r & 1 < r < \frac{3}{2} \end{cases}.$$

On a ainsi

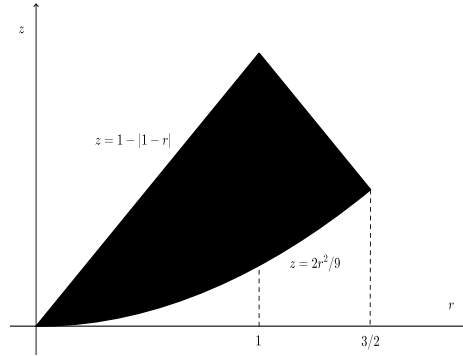


FIG. 6.3 –

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F &= \int_0^1 \int_{\frac{2}{9}r^2}^r \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dz \, dr + \int_1^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{2}{9}r^2}^{2-r} \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dz \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_{\frac{2}{9}r^2}^r r \, dz \, dr + 2\pi \int_1^{\frac{3}{2}} \int_{\frac{2}{9}r^2}^{2-r} r \, dz \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \left(r - \frac{2}{9}r^2 \right) r \, dr + 2\pi \int_1^{\frac{3}{2}} \left(2 - r - \frac{2}{9}r^2 \right) r \, dr \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F &= 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{2}{9} \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 + 2\pi \left(r^2 - \frac{r^3}{3} - \frac{2}{9} \frac{r^4}{4} \right) \Big|_1^{\frac{3}{2}} \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3} + \frac{1}{3} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{19}{24} - \frac{3^2}{2^5} \right) = \frac{19\pi}{12} - \frac{9\pi}{16}. \end{aligned}$$

(ii) On a $\partial\Omega = \Sigma^1 \cup \Sigma^2$ où

$$\Sigma^1 = \left\{ \sigma^1(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 1 - |1 - r|) : (r, \theta) \in \left] 0, \frac{3}{2} \right[\times]0, 2\pi[\right\}$$

$$\Sigma^2 = \left\{ \sigma^2(r, \theta) = \left(r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{2}{9} r^2 \right) : (r, \theta) \in \left] 0, \frac{3}{2} \right[\times]0, 2\pi[\right\}.$$

La normale à la première surface est, en observant que c'est une surface C^1 par morceaux,

$$\sigma_r^1 \wedge \sigma_\theta^1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -r \cos \theta \\ -r \sin \theta \\ r \end{pmatrix} \quad \text{pour } r < 1$$

$$\sigma_r^1 \wedge \sigma_\theta^1 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & -1 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ r \end{pmatrix} \quad \text{pour } 1 < r < \frac{3}{2}.$$

C'est une normale extérieure. Pour la seconde on trouve

$$\sigma_r^2 \wedge \sigma_\theta^2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & \frac{4}{9} r \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{9} r^2 \cos \theta \\ -\frac{4}{9} r^2 \sin \theta \\ r \end{pmatrix}.$$

C'est une normale intérieure. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^1} \langle F; \nu \rangle ds &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle (0, 0, r); (-r \cos \theta, -r \sin \theta, r) \rangle d\theta dr \\ &\quad + \int_1^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} \langle (0, 0, (2-r)); (r \cos \theta, r \sin \theta, r) \rangle d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r^2 dr + 2\pi \int_1^{\frac{3}{2}} r(2-r) dr \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^1} \langle F; \nu \rangle ds &= 2\pi \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{3}{2} \right)^2 - 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^3 + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{19\pi}{12}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^2} \langle F; \nu \rangle ds &= \int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} \left\langle \left(0, 0, \frac{2}{9} r^2 \right); \left(\frac{4}{9} r^2 \cos \theta, \frac{4}{9} r^2 \sin \theta, -r \right) \right\rangle d\theta dr \\ &= -2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{9} r^3 dr = -\frac{4}{9} \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^4}{4} \pi = -\frac{9\pi}{16}. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

Exercice 6.3 Il suffit, comme dans l'Exercice 4.2, d'appliquer le Théorème de la divergence à $u \nabla v$ et $v \nabla u$ pour obtenir le résultat. ♠

Exercice 6.4 (i) Soit $w \in C^2(\overline{\Omega})$ une solution de (6.1). Par la première identité de Green, nous avons

$$\iiint_{\Omega} |\nabla w|^2 = 0$$

ce qui implique que $\nabla w = 0$ et donc w est constante (car Ω est connexe). Ainsi, toutes les solutions de (6.1) sont des constantes.

(ii) Soient $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ deux solutions de (6.2). Alors $w = u - v$ est une solution de (6.1), et donc, par le point précédent, w est une constante. Le problème (6.2) admet donc une solution unique, à une constante près.

(iii) Comme

$$\iiint_{\Omega} \Delta u(x) dx = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$$

on a la condition nécessaire

$$\iiint_{\Omega} f(x) dx = \iint_{\partial\Omega} \varphi(x) ds. \quad \spadesuit$$

Exercice 6.5 (i) Par le théorème de la divergence et comme $\langle u; \nu \rangle = |\nu|^2 = 1$, on obtient

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} u = \iint_{\partial\Omega} \langle u; \nu \rangle ds = \iint_{\partial\Omega} ds = \operatorname{Aire}(\partial\Omega).$$

(ii) On choisit

$$u(x) = \frac{x}{R} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} u = \frac{3}{R}$$

et on infère le résultat. ♠

Exercice 6.6 (i) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $a = (a_1, \dots, a_k)$ et $1_k = (1, \dots, 1)$, nous avons

$$a_1 + \dots + a_k = \langle a; 1_k \rangle \leq |a| |1_k| = \sqrt{k} \sqrt{a_1^2 + \dots + a_k^2}$$

d'où le résultat.

(ii) Supposons que $\iiint_{\Omega} g^2, \iiint_{\Omega} f^2 > 0$ (autrement, le résultat est trivial).

En posant

$$a = \frac{|f(x)|}{\left(\iiint_{\Omega} f^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{et} \quad b = \frac{|g(x)|}{\left(\iiint_{\Omega} g^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

dans l'inégalité (i) avec $k = 2$, on obtient

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\left(\iiint_{\Omega} f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\iiint_{\Omega} g^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2} \frac{|f(x)|^2}{\iiint_{\Omega} f^2} + \frac{1}{2} \frac{|g(x)|^2}{\iiint_{\Omega} g^2}, \quad \forall x \in \Omega.$$

En intégrant l'inégalité, on obtient le résultat.

(iii) Utilisant la première identité de Green avec $v = u$ et le fait que $u = 0$ sur $\partial\Omega$ on trouve

$$\iiint_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx = - \iiint_{\Omega} u(x) \Delta u(x) dx \leq \iiint_{\Omega} |u(x)| |\Delta u(x)| dx.$$

L'inégalité obtenue au point (ii) implique que

$$\iiint_{\Omega} |u(x)| |\Delta u(x)| dx \leq \left(\iiint_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iiint_{\Omega} |\Delta u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Appliquant (i), nous avons, pour tout $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |\Delta u(x)|^2 &= \left(\sum_{i=1}^3 u_{x_i x_i}(x) \right)^2 \leq 3 \sum_{i=1}^3 (u_{x_i x_i}(x))^2 \leq 3 \sum_{1 \leq i, j \leq 3} (u_{x_i x_j}(x))^2 \\ &= 3 |\nabla^2 u(x)|^2. \end{aligned}$$

Pour finir, combinant tout ce qui précède, on a le résultat, à savoir,

$$\iiint_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \leq \sqrt{3} \left(\iiint_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iiint_{\Omega} |\nabla^2 u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \spadesuit$$

Exercice 6.7 Si $F = F(x_1, x_2, x_3) = (F^1, F^2, F^3)$. On a que

$$\operatorname{rot} F = (F_{x_2}^3 - F_{x_3}^2, F_{x_3}^1 - F_{x_1}^3, F_{x_1}^2 - F_{x_2}^1).$$

Le Théorème de la divergence donne alors

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (F_{x_2}^3 - F_{x_3}^2) &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} (0, F^3, -F^2) \\ &= \iint_{\partial\Omega} \langle (0, F^3, -F^2); (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \rangle \\ &= \iint_{\partial\Omega} (F^3 \nu_2 - F^2 \nu_3) = - \iint_{\partial\Omega} (F \wedge \nu)_1 \end{aligned}$$

et idem pour les deux autres quantités, à savoir

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (F_{x_3}^1 - F_{x_1}^3) &= - \iint_{\partial\Omega} (F \wedge \nu)_2 \\ \iiint_{\Omega} (F_{x_1}^2 - F_{x_2}^1) &= - \iint_{\partial\Omega} (F \wedge \nu)_3. \end{aligned}$$

C'est exactement ce que nous devons prouver. ♠

Exercice 6.8 Observer que

$$\operatorname{div} (u \operatorname{grad} u) = u \Delta u + \langle \operatorname{grad} u; \operatorname{grad} u \rangle$$

et donc, comme $\Delta u = \lambda u$ dans Ω , on obtient

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} (u \operatorname{grad} u) = \iiint_{\Omega} (\lambda u^2 + |\operatorname{grad} u|^2).$$

Par le Théorème de la divergence, en se rappelant que $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on déduit que

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\lambda u^2 + |\operatorname{grad} u|^2) &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} (u \operatorname{grad} u) \\ &= \iint_{\partial\Omega} \langle u \operatorname{grad} u; \nu \rangle = 0. \end{aligned}$$

Sachant que $u \not\equiv 0$ on infère bien que $\lambda < 0$. ♠

Exercice 6.9 (i) On a

$$\operatorname{div} (f G) = f \operatorname{div} G + \langle \operatorname{grad} f; G \rangle = \langle \operatorname{grad} f; G \rangle.$$

(ii) Par le Théorème de la divergence, comme $G \in \mathcal{H}(\overline{\Omega})$,

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} (f G) = \iint_{\partial\Omega} f \langle G; \nu \rangle ds = 0.$$

Et donc, à l'aide de la question précédente

$$\iiint_{\Omega} \langle \operatorname{grad} f(x); G(x) \rangle dx = 0.$$

(iii) Comme Ω est simplement connexe et $G \in \mathcal{H}(\overline{\Omega})$, il existe g tel que

$$G = \operatorname{grad} g.$$

En choisissant $f = g$ dans la question précédente, on déduit que

$$\iiint_{\Omega} |G|^2 = 0$$

et donc le résultat. ♠

Exercice 6.10 (i) Si B est une boule de rayon R centrée en 0, on a $\nu = x/|x|$ et donc sur ∂B on a

$$\left\langle \frac{x}{|x|^3}; \nu \right\rangle = \frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{R^2}.$$

On trouve donc que

$$\iint_{\partial B} \left\langle \frac{x}{|x|^3}; \nu \right\rangle ds = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} (R^2 \sin \varphi) d\theta d\varphi = 4\pi.$$

(ii) On observe que si $0 \notin \overline{\Omega}$, alors pour tout $x \in \overline{\Omega}$ on a

$$\operatorname{div} F(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{x_1}{|x|^3} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{x_2}{|x|^3} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{x_3}{|x|^3} \right] = 0.$$

En effet

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{|x|^3} \right] = -3|x|^{-4} \frac{x_i}{|x|} = \frac{-3x_i}{|x|^5}$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{x_i}{|x|^3} \right] = \frac{1}{|x|^3} - 3 \frac{(x_i)^2}{|x|^5} = \frac{|x|^2 - 3(x_i)^2}{|x|^5}$$

d'où le résultat $\operatorname{div} F = 0$. On peut alors appliquer le Théorème de la divergence et on obtient

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F = 0.$$

(iii) Si $0 \in \Omega$, on commence par enlever une petite boule B centrée en 0 et telle que $\overline{B} \subset \Omega$. On applique alors la deuxième question à $\Omega \setminus \overline{B}$ et on trouve donc

$$\iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds = \iint_{\partial B} \langle F; \nu \rangle ds.$$

Puis on utilise la première question pour obtenir le résultat souhaité. ♠

Exercice 6.11 (i) Par le Théorème de la divergence on a

$$\iint_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = \iiint_{B_r} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) dx = \iiint_{B_r} \Delta u dx = 0.$$

(ii) Comme $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ et que

$$\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \iint_{\partial B_\epsilon} ds = 1$$

on a le résultat. En effet si on pose

$$c = \max \{ |\nabla u(x)| : x \in \overline{B_r} \}$$

on a, pour $x \in \partial B_\epsilon$,

$$|u(x) - u(0)| \leq c|x| = c\epsilon$$

et donc

$$\left| \left[\frac{1}{4\pi\epsilon^2} \iint_{\partial B_\epsilon} u ds \right] - u(0) \right| = \left| \frac{1}{4\pi\epsilon^2} \iint_{\partial B_\epsilon} [u(x) - u(0)] ds \right| \leq c\epsilon.$$

En laissant $\epsilon \rightarrow 0$, on infère le résultat souhaité.

(iii) On a tout de suite que, si $i = 1, 2, 3$,

$$\psi_{x_i} = \frac{-x_i}{|x|^3} \quad \text{et} \quad \psi_{x_i x_i} = \frac{3(x_i)^2 - |x|^2}{|x|^5}.$$

On trouve ainsi

$$\Delta\psi = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu}(x) = \langle \text{grad } \psi(x); \nu(x) \rangle = \left\langle -\frac{x}{|x|^3}; \frac{x}{|x|} \right\rangle = \frac{-1}{|x|^2} = \frac{-1}{r^2}.$$

(iv) On obtient immédiatement que

$$\text{div}(u \text{ grad } \psi - \psi \text{ grad } u) = u \Delta\psi - \psi \Delta u = 0$$

et donc par le Théorème de la divergence

$$\iint_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \psi \frac{\partial u}{\partial\nu} \right] ds = \iiint_{\Omega} \text{div}(u \text{ grad } \psi - \psi \text{ grad } u) dx = 0.$$

On a donc

$$\iint_{\partial B_r} \left[u \frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \psi \frac{\partial u}{\partial\nu} \right] ds = \iint_{\partial B_\epsilon} \left[u \frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \psi \frac{\partial u}{\partial\nu} \right] ds$$

et par conséquent

$$\iint_{\partial B_r} u \frac{\partial\psi}{\partial\nu} ds = \iint_{\partial B_\epsilon} u \frac{\partial\psi}{\partial\nu} ds$$

qui implique

$$\frac{1}{r^2} \iint_{\partial B_r} u ds = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{\partial B_\epsilon} u ds.$$

(v) En laissant $\epsilon \rightarrow 0$ dans la question précédente et en utilisant la deuxième question on trouve le résultat souhaité, à savoir

$$\frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B_r} u ds = u(0). \quad \spadesuit$$

Exercice 6.12 On commence par multiplier l'équation par e^a et on observe que

$$e^a f = e^a \text{div } u + e^a \langle \text{grad } a; u \rangle = \text{div}(e^a u).$$

On applique alors le Théorème de la divergence pour obtenir que (ν dénotant la normale extérieure unité à $\partial\Omega$)

$$\iiint_{\Omega} e^a f = \iiint_{\Omega} \text{div}(e^a u) = \iint_{\partial\Omega} \langle e^a u; \nu \rangle.$$

Comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$ on a le résultat. \spadesuit

Exercice 6.13 (i) On a

$$\operatorname{div} [x u^2] = 3 u^2 + 2 u \langle x; \operatorname{grad} u \rangle \geq 3 u^2 - 2 |u| |x| |\operatorname{grad} u|$$

et comme $|x| \leq 1$

$$\operatorname{div} [x u^2] \geq 3 u^2 - 2 |u| |\operatorname{grad} u| \geq 3 u^2 - (u^2 + |\operatorname{grad} u|^2) = 2 u^2 - |\operatorname{grad} u|^2.$$

(ii) Par le Théorème de la divergence on trouve

$$\iiint_B \operatorname{div} [x (u(x))^2] dx = \iint_{\partial B} [u(x)]^2 ds.$$

En invoquant alors la première question, on obtient

$$\iint_{\partial B} [u(x)]^2 ds \geq 2 \iiint_B [u(x)]^2 dx - \iiint_B |\operatorname{grad} u(x)|^2 dx$$

ce qui est le résultat souhaité. ♠

Exercice 6.14 (i) Comme sur ∂B on a $x = \nu$ (la normale extérieure unité), on trouve, par le Théorème de la divergence, que

$$\begin{aligned} \iint_{\partial B} u^2 ds &= \iint_{\partial B} |x|^2 u^2 ds = \iint_{\partial B} \langle \nu; x u^2 \rangle ds \\ &= \iiint_B \operatorname{div} (x u^2) dx = 3 \iiint_B u^2 dx + \iiint_B \langle x; \operatorname{grad} (u^2) \rangle dx. \end{aligned}$$

(ii) Cette inégalité suit immédiatement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, à savoir

$$2 \langle \xi; \eta \rangle \leq 2 |\xi| |\eta| \leq \epsilon |\xi|^2 + \frac{|\eta|^2}{\epsilon} = \left(\sqrt{\epsilon} |\xi|^2 - \frac{|\eta|^2}{\sqrt{\epsilon}} \right)^2 + 2 |\xi| |\eta|.$$

(iii) En combinant (i) et (ii) on trouve (en se rappelant que dans B on a $|x| \leq 1$)

$$\begin{aligned} \iint_{\partial B} u^2 ds &\leq 3 \iiint_B u^2 dx + \iiint_B 2 |x| |u| |\operatorname{grad} u| dx \\ &\leq 3 \iiint_B u^2 dx + \iiint_B \left[\epsilon |\operatorname{grad} u|^2 + \frac{|u|^2}{\epsilon} \right] dx \end{aligned}$$

ce qui est le résultat souhaité. ♠

Exercice 6.15 On observe que

$$0 = u \Delta u = \operatorname{div} (u \operatorname{grad} u) - \langle \operatorname{grad} u; \operatorname{grad} u \rangle.$$

Et donc, en utilisant le Théorème de la divergence, on trouve

$$0 = \iint_{\partial\Omega} u \langle \text{grad } u; \nu \rangle ds - \iiint_{\Omega} |\text{grad } u(x)|^2 dx.$$

Finalement, en invoquant le fait que $(\partial u / \partial \nu) = -u$ sur $\partial\Omega$, on obtient

$$0 = - \iint_{\partial\Omega} |u(x)|^2 ds - \iiint_{\Omega} |\text{grad } u(x)|^2 dx$$

et donc $\text{grad } u = 0$ dans Ω et $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Par conséquent $u \equiv 0$, comme souhaité. ♠

Exercice 6.16 Par le Théorème de la divergence on a

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^3 (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} u \right] \\ &= \iint_{\partial\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^3 (a_{ij} u_{x_i}) \nu_j u \right] - \iiint_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^3 (a_{ij} u_{x_i} u_{x_j}) \right] \end{aligned}$$

où ν dénote la normale extérieure unité. Comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et de l'hypothèse sur a_{ij} appliquée à $\xi_i = u_{x_i}$, on déduit que

$$0 = \iiint_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^3 (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} u \right] \leq -\alpha \iiint_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq 0.$$

Par conséquent $\nabla u = 0$ dans Ω et comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, on a bien montré que la seule solution du problème est $u = 0$. ♠

Exercice 6.17 Si $F = (F^1, F^2, F^3)$ et $G = (G^1, G^2, G^3)$ on a que

$$\langle \text{rot } F; G \rangle = (F_{x_2}^3 - F_{x_3}^2) G^1 + (F_{x_3}^1 - F_{x_1}^3) G^2 + (F_{x_1}^2 - F_{x_2}^1) G^3$$

$$\langle \text{rot } G; F \rangle = (G_{x_2}^3 - G_{x_3}^2) F^1 + (G_{x_3}^1 - G_{x_1}^3) F^2 + (G_{x_1}^2 - G_{x_2}^1) F^3.$$

On a, par le Théorème de la divergence, que

$$\iiint_{\Omega} (F_{x_2}^3 - F_{x_3}^2) G^1 = \iint_{\partial\Omega} (F^3 \nu_2 - F^2 \nu_3) G^1 ds - \iiint_{\Omega} (F^3 G_{x_2}^1 - F^2 G_{x_3}^1)$$

$$\iiint_{\Omega} (F_{x_3}^1 - F_{x_1}^3) G^2 = \iint_{\partial\Omega} (F^1 \nu_3 - F^3 \nu_1) G^2 ds - \iiint_{\Omega} (F^1 G_{x_3}^2 - F^3 G_{x_1}^2)$$

$$\iiint_{\Omega} (F_{x_1}^2 - F_{x_2}^1) G^3 = \iint_{\partial\Omega} (F^2 \nu_1 - F^1 \nu_2) G^3 ds - \iiint_{\Omega} (F^2 G_{x_1}^3 - F^1 G_{x_2}^3)$$

et donc

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \langle \operatorname{rot} F; G \rangle &= \iint_{\partial\Omega} \langle \nu \wedge F; G \rangle \, ds + \iiint_{\Omega} F^1 (G_{x_2}^3 - G_{x_3}^2) \\ &\quad + \iiint_{\Omega} F^2 (G_{x_3}^1 - G_{x_1}^3) + \iiint_{\Omega} F^3 (G_{x_1}^2 - G_{x_2}^1) \end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité. ♠

Exercice 6.18 (i) On a que

$$\begin{aligned} |\operatorname{rot} u|^2 &= (u_{x_2}^1 - u_{x_1}^2)^2 + (u_{x_3}^1 - u_{x_1}^3)^2 + (u_{x_3}^2 - u_{x_2}^3)^2 \\ |\operatorname{div} u|^2 &= (u_{x_1}^1 + u_{x_2}^2 + u_{x_3}^3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\nabla u|^2 &= \left[(u_{x_1}^1)^2 + (u_{x_2}^1)^2 + (u_{x_3}^1)^2 \right] + \left[(u_{x_1}^2)^2 + (u_{x_2}^2)^2 + (u_{x_3}^2)^2 \right] \\ &\quad + \left[(u_{x_1}^3)^2 + (u_{x_2}^3)^2 + (u_{x_3}^3)^2 \right] \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left[|\operatorname{rot} u|^2 + |\operatorname{div} u|^2 - |\nabla u|^2 \right] \\ &= \left[(u_{x_1}^1 u_{x_2}^2) - (u_{x_2}^1 u_{x_1}^2) \right] + \left[(u_{x_1}^1 u_{x_3}^3) - (u_{x_3}^1 u_{x_1}^3) \right] + \left[(u_{x_2}^2 u_{x_3}^3) - (u_{x_3}^2 u_{x_2}^3) \right]. \end{aligned}$$

Le résultat suit alors immédiatement en se rappelant que $u \in C^2$.

(ii) On observe enfin que comme $u = 0$ sur $\partial\Omega$, alors (en invoquant le Théorème de la divergence et $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ dénotant la normale extérieure unité)

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left[(u^1 u_{x_2}^2)_{x_1} - (u^1 u_{x_1}^2)_{x_2} \right] &= \iint_{\partial\Omega} [(u^1 u_{x_2}^2) \nu_1 - (u^1 u_{x_1}^2) \nu_2] = 0 \\ \iiint_{\Omega} \left[(u^1 u_{x_3}^3)_{x_1} - (u^1 u_{x_1}^3)_{x_3} \right] &= \iint_{\partial\Omega} [(u^1 u_{x_3}^3) \nu_1 - (u^1 u_{x_1}^3) \nu_3] = 0 \\ \iiint_{\Omega} \left[(u^2 u_{x_3}^3)_{x_2} - (u^2 u_{x_2}^3)_{x_3} \right] &= \iint_{\partial\Omega} [(u^2 u_{x_3}^3) \nu_2 - (u^2 u_{x_2}^3) \nu_3] = 0 \end{aligned}$$

et c'est bien, en combinant avec (i), ce qu'il fallait démontrer. ♠

Chapitre 7

Le Théorème de Stokes

7.1 Le Théorème de Stokes

Théorème 7.1 (Théorème de Stokes) Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface régulière par morceaux et orientable. Soit $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F = (F^1, F^2, F^3)$, où les F^i sont C^1 sur un ouvert contenant Σ alors

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds = \int_{\partial \Sigma} F \cdot dl.$$

Rappel. On rappelle uniquement ce qui est nécessaire pour vérifier le Théorème de Stokes et pour plus de détails sur les surfaces nous référons au Chapitre 5.

(i) Pour toutes les surfaces régulières par morceaux $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, avec paramétrisation $\sigma = \sigma(u, v) : \bar{A} \rightarrow \Sigma$, que nous considérerons, le bord de Σ , noté $\partial \Sigma$, sera donné par $\sigma(\partial A)$ où on a enlevé les parties qui sont parcourues deux fois dans des sens opposés ainsi que les points (cf. les exemples plus bas).

(ii) Une fois choisie une paramétrisation $\sigma : \bar{A} \rightarrow \Sigma$, la normale $\sigma_u \wedge \sigma_v$ est donnée et l'intégrale de surface est donc comprise comme intégrale dans la direction $\sigma_u \wedge \sigma_v$ c'est-à-dire

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds = \iint_A \langle \operatorname{rot} F(\sigma(u, v)); \sigma_u \wedge \sigma_v \rangle du dv.$$

Par ailleurs le sens de parcours de $\partial \Sigma$ est alors celui induit par la paramétrisation $\sigma : \bar{A} \rightarrow \Sigma$ et c'est donc celui obtenu en parcourant positivement ∂A . ♠

Exemples (cf. Chapitre 5 pour plus de détails).

(i) (**Sphère**) Soit $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1\}$ alors $\partial \Sigma = \emptyset$. Une paramétrisation régulière par morceaux de Σ est donnée par

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi), \quad (\theta, \varphi) \in \bar{A}$$

où $A =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$.

(ii) (**Demi-sphère**) Si

$$\Sigma = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1 \text{ et } x_3 \geq 0 \right\}$$

alors

$$\partial\Sigma = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 \text{ et } x_3 = 0 \right\}$$

et le sens de parcours de $\partial\Sigma$ induit par la paramétrisation

$$\sigma(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi), \quad (\theta, \varphi) \in \overline{A}$$

(où $A =]0, 2\pi[\times]0, \pi/2[$) est le sens de parcours négatif (c'est-à-dire $\theta : 2\pi \rightarrow 0$). On a aussi que la normale est donnée par

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = -\sin \varphi (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi).$$

(iii) (**Cylindre**) Si

$$\Sigma = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 \text{ et } 0 \leq x_3 \leq 1 \right\}$$

alors

$$\partial\Sigma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$$

où

$$\Gamma_0 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 \text{ et } x_3 = 0 \right\}$$

et

$$\Gamma_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 \text{ et } x_3 = 1 \right\}.$$

Si on choisit comme paramétrisation

$$\sigma(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z), \quad (\theta, z) \in \overline{A}$$

avec $A =]0, 2\pi[\times]0, 1[$, alors le sens de parcours de $\partial\Sigma$, induit par la paramétrisation σ , est le sens positif sur Γ_0 ($\theta : 0 \rightarrow 2\pi$) et négatif sur Γ_1 ($\theta : 2\pi \rightarrow 0$). Par ailleurs le champ de normale unité (induit par la paramétrisation) est

$$\nu = \sigma_\theta \wedge \sigma_z = (\cos \theta, \sin \theta, 0). \quad \spadesuit$$

Exemple Vérifier le Théorème de Stokes pour $F(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_1, x_2)$ et

$$\Sigma = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_3)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 \text{ et } 0 \leq x_3 \leq 1 \right\}.$$

Noter que la surface ne satisfait pas exactement les hypothèses du théorème, mais on peut facilement montrer que le théorème est vrai pour de telles surfaces.

Discussion (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds$. On a

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On paramètre Σ comme suit

$$\Sigma = \{ \sigma(\theta, z) = (z \cos \theta, z \sin \theta, z), \text{ avec } (\theta, z) \in \overline{A} \}$$

et $A =]0, 2\pi[\times]0, 1[$. Une normale est donc donnée par

$$\sigma_{\theta} \wedge \sigma_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -z \sin \theta & z \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z \cos \theta \\ z \sin \theta \\ -z \end{pmatrix}.$$

On déduit donc que

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \langle (1, 1, 1); (z \cos \theta, z \sin \theta, -z) \rangle dz d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (z \cos \theta + z \sin \theta - z) dz d\theta = -2\pi \int_0^1 z dz = -\pi. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial \Sigma} F \cdot dl$. Commençons par calculer

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

où (cf. Figure 7.1)

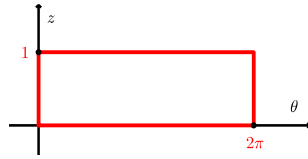


FIG. 7.1 –

$$\Gamma_1 = \{ \gamma_1(\theta) = \sigma(\theta, 0) = (0, 0, 0) \} = \{(0, 0, 0)\}$$

$$\Gamma_2 = \{ \gamma_2(z) = \sigma(2\pi, z) = (z, 0, z), z : 0 \rightarrow 1 \}$$

$$\Gamma_3 = \{ \gamma_3(\theta) = \sigma(\theta, 1) = (\cos \theta, \sin \theta, 1), \theta : 2\pi \rightarrow 0 \}$$

$$\Gamma_4 = \{\gamma_4(z) = \sigma(0, z) = (z, 0, z), z : 1 \rightarrow 0\} = -\Gamma_2.$$

On s'aperçoit alors que

$$\partial\Sigma = \Gamma_3 = \{\gamma_3(\theta) = \sigma(\theta, 1) = (\cos\theta, \sin\theta, 1), \theta : 2\pi \rightarrow 0\},$$

avec Γ_3 parcouru négativement. Comme

$$\gamma_3'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0),$$

on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} F \cdot dl &= - \int_0^{2\pi} \langle (1, \cos\theta, \sin\theta); (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \rangle d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = -\pi. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

Exemple Vérifier le Théorème de Stokes pour $F(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, (x_2)^2)$ et

$$\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1 \text{ et } x_3 \leq 0\}.$$

Discussion (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds$. On voit que

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & (x_2)^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On choisit de paramétrer Σ comme suit

$$\Sigma = \{\sigma(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi), \text{ avec } (\theta, \varphi) \in \overline{A}\}$$

avec $A =]0, 2\pi[\times]\pi/2, \pi[$. Une normale est alors donnée par

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_\varphi = -\sin\varphi (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi).$$

L'intégrale de surface nous donne donc

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} \langle (2\sin\theta \sin\varphi, 0, 0); -\sin\varphi (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi) \rangle d\varphi d\theta \\ &= -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos\theta \sin^3\varphi d\varphi d\theta = 0. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. Observons que

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4,$$

où (cf. Figure 7.2)

$$\Gamma_1 = \left\{ \gamma_1(\theta) = \sigma\left(\theta, \frac{\pi}{2}\right) = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \theta : 0 \rightarrow 2\pi \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \gamma_2(\varphi) = \sigma(2\pi, \varphi) = (\sin \varphi, 0, \cos \varphi), \varphi : \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi \right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \gamma_3(\theta) = \sigma(\theta, \pi) = (0, 0, -1), \theta : 2\pi \rightarrow 0 \right\} = \{(0, 0, -1)\}$$

$$\Gamma_4 = \left\{ \gamma_4(\varphi) = \sigma(0, \varphi) = (\sin \varphi, 0, \cos \varphi), \varphi : \pi \rightarrow \frac{\pi}{2} \right\} = -\Gamma_2.$$

On a donc que

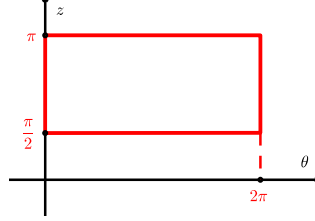


FIG. 7.2 –

$$\partial\Sigma = \Gamma_1$$

avec Γ_1 parcouru positivement. On a alors

$$\gamma'_1(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$$

et donc

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \langle (0, 0, \sin^2 \theta); (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \rangle d\theta = 0. \quad \spadesuit$$

7.2 Démonstration du théorème

Nous allons procéder à la démonstration du théorème dans le cas où la surface est régulière (au lieu de régulière par morceaux) et orientable. Pour les cas plus généraux, cf. [4] 410-417, [13] 362-366 et [21] 470-474.

Démonstration On va faire la démonstration dans le cas où Σ est une surface régulière.

Etape préliminaire. Plus précisément on fera les hypothèses suivantes.

(i) Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné tel que ∂A soit une courbe simple fermée régulière de paramétrisation

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \partial A \subset \mathbb{R}^2$$

telle que $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^2)$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ et

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2} \neq 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

(ii) Soit $\sigma \in C^2(\overline{A}; \mathbb{R}^3)$, $\sigma = \sigma(u, v) = (\sigma^1(u, v), \sigma^2(u, v), \sigma^3(u, v))$, tel que

- $\sigma(\overline{A}) = \Sigma$ et σ est injective dans \overline{A} ;
- $|\sigma_u \wedge \sigma_v| \neq 0, \forall (u, v) \in \overline{A}$.

En conséquence $\partial \Sigma = \sigma(\partial A)$ et le bord est paramétré par

$$\varphi = \sigma \circ \gamma : [a, b] \xrightarrow{\gamma} \partial A \xrightarrow{\sigma} \partial \Sigma \subset \mathbb{R}^3$$

avec

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) = \sigma(\gamma(t)) = \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \quad t \in [a, b].$$

En particulier on a, pour $i = 1, 2, 3$,

$$\varphi'_i(t) = \sigma_u^i(\gamma(t)) \gamma'_1(t) + \sigma_v^i(\gamma(t)) \gamma'_2(t).$$

Noter de plus que $|\varphi'(t)| \neq 0$, car σ_u et σ_v sont linéairement indépendants (car $|\sigma_u \wedge \sigma_v| \neq 0$) et $|\gamma'(t)| = \sqrt{(\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2} \neq 0$.

Etape 1. Calcul de $\iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds$. On a

$$\iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds = \iint_A \langle \text{rot } F(\sigma(u, v)); \sigma_u \wedge \sigma_v \rangle du dv.$$

Comme

$$\text{rot } F = (F_{x_2}^3 - F_{x_3}^2, F_{x_3}^1 - F_{x_1}^3, F_{x_1}^2 - F_{x_2}^1)$$

et

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (\sigma_u^2 \sigma_v^3 - \sigma_u^3 \sigma_v^2, \sigma_u^3 \sigma_v^1 - \sigma_u^1 \sigma_v^3, \sigma_u^1 \sigma_v^2 - \sigma_u^2 \sigma_v^1)$$

on trouve

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds &= \iint_A [F_{x_2}^3(\sigma(u, v)) - F_{x_3}^2(\sigma(u, v))] [\sigma_u^2 \sigma_v^3 - \sigma_u^3 \sigma_v^2] du dv \\ &\quad + \iint_A [F_{x_3}^1(\sigma(u, v)) - F_{x_1}^3(\sigma(u, v))] [\sigma_u^3 \sigma_v^1 - \sigma_u^1 \sigma_v^3] du dv \\ &\quad + \iint_A [F_{x_1}^2(\sigma(u, v)) - F_{x_2}^1(\sigma(u, v))] [\sigma_u^1 \sigma_v^2 - \sigma_u^2 \sigma_v^1] du dv. \end{aligned}$$

En regroupant les termes différemment on a

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds = R_1 + R_2 + R_3$$

où

$$\begin{aligned} R_1 &= \iint_A [F_{x_3}^1(\sigma(u, v))(\sigma_u^3 \sigma_v^1 - \sigma_u^1 \sigma_v^3) - F_{x_2}^1(\sigma(u, v))(\sigma_u^1 \sigma_v^2 - \sigma_u^2 \sigma_v^1)] du dv \\ R_2 &= \iint_A [F_{x_1}^2(\sigma(u, v))(\sigma_u^1 \sigma_v^2 - \sigma_u^2 \sigma_v^1) - F_{x_3}^2(\sigma(u, v))(\sigma_u^2 \sigma_v^3 - \sigma_u^3 \sigma_v^2)] du dv \\ R_3 &= \iint_A [F_{x_2}^3(\sigma(u, v))(\sigma_u^2 \sigma_v^3 - \sigma_u^3 \sigma_v^2) - F_{x_1}^3(\sigma(u, v))(\sigma_u^3 \sigma_v^1 - \sigma_u^1 \sigma_v^3)] du dv. \end{aligned}$$

Etape 2. Calcul de $\int_{\partial \Sigma} F \cdot dl$. On a

$$\int_{\partial \Sigma} F \cdot dl = \int_a^b \langle F(\varphi(t)); \varphi'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{\nu=1}^3 F^\nu(\varphi(t)) \varphi'_\nu(t) dt.$$

On va montrer que

$$\int_a^b F^1(\varphi(t)) \varphi'_1(t) dt = R_1$$

et de manière analogue

$$\int_a^b F^2(\varphi(t)) \varphi'_2(t) dt = R_2 \quad \text{et} \quad \int_a^b F^3(\varphi(t)) \varphi'_3(t) dt = R_3$$

Et le théorème sera ainsi démontré.

Calculons donc

$$\begin{aligned} \int_a^b F^1(\varphi(t)) \varphi'_1(t) dt &= \int_a^b F^1(\sigma(\gamma(t))) [\sigma_u^1(\gamma(t)) \gamma'_1(t) + \sigma_v^1(\gamma(t)) \gamma'_2(t)] dt \\ &= \int_a^b F^1(\sigma(\gamma(t))) \langle (\sigma_u^1(\gamma(t)), \sigma_v^1(\gamma(t))) ; \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_{\partial A} (F^1(\sigma) \sigma_u^1, F^1(\sigma) \sigma_v^1) \cdot dl. \end{aligned}$$

Appliquons le Théorème de Green à $(F^1(\sigma) \sigma_u^1, F^1(\sigma) \sigma_v^1)$. Noter tout d'abord (on utilise ici $\sigma \in C^2$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} (F^1(\sigma) \sigma_v^1) &= [F_{x_1}^1(\sigma) \sigma_u^1 + F_{x_2}^1(\sigma) \sigma_u^2 + F_{x_3}^1(\sigma) \sigma_u^3] \sigma_v^1 + F^1(\sigma) \sigma_{uv}^1 \\ \frac{\partial}{\partial v} (F^1(\sigma) \sigma_u^1) &= [F_{x_1}^1(\sigma) \sigma_v^1 + F_{x_2}^1(\sigma) \sigma_v^2 + F_{x_3}^1(\sigma) \sigma_v^3] \sigma_u^1 + F^1(\sigma) \sigma_{uv}^1 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} (F^1(\sigma) \sigma_v^1) - \frac{\partial}{\partial v} (F^1(\sigma) \sigma_u^1) \\ = -F_{x_2}^1(\sigma) (\sigma_u^1 \sigma_v^2 - \sigma_u^2 \sigma_v^1) + F_{x_3}^1(\sigma) (\sigma_u^3 \sigma_v^1 - \sigma_u^1 \sigma_v^3). \end{aligned}$$

Par conséquent, en appliquant le Théorème de Green

$$\begin{aligned} \int_a^b F^1(\varphi(t)) \varphi_1'(t) dt &= \int_{\partial A} (F^1(\sigma) \sigma_u^1, F^1(\sigma) \sigma_v^1) \cdot dl \\ &= \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial u} (F^1(\sigma) \sigma_v^1) - \frac{\partial}{\partial v} (F^1(\sigma) \sigma_u^1) \right] du dv \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} &\int_a^b F^1(\varphi(t)) \varphi_1'(t) dt \\ &= \iint_A [F_{x_3}^1(\sigma) (\sigma_u^3 \sigma_v^1 - \sigma_u^1 \sigma_v^3) - F_{x_2}^1(\sigma) (\sigma_u^1 \sigma_v^2 - \sigma_u^2 \sigma_v^1)] du dv \\ &= R_1 \end{aligned}$$

comme souhaité. ■

7.3 Exercices

De nombreux autres exercices concernant ce chapitre, notamment Exercices 4 et 6, se trouvent au Chapitre 7 de [9].

Exercice 7.1 Soit, pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$G(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

Montrer (à l'aide du Théorème de Stokes sur une surface appropriée) qu'il n'existe aucun $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^3)$, où $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tel que

$$\operatorname{rot} F = 0 \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad F(x, y, 0) = G(x, y) \text{ si } (x, y) \neq (0, 0).$$

Exercice 7.2 Soient $F(x, y, z) = (-y, 0, z)$ et

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} z = e^{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad x, y \geq 0 \\ \text{et} \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{array} \right\}.$$

Vérifier le Théorème de Stokes. On rappelle, si nécessaire, que

$$\begin{aligned} \int x \cos x \sin x \, dx &= \frac{1}{8} \sin(2x) - \frac{1}{4} x \cos(2x) \\ \int x^2 \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{8} \sin(2x) - \frac{1}{4} x \cos(2x) - \frac{1}{4} x^2 \sin(2x). \end{aligned}$$

Exercice 7.3 Soient $F(x, y, z) = (z, x, y)$ et

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1 < z + 1\}.$$

Vérifier le Théorème de Stokes.

Exercice 7.4 Soient $F(x, y, z) = (x, xz, 0)$ et

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = e^{\sqrt{x^2+z^2}}, 0 \leq z \leq x \text{ et } x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Vérifier le Théorème de Stokes. On rappelle que

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2.$$

Exercice 7.5 Soient $F(x, y, z) = (xyz, 1, y^2)$ et

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x + z^2 \text{ et } 0 < z < x < 1\}.$$

Vérifier le Théorème de Stokes.

Exercice 7.6 Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^3)$,

$$F(x, y, z) = (0, f(x, y, z), g(x, y, z))$$

et

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

Vérifier le Théorème de Stokes.

Exercice 7.7 Montrer le Théorème de Stokes pour

$$\Sigma = \{x = (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$

où $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

7.4 Corrigés

Exercice 7.1 Supposons que le résultat soit vrai et montrons que ceci nous conduit à une contradiction. Soit

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \geq 0\}.$$

Noter que $\overline{\Sigma} \subset \Omega$ et

$$\partial\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z = 0\}.$$

Comme $\text{rot } F = 0$ dans Ω , on a immédiatement que

$$\iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds = 0.$$

En notant que sur $\partial\Sigma$

$$F(x, y, 0) = G(x, y) = (-y, x, 0)$$

on obtient directement que

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \langle (-\sin \theta, \cos \theta, 0); (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \rangle d\theta = 2\pi.$$

Comme nous avons le droit d'appliquer le Théorème de Stokes, on a bien la contradiction souhaitée. ♠

Exercice 7.2 (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds$. On trouve

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & 0 & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs on a

$$\Sigma = \left\{ \sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, e^r) : 0 \leq r \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & e^r \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -r e^r \cos \theta \\ -r e^r \sin \theta \\ r \end{pmatrix}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds &= \int_0^{\pi/2} \int_0^\theta \langle (0, 0, 1); (-r e^r \cos \theta, -r e^r \sin \theta, r) \rangle dr d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^\theta d\theta = \left[\frac{\theta^3}{6} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{48}. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. Observer que

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left\{ \gamma_1(\theta) = \sigma(\theta, \theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta, e^\theta), \theta : 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \right\} \\ \Gamma_2 &= \left\{ \gamma_2(r) = \sigma(r, \frac{\pi}{2}) = (0, r, e^r), r : \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \right\} \\ \Gamma_3 &= \left\{ \gamma_3(\theta) = \sigma(0, \theta) = (0, 0, 1), \theta : \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \right\} = \{(0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

avec Γ_1 parcourue positivement et Γ_2 parcourue négativement. On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} F \cdot dl &= \int_0^{\pi/2} \langle (-\theta \sin \theta, 0, e^\theta); (\cos \theta - \theta \sin \theta, \sin \theta + \theta \cos \theta, e^\theta) \rangle d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} (\theta^2 \sin^2 \theta - \theta \cos \theta \sin \theta + e^{2\theta}) d\theta \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = - \int_0^{\pi/2} \langle (-r, 0, e^r); (0, 1, e^r) \rangle dr = - \int_0^{\pi/2} e^{2r} dr$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} F \cdot dl &= \int_0^{\pi/2} (\theta^2 \sin^2 \theta - \theta \cos \theta \sin \theta) d\theta \\ &= \left[\frac{\theta^3}{6} - \frac{\theta^2 \sin(2\theta)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{48}. \spadesuit \end{aligned}$$

Exercice 7.3 (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds$. On trouve

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs on a (pour $A =]0, 1[\times]0, 2\pi[$)

$$\Sigma = \left\{ \sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \sqrt{2 - r^2}) : (r, \theta) \in \overline{A} \right\}$$

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & \sin \theta & \frac{-r}{\sqrt{2-r^2}} \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r^2}{\sqrt{2-r^2}} \cos \theta \\ \frac{r^2}{\sqrt{2-r^2}} \sin \theta \\ r \end{pmatrix}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\langle (1, 1, 1); \left(\frac{r^2}{\sqrt{2-r^2}} \cos \theta, \frac{r^2}{\sqrt{2-r^2}} \sin \theta, r \right) \right\rangle dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 r dr = \pi. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. Observer que

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\Gamma_1 = \left\{ \gamma_1(r) = \sigma(r, 0) = (r, 0, \sqrt{2-r^2}), r : 0 \rightarrow 1 \right\}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \gamma_2(\theta) = \sigma(1, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 1), \theta : 0 \rightarrow 2\pi \right\}$$

$$\Gamma_3 = \left\{ \gamma_3(r) = \sigma(r, 2\pi) = (r, 0, \sqrt{2-r^2}), r : 1 \rightarrow 0 \right\} = -\Gamma_1$$

$$\Gamma_4 = \left\{ \gamma_4(\theta) = \sigma(0, \theta) = (0, 0, \sqrt{2}), \theta : 2\pi \rightarrow 0 \right\} = \left\{ (0, 0, \sqrt{2}) \right\}.$$

Par conséquent

$$\partial\Sigma = \Gamma_2$$

avec Γ_2 parcouru positivement. On obtient alors

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \langle (1, \cos \theta, \sin \theta); (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \rangle d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi. \quad \spadesuit$$

Exercice 7.4 (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds$. On trouve

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xz & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs on a (pour $A =]0, 1[\times]0, \pi/4[$)

$$\Sigma = \{ \sigma(r, \theta) = (r \cos \theta, e^r, r \sin \theta) : (r, \theta) \in \overline{A} \}$$

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos \theta & e^r & \sin \theta \\ -r \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} r e^r \cos \theta \\ -r \\ r e^r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} \langle (-r \cos \theta, 0, r \sin \theta); (r e^r \cos \theta, -r, r e^r \sin \theta) \rangle dr d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/4} r^2 e^r (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) dr d\theta \end{aligned}$$

et finalement

$$\iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds = -\frac{1}{2} \int_0^1 r^2 e^r dr = \frac{2-e}{2}.$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. Observer que

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{\gamma_1(r) = \sigma(r, 0) = (r, e^r, 0), r : 0 \rightarrow 1\} \\ \Gamma_2 &= \{\gamma_2(\theta) = \sigma(1, \theta) = (\cos \theta, e, \sin \theta), \theta : 0 \rightarrow \pi/4\} \\ \Gamma_3 &= \{\gamma_3(r) = \sigma(r, \pi/4) = (r\sqrt{2}/2, e^r, r\sqrt{2}/2), r : 1 \rightarrow 0\} \\ \Gamma_4 &= \{\gamma_4(\theta) = \sigma(0, \theta) = (0, 1, 0), \theta : \pi/4 \rightarrow 0\} = \{(0, 1, 0)\}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

avec Γ_1 et Γ_2 parcourues positivement et Γ_3 parcourue négativement. On obtient alors

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} F \cdot dl &= \int_0^1 \langle (r, 0, 0); (1, e^r, 0) \rangle dr = \frac{1}{2} \\ \int_{\Gamma_2} F \cdot dl &= \int_0^{\pi/4} \langle (\cos \theta, \cos \theta \sin \theta, 0); (-\sin \theta, 0, \cos \theta) \rangle d\theta \\ &= - \int_0^{\pi/4} \sin \theta \cos \theta d\theta = -\frac{1}{4} \\ \int_{\Gamma_3} F \cdot dl &= \int_0^1 \left\langle \left(r \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{r^2}{2}, 0 \right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^r, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle dr \\ &= \int_0^1 \left(\frac{r}{2} + \frac{r^2}{2} e^r \right) dr = \frac{1}{4} + \frac{e-2}{2}.\end{aligned}$$

On a finalement

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = \int_{\Gamma_1} F \cdot dl + \int_{\Gamma_2} F \cdot dl - \int_{\Gamma_3} F \cdot dl = \frac{2-e}{2}. \spadesuit$$

Exercice 7.5 (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \text{rot } F \cdot ds$. On a que

$$\Sigma = \{ \alpha(x, z) = (x, x + z^2, z) \text{ et } 0 < z < x < 1 \},$$

$$\alpha_x \wedge \alpha_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2z & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2z \end{pmatrix}$$

et

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x y z & 1 & y^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ xy \\ -xz \end{pmatrix}.$$

On trouve donc que

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds &= \int_0^1 dx \int_0^x \langle (2(x+z^2), x(x+z^2), -xz); (1, -1, 2z) \rangle dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x (2(x+z^2) - x(x+z^2) - 2xz^2) dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x (2x - x^2 + 2z^2 - 3xz^2) dz \\ &= \int_0^1 \left(2x^2 - x^3 + \frac{2}{3}x^3 - x^4 \right) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{5} = \frac{23}{60}. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. On a que

$$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

où

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(x) = (x, x, 0) \text{ et } 0 < x < 1\} \Rightarrow \gamma'_1(x) = (1, 1, 0)$$

$$\Gamma_2 = \{\gamma_2(x) = (x, x+x^2, x) \text{ et } 0 < x < 1\} \Rightarrow \gamma'_2(x) = (1, 1+2x, 1)$$

$$\Gamma_3 = \{\gamma_3(z) = (1, 1+z^2, z) \text{ et } 0 < z < 1\} \Rightarrow \gamma'_3(z) = (0, 2z, 1).$$

Noter que Γ_2 est parcourue négativement. On obtient donc, comme $F(x, y, z) = (xyz, 1, y^2)$,

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_0^1 \langle (0, 1, x^2); (1, 1, 0) \rangle dx = 1$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} F \cdot dl &= \int_0^1 \langle (x^2(x+x^2), 1, (x+x^2)^2); (1, 1+2x, 1) \rangle dx \\ &= \int_0^1 (x^2(x+x^2) + 1 + 2x + (x+x^2)^2) dx \\ &= \int_0^1 (1 + 2x + x^2 + 3x^3 + 2x^4) dx = 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{209}{60} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} F \cdot dl &= \int_0^1 \langle ((1+z^2)z, 1, (1+z^2)^2); (0, 2z, 1) \rangle dz = \int_0^1 [2z + (1+z^2)^2] dz \\ &= \int_0^1 [1 + 2z + 2z^2 + z^4] dz = 1 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{43}{15}. \end{aligned}$$

Nous déduisons donc que

$$\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl = 1 - \frac{209}{60} + \frac{43}{15} = \frac{23}{60}. \quad \spadesuit$$

Exercice 7.6 (i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds$. On trouve

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & f & g \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} g_y - f_z \\ -g_x \\ f_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_z \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_y \\ -g_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs on a (pour $A =]0, \pi/2[\times]0, 1[$)

$$\Sigma = \{ \sigma(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z) : (\theta, z) \in \overline{A} \}$$

$$\sigma_{\theta} \wedge \sigma_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \langle (-f_z(\cos \theta, \sin \theta, z), 0, f_x(\cos \theta, \sin \theta, z)) ; (\cos \theta, \sin \theta, 0) \rangle d\theta dz \\ &+ \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \langle (g_y(\cos \theta, \sin \theta, z), -g_x(\cos \theta, \sin \theta, z), 0) ; (\cos \theta, \sin \theta, 0) \rangle d\theta dz \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds \\ &= \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{d}{dz} [f(\cos \theta, \sin \theta, z)] \cos \theta \right] d\theta dz \\ &+ \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{d}{d\theta} [g(\cos \theta, \sin \theta, z)] \right] d\theta dz \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds &= \int_0^{\pi/2} [f(\cos \theta, \sin \theta, 0) - f(\cos \theta, \sin \theta, 1)] \cos \theta d\theta \\ &+ \int_0^1 [g(0, 1, z) - g(1, 0, z)] dz. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial\Sigma} F \cdot dl$. Observer que

$$\sigma(\partial A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

où

$$\Gamma_1 = \{\gamma_1(\theta) = \sigma(\theta, 0) = (\cos \theta, \sin \theta, 0), \theta : 0 \rightarrow \pi/2\}$$

$$\Gamma_2 = \{\gamma_2(z) = \sigma(\pi/2, z) = (0, 1, z), z : 0 \rightarrow 1\}$$

$$\Gamma_3 = \{\gamma_3(\theta) = \sigma(\theta, 1) = (\cos \theta, \sin \theta, 1), \theta : \pi/2 \rightarrow 0\}$$

$$\Gamma_4 = \{\gamma_4(z) = \sigma(0, z) = (1, 0, z), z : 1 \rightarrow 0\}.$$

Par conséquent

$$\partial \Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

avec Γ_1 et Γ_2 parcourues positivement et Γ_3 et Γ_4 parcourues négativement. On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} F \cdot dl &= \int_0^{\pi/2} \langle (0, f(\cos \theta, \sin \theta, 0), g(\cos \theta, \sin \theta, 0)); (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \rangle d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} f(\cos \theta, \sin \theta, 0) \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = \int_0^1 \langle (0, f(0, 1, z), g(0, 1, z)); (0, 0, 1) \rangle dz = \int_0^1 g(0, 1, z) dz$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} F \cdot dl &= - \int_0^{\pi/2} \langle (0, f(\cos \theta, \sin \theta, 1), g(\cos \theta, \sin \theta, 1)); (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \rangle d\theta \\ &= - \int_0^{\pi/2} f(\cos \theta, \sin \theta, 1) \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_4} F \cdot dl = - \int_0^1 \langle (0, f(1, 0, z), g(1, 0, z)); (0, 0, 1) \rangle dz = - \int_0^1 g(1, 0, z) dz.$$

On a finalement

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Sigma} F \cdot dl &= \int_0^{\pi/2} [f(\cos \theta, \sin \theta, 0) - f(\cos \theta, \sin \theta, 1)] \cos \theta d\theta \\ &\quad + \int_0^1 [g(0, 1, z) - g(1, 0, z)] dz \end{aligned}$$

ce qui est le résultat souhaité. ♠

Exercice 7.7 La paramétrisation naturelle de Σ est donnée par

$$\sigma = \sigma(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad \text{avec} \quad (u, v) \in A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1\}$$

et celle de $\partial \Sigma$ s'écrit alors

$$\varphi(\theta) = (\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta), \varphi_3(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta, f(\cos \theta, \sin \theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

(i) Calcul de $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds$. On a

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds = \iint_A \langle \operatorname{rot} F(\sigma(u, v)); \sigma_u \wedge \sigma_v \rangle du dv.$$

Comme

$$\operatorname{rot} F = (F_{x_2}^3 - F_{x_3}^2, F_{x_3}^1 - F_{x_1}^3, F_{x_1}^2 - F_{x_2}^1)$$

et

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (-f_u, -f_v, 1)$$

on trouve

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds &= \iint_A [F_{x_2}^3(\sigma(u, v)) - F_{x_3}^2(\sigma(u, v))] [-f_u(u, v)] du dv \\ &\quad + \iint_A [F_{x_3}^1(\sigma(u, v)) - F_{x_1}^3(\sigma(u, v))] [-f_v(u, v)] du dv \\ &\quad + \iint_A [F_{x_1}^2(\sigma(u, v)) - F_{x_2}^1(\sigma(u, v))] du dv. \end{aligned}$$

En regroupant les termes différemment on a

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot ds = R_1 + R_2 + R_3$$

où

$$\begin{aligned} R_1 &= - \iint_A [F_{x_2}^1(u, v, f(u, v)) + F_{x_3}^1(u, v, f(u, v)) f_v(u, v)] du dv \\ &= - \iint_A \frac{\partial}{\partial v} [F^1(u, v, f(u, v))] du dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= \iint_A [F_{x_1}^2(u, v, f(u, v)) + F_{x_3}^2(u, v, f(u, v)) f_u(u, v)] du dv \\ &= \iint_A \frac{\partial}{\partial u} [F^2(u, v, f(u, v))] du dv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_3 &= \iint_A [F_{x_1}^3(u, v, f(u, v)) f_v - F_{x_2}^3(u, v, f(u, v)) f_u] du dv \\ &= \iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial u} [F^3(u, v, f(u, v)) f_v(u, v)] - \frac{\partial}{\partial v} [F^3(u, v, f(u, v)) f_u(u, v)] \right\} du dv. \end{aligned}$$

(ii) Calcul de $\int_{\partial \Sigma} F \cdot dl$. On a

$$\int_{\partial \Sigma} F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \langle F(\varphi(\theta)); \varphi'(\theta) \rangle d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{\nu=1}^3 F^\nu(\varphi(\theta)) \varphi'_\nu(\theta) d\theta.$$

On va montrer que

$$R_1 = \int_0^{2\pi} F^1(\varphi) \varphi'_1, \quad R_2 = \int_0^{2\pi} F^2(\varphi) \varphi'_2, \quad R_3 = \int_0^{2\pi} F^3(\varphi) \varphi'_3$$

et le théorème sera ainsi démontré. Comme $\varphi(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, f(\cos \theta, \sin \theta))$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F^1(\varphi(\theta)) \varphi'_1(\theta) d\theta &= - \int_0^{2\pi} F^1(\varphi) \sin \theta d\theta = \int_{\partial A} (F^1, 0) \cdot dl \\ \int_0^{2\pi} F^2(\varphi(\theta)) \varphi'_2(\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} F^2(\varphi) \cos \theta d\theta = \int_{\partial A} (0, F^2) \cdot dl \\ \int_0^{2\pi} F^3(\varphi(\theta)) \varphi'_3(\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} F^3(\varphi) (-\sin \theta f_u + \cos \theta f_v) d\theta = \int_{\partial A} (F^3 f_u, F^3 f_v) \cdot dl \end{aligned}$$

on déduit, par le Théorème de Green, que

$$\begin{aligned} R_1 &= - \iint_A \frac{\partial}{\partial v} [F^1(u, v, f(u, v))] du dv = \int_{\partial A} (F^1, 0) \cdot dl \\ R_2 &= \iint_A \frac{\partial}{\partial u} [F^2(u, v, f(u, v))] du dv = \int_{\partial A} (0, F^2) \cdot dl \\ R_3 &= \iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial u} [F^3(u, v, f(u, v)) f_v] - \frac{\partial}{\partial v} [F^3(u, v, f(u, v)) f_u] \right\} du dv \\ &= \int_{\partial A} (F^3 f_u, F^3 f_v) \cdot dl \end{aligned}$$

comme souhaité. ♠

Deuxième partie

Analyse complexe

Chapitre 8

Fonctions holomorphes et équations de Cauchy-Riemann

8.1 Rappel sur les nombres complexes

Notation On écrira un nombre complexe

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

(i) Le **conjugué complexe** sera

$$\bar{z} = x - iy$$

(ii) le **module** sera

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Noter que

$$|z|^2 = z\bar{z} \quad \text{et} \quad |z + w| \leq |z| + |w|.$$

(iii) Si $z \neq 0$, on peut écrire le nombre complexe sous la forme polaire

$$z = |z| e^{i\theta} \quad \text{où} \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Noter que θ , appelé l'**argument** de z , n'est défini qu'à 2π près. La **valeur principale de l'argument** est la valeur unique de l'argument si on le restreint à $]-\pi, \pi]$. Par la suite nous considérerons quasiment uniquement la valeur principale de l'argument et nous adopterons la notation $\arg z$. Ainsi

$$\arg(1) = 0, \quad \arg(-1) = \pi, \quad \arg(i) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}.$$

On peut aussi écrire l'argument comme une fonction de l'arc tangente ; en effet, si $z = x + iy$,

$$\arg z = v(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R} \\ \pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x < 0 \text{ et } y > 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0. \end{cases}$$

Au Chapitre 3 on avait écrit (mais c'est équivalent)

$$v(x, y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \pi & \text{si } y > 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ \pi/2 & \text{si } y = 0 \text{ et } x > 0 \\ -\operatorname{arctg} \frac{x}{y} & \text{si } y < 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Noter aussi, par anticipation, que la fonction

$$z \rightarrow \arg z$$

n'est pas continue le long de l'axe réel négatif. ♠

Les notions **topologiques** telles que : ouvert, fermé, intérieur, fermeture, frontière, compact, connexe, connexe par arcs, simplement connexe sont celles naturellement induites par l'identification de \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 .

8.2 Continuité des fonctions complexes

Une fonction complexe

$$f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f = f(z),$$

est formée d'un couple de fonctions réelles

$$u(z) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(z) = \operatorname{Im} f(z)$$

et par abus de notations on écrira, si $z = x + iy$,

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

On a ainsi la définition suivante.

Définition 8.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est **continue** en $z_0 \in \Omega$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\epsilon, z_0) > 0$ tel que

$$|z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Remarque (i) Toutes les règles de continuité (pour la somme, le produit, le quotient, la composition, ...) usuelles pour les fonctions s'appliquent sans autres aux fonctions complexes.

(ii) Il est facile de voir que

$$f \text{ est continue en } z_0 \Leftrightarrow u \text{ et } v \text{ sont continues en } (x_0, y_0).$$

Exemple Les fonctions $f(z) = z^n$, pour n un entier, et $f(z) = \bar{z}$ sont continues sur \mathbb{C} . Mais la fonction

$$z \rightarrow \arg z$$

n'est pas continue sur \mathbb{C} . ♠

8.3 Les fonctions holomorphes

Définition 8.2 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

(i) On dit que f est **holomorphe** (ou **analytique complexe**) en $z_0 \in \Omega$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe et est finie. Cette limite est appelée la **dérivée** de f en z_0 et elle est notée par $f'(z_0)$.

(ii) On dit que f est **holomorphe** (ou **analytique complexe**) dans Ω si f est dérivable $\forall z_0 \in \Omega$.

On a très facilement (cf. Exercice 8.1).

Proposition 8.3 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$.

(i) f est holomorphe en $z_0 \in \Omega$, alors f est continue en z_0 .

(ii) Si $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sont holomorphes en $z_0 \in \Omega$, alors leur somme, produit et quotient sont holomorphes en $z_0 \in \Omega$. Plus précisément

$$(f + g)'(z_0) = (f' + g')(z_0) \quad \text{et} \quad (fg)'(z_0) = (f'g + fg')(z_0)$$

et si, de plus, $g(z_0) \neq 0$, alors

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \left(\frac{f'g - g'f}{g^2}\right)(z_0).$$

(iii) Si $f : O \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ est holomorphe dans O et si $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe dans Ω , alors

$$g \circ f : O \rightarrow \mathbb{C}$$

est holomorphe dans O et pour tout $z_0 \in O$ on a

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0).$$

Voyons maintenant des exemples.

Exemple (i) Les fonctions $f(z) = z^n$, pour n un entier, sont holomorphes sur \mathbb{C} (cf. la formule du produit dans la proposition ci-dessus, par induction) et

$$f'(z) = nz^{n-1}.$$

(ii) La fonction $f(z) = 1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (cf. la proposition ci-dessus) et

$$f'(z) = -1/z^2.$$

(iii) La fonction $f(z) = \bar{z}$ n'est pas holomorphe sur \mathbb{C} , car

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$$

qui n'a pas de limite quand $h \rightarrow 0$. ♠

On a maintenant le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 8.4 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que, si $z = x + iy$,

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy).$$

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est holomorphe en $z_0 \in \Omega$;
- (ii) les fonctions u, v sont différentiables en (x_0, y_0) et satisfont les **équations de Cauchy-Riemann** en (x_0, y_0) à savoir

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

En particulier si f est holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0$ alors

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Notation Par la suite on notera

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad \spadesuit$$

Remarque On verra plus tard (cf. Théorème 9.10) qu'en fait $u, v \in C^\infty(\Omega)$ et même qu'elles sont analytiques (cf. Théorème 9.16). ♠

Avant de faire la démonstration, voyons d'autres exemples.

Exemple La fonction $f(z) = e^z$ (définie comme $e^z = e^{x+iy}$, on verra plus loin une meilleure définition de la fonction exponentielle) est holomorphe dans \mathbb{C} et $f'(z) = e^z$.

Discussion Ecrivons

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y = u(x, y) + i v(x, y),$$

où u et v sont $C^1(\mathbb{R}^2)$ et vérifient les équations de Cauchy-Riemann, i.e.

$$\begin{cases} u_x = v_y = e^x \cos y \\ u_y = -v_x = -e^x \sin y \end{cases}$$

et donc $f'(z) = u_x + i v_x = e^z$. ♠

Exemple La fonction $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ est holomorphe dans \mathbb{C} et sa dérivée est $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

Discussion (i) Commençons par trouver les parties réelles et imaginaires.

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{ix} - e^ye^{-ix}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i} \\ &= -\frac{e^y - e^{-y}}{2} \frac{\cos x}{i} + \frac{e^y + e^{-y}}{2} \sin x \\ &= \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x. \end{aligned}$$

(ii) Calcul des dérivées.

$$u_x = \cosh y \cos x, \quad u_y = \sinh y \sin x$$

$$v_x = -\sinh y \sin x, \quad v_y = \cosh y \cos x.$$

On a bien $u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$. De plus

$$(\sin z)' = u_x + i v_x = \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x = \cos z. \quad \spadesuit$$

On va maintenant procéder à la démonstration du théorème.

Démonstration (Théorème 8.4).

(i) \Rightarrow (ii). On démontre cette implication en deux étapes.

Etape 1. On va montrer, dans un premier temps, que toutes les dérivées partielles de u et de v , soient u_x, u_y, v_x, v_y , existent et qu'elles satisfont les équations de Cauchy-Riemann. On écrit

$$z_0 = x_0 + i y_0 \quad \text{et} \quad h = \alpha + i \beta.$$

Comme f est holomorphe en $z_0 \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) + i v(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)] - [u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0)]}{\alpha + i \beta}. \end{aligned}$$

1) On commence par choisir $\beta = 0$ et on trouve

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{[u(x_0 + \alpha, y_0) - u(x_0, y_0)] + i [v(x_0 + \alpha, y_0) - v(x_0, y_0)]}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \alpha, y_0) - u(x_0, y_0)}{\alpha} + i \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + \alpha, y_0) - v(x_0, y_0)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Ceci implique que $u_x(x_0, y_0)$ et $v_x(x_0, y_0)$ existent et que

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0).$$

2) De même en choisissant $\alpha = 0$ on a

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{[u(x_0, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0)] + i [v(x_0, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0)]}{i \beta} \\ &= \frac{1}{i} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0)}{\beta} + \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0)}{\beta}. \end{aligned}$$

Ceci implique que $u_y(x_0, y_0)$ et $v_y(x_0, y_0)$ existent et que

$$f'(z_0) = -i u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0).$$

Comme les limites doivent être égales, on a les équations de Cauchy-Riemann et les formules pour la dérivée.

Etape 2. Montrons maintenant que u et v sont différentiables. Par la première étape on a que

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0).$$

En posant $h = \alpha + i \beta$, on a que

$$\begin{aligned} &f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0) h \\ &= [u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0)] + i [v(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0)] \\ &\quad - [u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)] [\alpha + i \beta] \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} &f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0) h \\ &= [u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0) - u_x(x_0, y_0)\alpha + v_x(x_0, y_0)\beta] \\ &\quad + i [v(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0) - v_x(x_0, y_0)\alpha - u_x(x_0, y_0)\beta]. \end{aligned}$$

En invoquant les équations de Cauchy-Riemann on trouve

$$\begin{aligned} & f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h \\ = & [u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0) - u_x(x_0, y_0)\alpha - u_y(x_0, y_0)\beta] \\ & + i[v(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0) - v_x(x_0, y_0)\alpha - v_y(x_0, y_0)\beta]. \end{aligned}$$

Comme f est holomorphe, on a

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + \epsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} [\epsilon(h)/h] = 0.$$

Posons $h = \alpha + i\beta$,

$$\epsilon_1(\alpha, \beta) = \operatorname{Re} \epsilon(h) \quad \text{et} \quad \epsilon_2(\alpha, \beta) = \operatorname{Im} \epsilon(h)$$

et on a ainsi

$$\frac{\epsilon_1(\alpha, \beta)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \frac{\epsilon_2(\alpha, \beta)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \rightarrow 0.$$

On déduit donc que

$$\begin{aligned} u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0) &= u_x(x_0, y_0)\alpha + u_y(x_0, y_0)\beta + \epsilon_1(\alpha, \beta) \\ v(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0) &= v_x(x_0, y_0)\alpha + v_y(x_0, y_0)\beta + \epsilon_2(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

ce qui veut dire que u et v sont différentiables.

(ii) \Rightarrow (i). Comme u et v sont différentiables, on peut écrire

$$\begin{aligned} u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0) &= u_x(x_0, y_0)\alpha + u_y(x_0, y_0)\beta + \epsilon_1(\alpha, \beta) \\ v(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0) &= v_x(x_0, y_0)\alpha + v_y(x_0, y_0)\beta + \epsilon_2(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

où

$$\frac{\epsilon_1(\alpha, \beta)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \frac{\epsilon_2(\alpha, \beta)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \rightarrow 0.$$

Si on pose $h = \alpha + i\beta$ et $\epsilon(h) = \epsilon_1(\alpha, \beta) + i\epsilon_2(\alpha, \beta)$, on obtient donc

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) - f(z_0) &= u_x\alpha + u_y\beta + \epsilon_1(\alpha, \beta) + i[v_x\alpha + v_y\beta + \epsilon_2(\alpha, \beta)] \\ &= (u_x + i v_x)\alpha + (u_y + i v_y)\beta + \epsilon(h). \end{aligned}$$

Et ainsi, en invoquant les équations de Cauchy-Riemann, on trouve

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) - f(z_0) &= (u_x + i v_x)\alpha + (-v_x + i u_x)\beta + \epsilon(h) \\ &= (u_x + i v_x)\alpha + i(u_x + i v_x)\beta + \epsilon(h) \\ &= (u_x + i v_x)(\alpha + i\beta) + \epsilon(h). \end{aligned}$$

Comme $h = \alpha + i\beta$, on a bien montré que f est holomorphe pour tout $z_0 \in \Omega$ et

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0) = -i u_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0).$$

La démonstration est complète. ■

8.4 Les séries de puissances

Commençons par rappeler certains faits élémentaires que nous ne démontrons pas.

Proposition 8.5 Soient $a_n \in \mathbb{C}$ et considérons la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Alors il existe $0 \leq R \leq \infty$, appelé le **rayon de convergence**, tel que la série converge pour $|z| < R$, appelé le **disque de convergence**, et diverge pour $|z| > R$. De plus, avec la convention que $1/0 = \infty$ et $1/\infty = 0$, alors R est donné par

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}.$$

Remarque Evidemment que sur $|z| = R$ on ne peut rien dire en général. ♠

Exemple Considérons la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$$

On a $R = 1$ et aussi que pour $|z| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}. \quad \spadesuit$$

Théorème 8.6 Soit $R > 0$ le rayon de convergence de la série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Alors f est holomorphe dans $|z| < R$, de plus sa dérivée est donnée par

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

et la série a aussi R comme rayon de convergence.

Démonstration *Etape 1.* L'assertion sur le rayon de convergence est immédiate car $\lim |n|^{1/n} = 1$ et donc

$$\limsup |n a_n|^{1/n} = \lim |n|^{1/n} \limsup |a_n|^{1/n} = \limsup |a_n|^{1/n}.$$

Etape 2. Il reste donc à montrer que la série

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

donne bien la dérivée de f . Soient alors $|z_0| < r < R$ et écrivons

$$f(z) = A_N(z) + B_N(z) \quad \text{où} \quad A_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n \quad \text{et} \quad B_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n.$$

Choisissons $h \in \mathbb{C}$ de telle façon que $|z_0 + h| < r$. Nous allons faire trois estimations.

Etape 2.1. Comme $|z_0|, |z_0 + h| < r$ et

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$$

on a, comme le rayon de convergence de la série g est R et que $r < R$, que

$$\begin{aligned} \left| \frac{B_N(z_0 + h) - B_N(z_0)}{h} \right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(z_0 + h)^n - (z_0)^n}{h} \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n |a_n| r^{n-1}. \end{aligned}$$

Et donc pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $N_1(\epsilon)$ suffisamment grand pour que, pour tout $N \geq N_1(\epsilon)$, on ait

$$\left| \frac{B_N(z_0 + h) - B_N(z_0)}{h} \right| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Etape 2.2. Comme A_N est un polynôme, on trouve que

$$A'_N(z) = \sum_{n=1}^N n a_n z^{n-1}.$$

On déduit ainsi que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A'_N(z_0) = g(z_0)$$

et donc pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $N_2(\epsilon)$ suffisamment grand pour que, pour tout $N \geq N_2(\epsilon)$, on ait

$$|A'_N(z_0) - g(z_0)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Etape 2.3. Par ailleurs, comme A_N est un polynôme (et donc il est holomorphe et on peut dériver terme à terme), on a qu'on peut trouver $\delta = \delta(\epsilon, N) > 0$, tel que pour tout $|h| < \delta$, on ait

$$\left| \frac{A_N(z_0 + h) - A_N(z_0)}{h} - A'_N(z_0) \right| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Conclusion. On écrit

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) &= \frac{A_N(z_0 + h) - A_N(z_0)}{h} - A'_N(z_0) \\ &\quad + A'_N(z_0) - g(z_0) + \frac{B_N(z_0 + h) - B_N(z_0)}{h}. \end{aligned}$$

On fixe alors $N = N(\epsilon) = \max\{N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)\}$ (définis dans les Etapes 2.1 et 2.2 ci-dessus) puis on choisit (cf. Etape 2.3)

$$\delta = \delta(\epsilon, N(\epsilon)).$$

On a ainsi que si $|h| < \delta$, alors

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) \right| \leq \epsilon$$

ce qui est le résultat souhaité. ■

Remarque (i) Par applications successives du théorème, on a qu'une fonction écrite comme une série ci-dessus est une fonction infiniment dérivable, au sens complexe, et de plus toutes ses dérivées sont obtenues par dérivation formelle.

(ii) Nous avons considéré jusqu'à maintenant seulement des séries centrées en 0. Il est évident que toutes les considérations ci-dessus s'étendent, sans autres, au cas où ces séries sont centrées en n'importe quel $z_0 \in \mathbb{C}$. ♠

8.5 La fonction exponentielle

On peut maintenant donner la bonne définition de la fonction **exponentielle** complexe. On définit, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Elle a les propriétés suivantes que nous ne démontrerons pas (cf. Exercice 8.2).

Proposition 8.7 *Le rayon de convergence de la série est infini et donc la fonction est holomorphe dans tout le plan complexe et*

$$(e^z)' = e^z.$$

De plus $e^0 = 1$, $e^z \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Si $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ alors

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

$$\begin{aligned} |e^{iy}| &= 1 \\ e^{z+2in\pi} &= e^z. \end{aligned}$$

Remarque La fonction e^z n'est donc pas injective sur tout le plan complexe et elle n'est pas non plus surjective. Pour la rendre bijective on peut par exemple choisir

$$e^z : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in \mathbb{R} \text{ et } \operatorname{Im} z \in]-\pi, \pi]\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad \spadesuit$$

8.6 La fonction logarithme et les fonctions puissances

8.6.1 La fonction logarithme

On va maintenant définir la fonction logarithme qui est la fonction inverse de la fonction exponentielle. A cause des remarques ci-dessus il faut être prudent. Pour $z = x + iy$ on rappelle que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est son module et $\arg z$ (la valeur principale de) est son argument. On définit alors la (détermination principale de la) fonction **logarithme**

$$\log z = \log |z| + i(\arg z) \quad \text{avec } -\pi < \arg z \leq \pi$$

où $\log |z|$ est le logarithme naturel du nombre réel $|z|$ (en particulier $\log e = 1$). Cette fonction est définie pour tout $z \neq 0$.

Remarque (i) On a donc que $\log 0$ n'est pas défini et si $x > 0$ alors $\arg x = 0$ et donc le logarithme complexe restreint aux réels positifs correspond au logarithme réel. Si $x < 0$, alors

$$\log x = \log(-x) + i\pi$$

et par conséquent

$$\log(-1) = i\pi.$$

Mais il faut faire attention car, par exemple,

$$0 = \log 1 = \log(-1)^2 \neq 2\log(-1) = 2i\pi.$$

(ii) Comme nous l'avons dit, il existe une infinité de déterminations du logarithme et elles diffèrent entre elles par un multiple entier (relatif) de $2i\pi$; voir aussi l'Exercice 9.4 pour une discussion plus approfondie.

(iii) La fonction que nous avons définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, n'est pas continue sur cet ensemble. En effet

$$\log(-1 + it) = \log \sqrt{1 + t^2} + i \arg(-1 + it).$$

On déduit donc que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0^+} \log(-1 + i t) &= \log 1 + i\pi = i\pi \\ \lim_{t \rightarrow 0^-} \log(-1 + i t) &= \log 1 - i\pi = -i\pi.\end{aligned}$$

Donc f n'est pas continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (plus précisément on a montré que f n'est pas continue en $z = -1$, mais ceci est vrai pour n'importe quel point $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Im} z = 0$ et $\operatorname{Re} z < 0$).

(iv) On rappelle que si $z = x + i y$, alors on peut définir l'argument comme une fonction de l'arc tangente; en effet

$$\arg z = v(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R} \\ \pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x < 0 \text{ et } y > 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0. \end{cases}$$

Par ailleurs on sait que v est $C^1(\Omega)$ où

$$\begin{aligned}\Omega &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ et } x \leq 0\} \\ &= \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \leq 0\}\end{aligned}$$

et que, pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$v_x = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad v_y = \frac{x}{x^2 + y^2}. \quad \spadesuit$$

On a maintenant la proposition suivante.

Proposition 8.8 *La fonction logarithme a les propriétés suivantes*

$$\begin{aligned}\log e^z &= z \quad \text{si } \operatorname{Im} z \in]-\pi, \pi] \\ e^{\log z} &= z \quad \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

Si $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors

$$\log(zw) = \begin{cases} \log z + \log w & \text{si } \arg z + \arg w \in]-\pi, \pi] \\ \log z + \log w - 2\pi i & \text{si } \arg z + \arg w \in]\pi, 2\pi] \\ \log z + \log w + 2\pi i & \text{si } \arg z + \arg w \in]-2\pi, -\pi]. \end{cases}$$

La fonction logarithme est holomorphe dans

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

et sa dérivée est

$$f'(z) = \frac{1}{z}, \quad \forall z \in \Omega.$$

Démonstration Cf. Exercice 8.3 pour la partie algébrique. Une autre démonstration du fait que $f'(z) = 1/z$, $\forall z \in \Omega$, sera faite dans l'Exercice 9.4 ; en voici une basée sur le Théorème 8.4. Montrons maintenant que

$$f'(z) = \frac{1}{z}, \quad \forall z \in \Omega.$$

Comme

$$\log z = \log |z| + i(\arg z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

on trouve

$$u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad v(x, y) = \arg z.$$

On a ainsi

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$v_x = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad v_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

et donc les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites et

$$(\log z)' = u_x + i v_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x - i y}{(x + i y)(x - i y)} = \frac{1}{z}.$$

La démonstration est terminée. ■

Remarque Une autre idée de la démonstration (mais qui doit être traitée délicatement car elle rend obscur le fait qu'il faut se restreindre à Ω et pas à $\mathbb{C} \setminus \{0\}$) utilise l'identité

$$e^{\log z} = z \quad \text{si } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

En effet, en invoquant le fait que $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) f'(z)$, on trouve

$$1 = (\log z)' e^{\log z} = (\log z)' z$$

d'où le résultat.

8.6.2 Les fonctions puissances

On va maintenant définir la fonction puissance. Pour $\gamma \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on définit (la détermination principale)

$$f(z) = z^\gamma = e^{\gamma \log z}.$$

Remarque (i) Pour chaque détermination du logarithme on a, pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$z^\gamma = e^{\gamma[\log z + 2in\pi]}.$$

(ii) Noter que si $x > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ la détermination principale de z^γ correspond exactement à ce qu'on entend en analyse réelle par x^γ .

(iii) Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\gamma \in \mathbb{Z}$, on vérifie facilement que la détermination principale de z^γ correspond exactement à celle définie algébriquement, cf. Exercice 8.5.

(iv) On a, par exemple,

$$\begin{aligned} (-1)^i &= e^{i \log(-1)} = e^{-\pi} \\ (-1)^{1/2} &= e^{\log(-1)/2} = e^{i\pi/2} = i \\ (-1)^{1/3} &= e^{\log(-1)/3} = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

(v) Comme la fonction logarithme, les fonctions puissances ne sont en général pas continues sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, mais elles peuvent être étendues par continuité à \mathbb{C} quand $\gamma \in \mathbb{N}$ (à $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ quand $\gamma \in \mathbb{Z}_-$). ♠

Proposition 8.9 Soient $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ et $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors

$$z^{\beta+\gamma} = z^\beta z^\gamma$$

$$z^\gamma w^\gamma = \begin{cases} (zw)^\gamma & \text{si } \arg z + \arg w \in]-\pi, \pi] \\ (zw)^\gamma e^{2\pi\gamma i} & \text{si } \arg z + \arg w \in]\pi, 2\pi] \\ (zw)^\gamma e^{-2\pi\gamma i} & \text{si } \arg z + \arg w \in]-2\pi, -\pi]. \end{cases}$$

La fonction $f(z) = z^\gamma$ est holomorphe dans

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

et sa dérivée est donnée par

$$f'(z) = \gamma z^{\gamma-1}.$$

Démonstration cf. Exercice 8.4. ■

8.7 Exercices

De nombreux autres exercices concernant ce chapitre, notamment les Exercices 1, 4, 6, 7, 8, 9, 10 et 11, se trouvent au Chapitre 9 de [9].

Exercice 8.1 Montrer la Proposition 8.3.

Indication. Pour la composition, on pourra utiliser la définition suivante : f est holomorphe en z_0 si et seulement si il existe une fonction $\epsilon : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ et $w \in \mathbb{C}$ satisfaisant

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = h(w + \epsilon(h)), \quad \text{pour tout } h \text{ suffisamment petit.}$$

Ici on prendra $f'(z_0) = w$.

Exercice 8.2 Montrer la Proposition 8.7.

Exercice 8.3 (i) Montrer la Proposition 8.8 (le fait que $f'(z) = 1/z$ a déjà été fait). Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\log e^z = z, \text{ si } \operatorname{Im} z \in]-\pi, \pi] \quad \text{et} \quad e^{\log z} = z, \text{ si } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(ii) Trouver et expliquer la faute dans la série d'égalités suivante :

$$1 = 1^{1/2} = (e^{2\pi i})^{1/2} = e^{\pi i} = -1.$$

Exercice 8.4 Montrer la Proposition 8.9.

Exercice 8.5 Soit $z \neq 0$. Montrer que la définition donnée dans la Section 8.6 de la fonction z^n , $n \in \mathbb{N}$, correspond à celle obtenue de manière algébrique, c'est à dire

$$z^n = \underbrace{z \cdots z}_{n \text{ fois}}.$$

Exercice 8.6 Soient $z = x + iy$ et la fonction

$$f(z) = \sqrt{|xy|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

- (i) Vérifier les équations de Cauchy-Riemann associées à f en $z_0 = 0$.
- (ii) Montrer que f n'est pas holomorphe en $z_0 = 0$.
- (iii) Montrer que la partie réelle de f n'est pas différentiable en $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Exercice 8.7 Soient $z = x + iy$ et

$$f(z) = x^2 + iy^2.$$

Trouver le plus grand ensemble $L \subset \mathbb{C}$ où la fonction f est holomorphe. Justifier votre réponse.

8.8 Corrigés

Exercice 8.1 (i) Comme f est holomorphe en z_0 , nous avons, par définition,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0)}{h} = 0$$

et donc, en particulier,

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(z_0 + h) - f(z_0) - hf'(z_0)] = 0$$

ce qui implique

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(z_0 + h) - f(z_0)] = 0$$

d'où la continuité en z_0 .

(ii) *Addition* :

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(z_0+h) - (f+g)(z_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z_0+h) - g(z_0)}{h} \\ &= f'(z_0) + g'(z_0).\end{aligned}$$

Produit :

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(z_0+h) - (fg)(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(z_0+h) - f(z_0+h)g(z_0) + f(z_0+h)g(z_0) - (fg)(z_0)}{h} \\ &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).\end{aligned}$$

Quotient : par la formule pour le produit, il suffit de montrer que

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = -\frac{g'(z_0)}{g^2(z_0)}$$

pour obtenir la formule pour le quotient. On trouve directement que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1/g(z_0+h) - 1/g(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z_0) - g(z_0+h)}{h g(z_0+h) g(z_0)} = \frac{-g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

(iii) Puisque f est holomorphe en z_0 et g en $f(z_0)$, on peut écrire

$$f(z_0+h_1) - f(z_0) = h_1 (f'(z_0) + \epsilon_1(h_1)), \quad \forall h_1 \in \mathbb{C} \quad (8.1)$$

$$g(f(z_0)+h_2) - g(f(z_0)) = h_2 (g'(f(z_0)) + \epsilon_2(h_2)), \quad \forall h_2 \in \mathbb{C} \quad (8.2)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_i(h) = 0$. Choisissons dans le membre de gauche de (8.2)

$$h_2 = f(z_0+h_1) - f(z_0)$$

et on trouve donc

$$g(f(z_0)+h_2) - g(f(z_0)) = g(f(z_0+h_1)) - g(f(z_0)).$$

Puis prenons dans le membre de droite de (8.2)

$$h_2 = h_1 (f'(z_0) + \epsilon_1(h_1))$$

(qui, par (8.1), est égal au précédent) et nous obtenons, en utilisant l'identité précédente, que

$$g(f(z_0+h_1)) - g(f(z_0)) = h_1 (f'(z_0)g'(f(z_0)) + \epsilon_3(h_1))$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon_3(h) = 0$. Ceci montre bien que $g \circ f$ est holomorphe en z_0 et que

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0). \quad \spadesuit$$

Exercice 8.2 (i) On utilise le critère de d'Alembert : pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^{n+1} n!}{|z|^n (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

ce qui montre que la série converge dans tout \mathbb{C} et donc le rayon de convergence est infini.

(ii) Par le Théorème 8.6, on sait qu'une série de puissance est holomorphe sur son rayon de convergence et que sa dérivée s'obtient en dérivant termes à termes. Par le point précédent, e^z est holomorphe dans \mathbb{C} , d'où

$$(e^z)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!} = e^z.$$

(iii) Soit $z = x + i y$. Par définition, nous avons

$$\begin{aligned} e^{i y} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i y)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} i^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} i^{2k+1} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

et donc

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

(iv) Les autres propriétés découlent immédiatement du point précédent. ♠

Exercice 8.3 (i) Soit $z = x + i y$. On rappelle que

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y) \quad \text{et} \quad \log z = \log |z| + i \arg z, \quad z \neq 0.$$

- Comme $y \in]-\pi, \pi]$, alors $\arg e^z = y$ et donc

$$\log e^z = \log |e^z| + i \arg e^z = x + i y = z.$$

- Par ailleurs on trouve que

$$e^{\log z} = e^{\log |z|} e^{i \arg z} = |z| e^{i \arg z} = z.$$

- On rappelle que l'argument de $z \in \mathbb{C}$ est le seul scalaire $\arg z \in]-\pi, \pi]$ tel que l'on puisse écrire

$$z = |z| e^{i \arg z}.$$

On a donc

$$z w = |z| e^{i \arg z} |w| e^{i \arg w} = |z w| e^{i(\arg z + \arg w)}$$

et par conséquent, puisque la fonction $t \rightarrow e^{it}$ est 2π -périodique, on déduit que

$$\arg(z w) = \begin{cases} \arg z + \arg w & \text{si } \arg z + \arg w \in]-\pi, \pi] \\ \arg z + \arg w - 2\pi & \text{si } \arg z + \arg w \in]\pi, 2\pi] \\ \arg z + \arg w + 2\pi & \text{si } \arg z + \arg w \in]-2\pi, -\pi]. \end{cases}$$

En utilisant la définition du logarithme, à savoir

$$\log(zw) = \log|zw| + i \arg(zw) = \log|z| + \log|w| + i \arg(zw),$$

on obtient directement le résultat.

(ii) La faute est manifestement dans l'égalité $(e^{2\pi i})^{1/2} = e^{\pi i}$. Par définition,

$$(e^{2\pi i})^{1/2} = e^{\log(e^{2\pi i})/2} = e^{i \arg(e^{2\pi i})/2}. \quad (8.3)$$

La fonction $\arg z$ prend ses valeurs dans $]-\pi, \pi]$ (la détermination principale), on trouve

$$\arg(e^{2\pi i}) = 0,$$

et donc

$$(e^{2\pi i})^{1/2} = e^0 = 1.$$

Par contre, si on fait la faute suivante

$$\arg(e^{2\pi i}) = 2\pi,$$

alors (8.3) nous donne la fausse égalité, à savoir

$$(e^{2\pi i})^{1/2} = e^{\pi i}.$$

On a donc que la propriété suivante, vraie dans \mathbb{R} , est fausse dans \mathbb{C} :

$$(z^\beta)^\gamma \neq z^{\beta\gamma}, \quad z, \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \quad z \neq 0. \quad \spadesuit$$

Exercice 8.4 (i) Le fait que $z^{\beta+\gamma} = z^\beta z^\gamma$ est vrai suit directement des propriétés de l'exponentielle complexe.

(ii) Utilisant l'Exercice 8.3, on a

$$z^\gamma w^\gamma = e^{\gamma \log z} e^{\gamma \log w} = e^{\gamma(\log z + \log w)}$$

et donc

$$z^\gamma w^\gamma = \begin{cases} e^{\gamma \log(zw)} & \text{si } \arg z + \arg w \in]-\pi, \pi] \\ e^{\gamma(\log(zw) + 2\pi i)} & \text{si } \arg z + \arg w \in]\pi, 2\pi] \\ e^{\gamma(\log(zw) - 2\pi i)} & \text{si } \arg z + \arg w \in]-2\pi, -\pi]. \end{cases}$$

Comme $e^{\gamma \log(zw)} = (zw)^\gamma$, on a le résultat.

(iii) La fonction $z^\gamma = e^{\gamma \log z}$ est holomorphe dans O , car composition des fonctions e^w et $\log z$, holomorphes dans O (par l'Exercice 8.1). On a donc

$$f'(z) = (e^{\gamma \log z})' = e^{\gamma \log z} \gamma \frac{1}{z} = \gamma z^{\gamma-1}. \quad \spadesuit$$

Exercice 8.5 Utilisant l'Exercice 8.3, on a que

$$z^n = e^{n \log z} = e^{\log z + \dots + \log z} = e^{\log z} \dots e^{\log z} = z \cdot \dots \cdot z$$

d'où le résultat. ♠

Exercice 8.6 Posons $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$ et $v \equiv 0$, de sorte que

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y).$$

(i) Nous avons trivialement $v_x(0, 0) = v_y(0, 0) = 0$. Montrons que $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$. Par définition, nous avons directement

$$u_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

de même pour u_y . Les équations de Cauchy-Riemann sont donc satisfaites avec

$$u_x(0, 0) = v_y(0, 0) = 0, \quad u_y(0, 0) = -v_x(0, 0) = 0.$$

(ii) Soit $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$. Nous voulons montrer que la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{h}$$

n'est pas définie. D'une part, en choisissant $h_2 = 0$, la limite converge vers 0. D'autre part, si $h_1 = h_2 > 0$, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{h_1 + ih_2} = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{h_1}{h_1(1+i)} = \frac{1}{1+i} \neq 0.$$

Donc f n'est pas holomorphe en 0.

(iii) Supposons par l'absurde que u soit différentiable en $(0, 0)$. Par définition ceci implique, pour $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{u(h_1, h_2) - u(0, 0) - h_1 u_x(0, 0) - h_2 u_y(0, 0)}{|h|} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

En particulier, si $h_1 = h_2 > 0$, nous avons

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{h_1}{\sqrt{2} h_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

ce qui est absurde, et donc u n'est pas différentiable en $(0, 0)$. ♠

Exercice 8.7 On appelle $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = x^2$ et $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = y^2$. On a alors

$$u_x(x, y) = 2x, \quad v_y(0, 0) = 2y \quad \text{et} \quad u_y(x, y) = 0 = -v_x(x, y).$$

Comme u et v sont différentiables sur tout \mathbb{R}^2 et que les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites uniquement quand $x = y$, on déduit que le plus grand ensemble où f est holomorphe est

$$L = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}. \quad \spadesuit$$

Chapitre 9

Intégration complexe

9.1 Rappel sur les intégrales curvilignes

On va adapter ce qu'on a vu au Chapitre 2 au cas complexe.

Définition 9.1 (i) Soit $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{C})$ et $f \in C^0(\gamma([a, b]); \mathbb{C})$, c'est à dire

$$f : \gamma([a, b]) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

est continue. L'intégrale de f le long de γ est définie par

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

(ii) Soit $\gamma \in C_{morc}^1([a, b]; \mathbb{C})$, alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Remarque Pour que toutes ces notions aient un sens géométrique, en particulier celle de longueur, il faut faire des hypothèses supplémentaires sur γ . Il faut supposer que $\gamma([a, b])$ est une courbe simple et régulière (par morceaux), au sens des Définitions 2.1 et 2.3 du Chapitre 2; en particulier, $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ et γ est injective sur $[a, b]$. Sous ces hypothèses la longueur d'une telle courbe est donnée par

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Nous ne ferons cette hypothèse supplémentaire que si cela est nécessaire. ♠

Exemple Soient $f(z) = z^2$, et γ_1, γ_2 respectivement le demi-cercle supérieur de rayon 1 centré en l'origine et le cercle de rayon 1 centré en l'origine. Calculer $\int_{\gamma_i} f(z) dz$, $i = 1, 2$.

Discussion $\gamma_1 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, où $\gamma_1(\theta) = e^{i\theta}$ et donc $\gamma_1'(\theta) = i e^{i\theta}$. On a

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^\pi (e^{i\theta})^2 i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^\pi e^{3i\theta} d\theta = \frac{e^{3i\theta}}{3} \Big|_0^\pi = -\frac{2}{3}.$$

b) $\gamma_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, avec $\gamma_2(\theta) = e^{i\theta}$ et donc $\gamma_2'(\theta) = i e^{i\theta}$. On obtient

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_0^{2\pi} (e^{i\theta})^2 i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{3i\theta} d\theta = \frac{e^{3i\theta}}{3} \Big|_0^{2\pi} = 0. \spadesuit$$

On a, par ailleurs, les inégalités suivantes.

Proposition 9.2 (i) Soit $g \in C^0([a, b]; \mathbb{C})$, alors

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b |g(t)| dt.$$

(ii) Soient $\gamma \in C^1([a, b]; \mathbb{C})$ (idem pour C_{morc}^1) et $f \in C^0(\gamma([a, b]); \mathbb{C})$.
Alors

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma([a, b])} \{|f(z)|\} \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Démonstration (i) Posons $\lambda = \int_a^b g(t) dt$. Si $\lambda = 0$, le résultat est trivial.
Supposons donc que $\lambda \neq 0$ et définissons

$$\mu = \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} \Rightarrow [|\mu| = 1 \text{ et } \mu \lambda = |\lambda|].$$

On observe ensuite que

$$|\lambda| = \mu \lambda = \int_a^b (\mu g(t)) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(\mu g(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(\mu g(t)) dt$$

et donc, comme le membre de gauche est réel, on obtient que

$$\int_a^b \operatorname{Im}(\mu g(t)) dt = 0.$$

Finalement on trouve le résultat souhaité, à savoir

$$|\lambda| = \int_a^b \operatorname{Re}(\mu g(t)) dt \leq \int_a^b |\mu g(t)| dt \leq |\mu| \int_a^b |g(t)| dt = \int_a^b |g(t)| dt.$$

(ii) En appliquant (i) on infère que

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt$$

et donc

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} \{|f(\gamma(t))|\} \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

ce qui est le résultat cherché. ■

On a une première version très faible du Théorème de Cauchy, mais qui nous sera utile par la suite.

Proposition 9.3 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et deux fonctions

$$f, F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

telles que f soit continue, F soit holomorphe dans Ω et $F' = f$ (F est alors appelé une **primitive** de f). Soit $\gamma \in C_{\text{morc}}^1([a, b]; \Omega)$ (i.e. $\gamma([a, b]) \subset \Omega$), alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particulier si γ est fermée, on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Démonstration *Etape 1.* Notons, pour $z = x + iy$,

$$u = u(x, y) = \operatorname{Re} F(z) \quad \text{et} \quad v = v(x, y) = \operatorname{Im} F(z).$$

Comme F est holomorphe on a, par le Théorème 8.4, que

$$u_x = v_y \quad \text{et} \quad u_y = -v_x$$

et

$$F'(z) = u_x + i v_x = v_y - i u_y.$$

Comme $F' = f$ est continue, on déduit que $u_x, v_x, u_y, v_y \in C^0(\Omega)$ et donc que $u, v \in C^1(\Omega)$ et les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites.

Etape 2. Montrons que si $\gamma \in C^1([a, b]; \Omega)$, $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$, alors

$$F'(\gamma(t)) \gamma'(t) = \frac{d}{dt} [u(\gamma(t))] + i \frac{d}{dt} [v(\gamma(t))] = \frac{d}{dt} [F(\gamma(t))].$$

En effet

$$\begin{aligned} F'(\gamma(t)) \gamma'(t) &= [u_x(\alpha(t), \beta(t)) + i v_x(\alpha(t), \beta(t))] [\alpha'(t) + i \beta'(t)] \\ &= [u_x(\alpha, \beta) \alpha' - v_x(\alpha, \beta) \beta'] + i [v_x(\alpha, \beta) \alpha' + u_x(\alpha, \beta) \beta'] \end{aligned}$$

et donc en utilisant les équations de Cauchy-Riemann on trouve

$$\begin{aligned} F'(\gamma(t)) \gamma'(t) &= [u_x(\alpha, \beta) \alpha' + u_y(\alpha, \beta) \beta'] + i [v_x(\alpha, \beta) \alpha' + v_y(\alpha, \beta) \beta'] \\ &= \frac{d}{dt} [u(\gamma(t))] + i \frac{d}{dt} [v(\gamma(t))] = \frac{d}{dt} [F(\gamma(t))]. \end{aligned}$$

Etape 3. On fait la démonstration quand $\gamma \in C^1([a, b]; \Omega)$ (mais la démonstration est exactement la même dans le cas général). On a, par l'Etape 2 et le fait que $f = F'$, que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} [F(\gamma(t))] dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. ■

Corollaire 9.4 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

telle que f soit holomorphe dans Ω et $f' = 0$ dans Ω . Alors f est constante.

Démonstration cf. Exercice 9.3. ■

9.2 Le lemme de Goursat

Le lemme de Goursat est un cas particulier du Théorème de Cauchy. On définit le *diamètre* d d'un triangle T par

$$d = \sup \{|z - w| : z, w \in T\}$$

ainsi que son *périmètre*

$$p = \text{long}(\partial T).$$

Théorème 9.5 (Lemme de Goursat) Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $\overline{T} \subset \Omega$ un triangle et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0.$$

Démonstration *Etape 1.* Soient A, B, C les sommets du triangle et soient A_1, B_1, C_1 les milieux des trois côtés du triangle. On a ainsi formé quatre nouveaux triangles T_j^1 , $j = 1, 2, 3, 4$ (cf. Figure 9.1). On a alors, à cause du sens de parcours,

$$\int_{\partial T} f(z) dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial T_j^1} f(z) dz$$

On doit sûrement avoir pour au moins un $j = 1, 2, 3, 4$ que

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T_j^1} f(z) dz \right|.$$

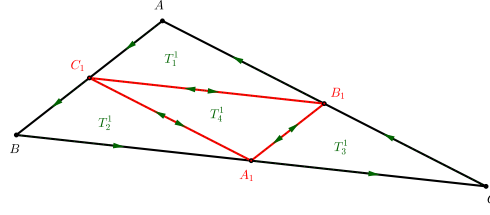


FIG. 9.1 –

On choisit un de ces T_j^1 et on l'appelle T^1 (noter que $T^1 \subset T$). Comme les quatre triangles sont semblables, il est facile de voir que le périmètre (respectivement le diamètre) de chaque triangle est $p/2$ (resp $d/2$) où p (resp d) est le périmètre (resp. le diamètre) de T .

Etape 2. On itère ainsi le procédé et on va construire des triangles T^n , de périmètre $p/2^n$ (respectivement de diamètre $d/2^n$) tels que (cf. Figure 9.2)

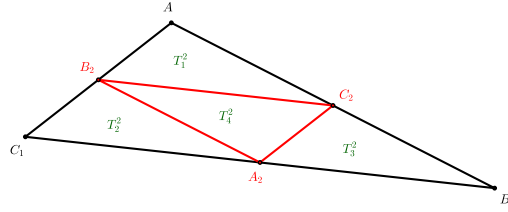


FIG. 9.2 –

$$\overline{T^n} \subset \dots \subset \overline{T^1} \subset \overline{T} \quad \text{et} \quad \left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T^n} f(z) dz \right|.$$

La suite $\{\overline{T^n}\}$ est une suite décroissante d'ensembles fermés dont le périmètre tend vers 0 et donc (résultat classique en topologie) il existe un unique

$$z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{T^n} \subset \overline{T} \subset \Omega.$$

Etape 3. Ecrivons maintenant que f est holomorphe en z_0

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \epsilon(z, z_0)(z - z_0)$$

avec $\epsilon(z, z_0) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow z_0$. Par la Proposition 9.3 appliquée à

$$f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) \quad \text{et} \quad F(z) = f(z_0)z + f'(z_0) \frac{(z - z_0)^2}{2}$$

on déduit que

$$\int_{\partial T^n} f(z) dz = \int_{\partial T^n} \epsilon(z, z_0) (z - z_0) dz.$$

Comme $z \in \partial T^n$ et $z_0 \in \overline{T^n}$ on obtient que

$$|z - z_0| \leq \frac{d}{2^n}$$

et donc pour n suffisamment grand on a $|\epsilon(z, z_0)| \leq \epsilon$, où ϵ est arbitraire,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\partial T^n} f(z) dz \right| = 4^n \left| \int_{\partial T^n} \epsilon(z, z_0) (z - z_0) dz \right| \\ &\leq \epsilon 4^n \frac{d}{2^n} \frac{p}{2^n} = \epsilon d p. \end{aligned}$$

Comme ϵ est arbitraire, on a bien démontré le lemme de Goursat. ■

Le Lemme de Goursat a comme corollaire (qui sera amélioré plus loin, cf. Théorème 9.11).

Théorème 9.6 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors, il existe une **primitive** de f , c'est à dire qu'il existe $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe tel que

$$F' = f \quad \text{dans } \Omega.$$

Démonstration *Etape 1.* Supposons que Ω soit étoilé par rapport à $\xi \in \Omega$. On définit

$$F(z) = \int_{[\xi, z]} f(w) dw \quad z \in \Omega$$

où

$$[\xi, z] = \{\eta \in \mathbb{C} : \eta = \gamma(t) = (1-t)\xi + tz, t \in [0, 1]\}.$$

On considère $h \in \mathbb{C}$, suffisamment petit pour que $z+h \in \Omega$. On va montrer (cf. Etape 2) que

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(w) dw.$$

Si c'est le cas on peut conclure car

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(w) dw = h \int_0^1 f(z+th) dt$$

et donc

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \int_0^1 [f(z+th) - f(z)] dt.$$

On a alors (f étant holomorphe, elle est continue, cf. Proposition 8.3)

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \sup_{|w-z| \leq |h|} \{|f(w) - f(z)|\} \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0,$$

ce qui implique le résultat.

Etape 2. Montrons donc que

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(w) dw.$$

Cas 1 : $\{\xi, z, z+h\}$ forment un vrai triangle T (cf. Figure 9.3). Alors

$$\partial T = [\xi, z] \cup [\xi, z+h] \cup [z, z+h]$$

est entièrement contenu dans Ω . On applique alors le Lemme de Goursat et on

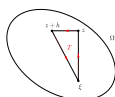


FIG. 9.3 –

a (attention au sens)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial T} f(w) dw = \int_{[\xi, z]} f(w) dw + \int_{[z, z+h]} f(w) dw - \int_{[\xi, z+h]} f(w) dw \\ &= F(z) - F(z+h) + \int_{[z, z+h]} f(w) dw \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Cas 2 : $\xi = z$ ou $\{\xi, z, z+h\}$ sont alignés. On a tout de suite (on n'a pas besoin d'invoquer le lemme de Goursat)

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(w) dw$$

ce qui implique aussi le résultat. ■

9.3 Continuité des dérivées des fonctions holomorphes

On commence par un cas spécial du Théorème de Cauchy (cf. Théorèmes 9.12 et 9.14 pour des versions plus générales).

Théorème 9.7 (Théorème de Cauchy pour les étoilés) Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\gamma \in C_{\text{morc}}^1([a, b]; \Omega)$ (i.e. $\gamma([a, b]) \subset \Omega$) avec $\gamma(a) = \gamma(b)$. Alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Démonstration La démonstration résulte de la combinaison de la Proposition 9.3 et du Théorème 9.6. ■

Exemple Soient $\gamma \in C_{\text{morc}}^1([a, b]; \mathbb{C})$ avec $\gamma(a) = \gamma(b)$ et

$$f(z) = \sin(e^z) \Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0. \spadesuit$$

On a maintenant un cas spécial de la Formule intégrale de Cauchy.

Théorème 9.8 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $z_0 \in \Omega$ et soit γ un cercle tel que $z_0 \in \text{int } \gamma$ et $\gamma \cup \text{int } \gamma \subset \Omega$. Alors

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Exemple Soient $\gamma = \partial B_r(0)$ et

$$f(z) = \sin(e^z) \Rightarrow \int_{\gamma} \frac{\sin(e^z)}{z} dz = 2\pi i \sin(1). \spadesuit$$

Démonstration La preuve est faite en deux étapes.

Etape 1. On pose

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

Puis on choisit $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\overline{B_{\epsilon}(z_0)} \subset \text{int } \gamma$, on a ainsi

$$\overline{B_{\epsilon}(z_0)} \subset \text{int } \gamma \subset \gamma \cup \text{int } \gamma \subset \Omega.$$

On décompose "l'anneau" $\text{int } \gamma \setminus \overline{B_{\epsilon}(z_0)}$ en quatre parties (cf. Figure 9.4, la décomposition en quatre parties n'est pas nécessaire) et on appelle γ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, les bords de ces quatre parties.

Voyons un peu plus précisément comment est décomposé l'anneau.

(i) On choisit γ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, comme dans le dessin, de manière que $\gamma_j \in C_{\text{morc}}^1([a, b]; \Omega \setminus \overline{B_{\epsilon/2}(z_0)})$, $\gamma_j(a) = \gamma_j(b)$, $\gamma_j \cup \text{int } \gamma_j \subset \Omega \setminus \overline{B_{\epsilon/2}(z_0)}$ est étoilé et

$$\bigcup_{j=1}^4 \gamma_j = \gamma \cup \gamma_{\epsilon} \quad \text{où} \quad \gamma_{\epsilon} = \partial B_{\epsilon}(z_0).$$

(ii) On agrandit légèrement $\gamma_j \cup \text{int } \gamma_j$ pour que

$$\gamma_j \cup \text{int } \gamma_j \subset \Omega_j \subset \overline{\Omega_j} \subset \Omega \setminus \overline{B_{\epsilon/2}(z_0)}$$

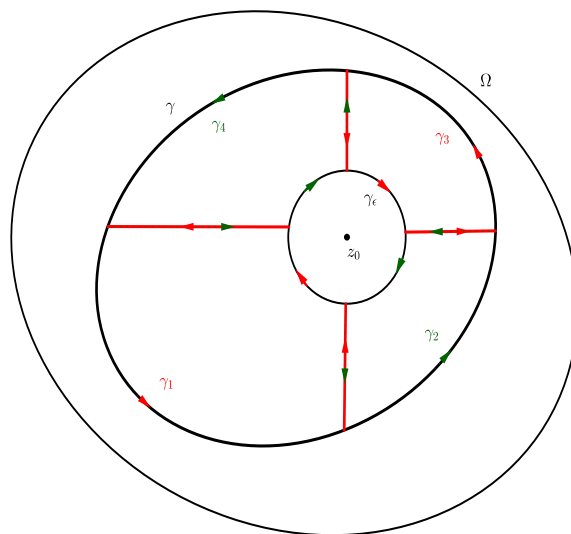


FIG. 9.4 –

avec Ω_j étoilé.

Etape 2. On applique alors le Théorème de Cauchy (cf. Théorème 9.7) pour les domaines étoilés à Ω_j et à chacune des courbes γ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, pour déduire que

$$\int_{\gamma_j} g = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

On a clairement, à cause des sens de parcours, que

$$\int_{\gamma} g - \int_{\gamma_{\epsilon}} g = \sum_{j=1}^4 \int_{\gamma_j} g = 0$$

et donc

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_{\epsilon}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon e^{i\theta} d\theta.$$

Comme f est holomorphe et donc continue, on a bien par un passage à la limite que

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

La démonstration est donc complète. ■

Corollaire 9.9 *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème, alors la fonction f est infiniment dérivable au sens complexe et*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

De plus, pour tout $r > 0$ tel que $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$, l'inégalité suivante a lieu

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{r^n} \max \{ |f(z)| : z \in \partial B_r(z_0) \}.$$

Démonstration (i) On procède par induction, le cas $n = 0$ ayant été démontré dans le théorème précédent. On choisit h suffisamment petit pour que $z_0 + h \in \text{int } \gamma$. Supposons donc qu'on ait démontré le corollaire jusqu'à $n - 1$, c'est à dire

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(z_0) &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^n} dz \\ f^{(n-1)}(z_0 + h) &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)^n} dz. \end{aligned}$$

On a donc, en réduisant au même dénominateur, que

$$\frac{f^{(n-1)}(z_0 + h) - f^{(n-1)}(z_0)}{h} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \frac{(z - z_0)^n - (z - z_0 - h)^n}{h(z - z_0)^n(z - z_0 - h)^n} dz. \quad (9.1)$$

Par ailleurs on observe que, comme

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k,$$

on a pour $x = z - z_0$ et $y = z - z_0 - h$

$$\frac{(z - z_0)^n - (z - z_0 - h)^n}{h} = \sum_{k=0}^{n-1} (z - z_0)^{n-k-1} (z - z_0 - h)^k$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(z - z_0)^n - (z - z_0 - h)^n}{h} \right] = n(z - z_0)^{n-1}.$$

De ceci on déduit immédiatement que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(z - z_0)^n - (z - z_0 - h)^n}{h(z - z_0)^n(z - z_0 - h)^n} \right] = \frac{n(z - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^{2n}} = \frac{n}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

En passant à la limite dans (9.1), ce qui est légal car on a convergence uniforme, on trouve

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

comme souhaité.

(ii) On applique la formule à $\gamma = \partial B_r(z_0)$ et on a (en utilisant la Proposition 9.2)

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \max \left[\left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \right| : z \in \partial B_r(z_0) \right] \text{long}(\partial B_r(z_0))$$

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!}{2\pi r^{n+1}} 2\pi r \max [|f(z)| : z \in \partial B_r(z_0)]$$

et le résultat est démontré. ■

On a enfin le résultat souhaité, mais qui sera amélioré plus tard (cf. Théorème 9.16)

Théorème 9.10 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe $u = \text{Re } f$ et $v = \text{Im } f$, alors $u, v \in C^\infty(\Omega)$. De plus en tous points $z = x + iy \in \Omega$

$$u_x = v_y \quad \text{et} \quad u_y = -v_x$$

et

$$\Delta u = \Delta v = 0.$$

Démonstration On va montrer seulement que $u, v \in C^1(\Omega)$, mais le résultat général est évident par induction. Par le Corollaire 9.9, on a que f' est holomorphe et par la Proposition 8.3, on déduit que f' est continue. Les équations de Cauchy-Riemann impliquent le résultat souhaité. ■

Le résultat précédent nous permet d'améliorer le théorème sur les primitives, cf. Théorème 9.6.

Théorème 9.11 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Alors, il existe une primitive de f , c'est à dire qu'il existe $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe tel que

$$F' = f \quad \text{dans } \Omega.$$

Démonstration La démonstration est une combinaison de celles des Théorèmes 3.9 et 9.6.

Etape 1. En effet fixons $\xi \in \Omega$. Soit $z \in \Omega$ un point quelconque et $\gamma_z \in C_{\text{morc}}^1([a, b]; \Omega)$ (i.e. $\gamma_z([a, b]) \subset \Omega$) avec $\gamma_z(a) = \xi$ et $\gamma_z(b) = z$. On définit alors

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) dw.$$

Montrons, comme dans le Théorème 3.9, que la définition de F est indépendante du choix de γ_z . Comme d'habitude il suffit de montrer cette indépendance pour des $\gamma_z \in C^2([a, b]; \Omega)$. Soit donc $\gamma'_z \in C^2([a, b]; \Omega)$ avec $\gamma'_z(a) = \xi$ et $\gamma'_z(b) = z$. Comme Ω est simplement connexe, il existe

$$\gamma \in C^2([a, b] \times [0, 1]; \Omega), \quad \gamma = \gamma(t, s) = \alpha(t, s) + i\beta(t, s),$$

(dans la définition de simplement connexe on a seulement $\gamma \in C^0$, mais, comme déjà dit, on peut supposer, sans perte de généralité, que $\gamma \in C^2$ car Ω est ouvert) tel que

$$\begin{aligned} [\gamma(t, 0) = \gamma_z(t) \quad \text{et} \quad \gamma(t, 1) = \gamma'_z(t)], \quad \forall t \in [a, b] \\ \gamma(a, s) = \gamma_z(a) = \gamma'_z(a) = \xi, \quad \forall s \in [0, 1] \\ \gamma(b, s) = \gamma_z(b) = \gamma'_z(b) = z, \quad \forall s \in [0, 1] \\ \gamma(t, s) \in \Omega, \quad \forall (t, s) \in [a, b] \times [0, 1]. \end{aligned}$$

On définit alors

$$\Phi(s) = \int_a^b f(\gamma(t, s)) \gamma_t(t, s) dt = \varphi(s) + i\psi(s)$$

où $(f(z) = u(x, y) + i v(x, y))$ et $\gamma_t(t, s) = \alpha_t(t, s) + i\beta_t(t, s)$

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \int_a^b [u(\alpha(t, s), \beta(t, s)) \alpha_t(t, s) - v(\alpha(t, s), \beta(t, s)) \beta_t(t, s)] dt \\ \psi(s) &= \int_a^b [u(\alpha(t, s), \beta(t, s)) \beta_t(t, s) + v(\alpha(t, s), \beta(t, s)) \alpha_t(t, s)] dt. \end{aligned}$$

On doit montrer que $\Phi(0) = \Phi(1)$; et pour ceci nous montrerons que $\Phi'(s) = 0$, i.e $\varphi'(s) = \psi'(s) = 0$. On va montrer cela seulement pour la partie réelle φ , le résultat pour la partie imaginaire ψ étant montré de manière analogue. Calculons donc la dérivée (ceci est légal car on sait maintenant que $u, v \in C^\infty$)

$$\varphi'(s) = \int_a^b [(u \alpha_{ts} - v \beta_{ts}) + (u_x \alpha_s + u_y \beta_s) \alpha_t - (v_x \alpha_s + v_y \beta_s) \beta_t] dt$$

Observons ensuite que

$$(u \alpha_s - v \beta_s)_t = (u \alpha_{ts} - v \beta_{ts}) + (u_x \alpha_t + u_y \beta_t) \alpha_s - (v_x \alpha_t + v_y \beta_t) \beta_s$$

et donc en invoquant les équations de Cauchy-Riemann (pour la partie réelle φ on utilise seulement que $u_y = -v_x$, tandis que pour la partie imaginaire ψ on fait uniquement appel à $u_x = v_y$) on obtient

$$\begin{aligned} (u \alpha_s - v \beta_s)_t &= (u \alpha_{ts} - v \beta_{ts}) + (u_x \alpha_t - v_x \beta_t) \alpha_s - (-u_y \alpha_t + v_y \beta_t) \beta_s \\ &= (u \alpha_{ts} - v \beta_{ts}) + (u_x \alpha_s + u_y \beta_s) \alpha_t - (v_x \alpha_s + v_y \beta_s) \beta_t. \end{aligned}$$

On infère ainsi que

$$\varphi'(s) = [u(\alpha(t, s), \beta(t, s)) \alpha_s(t, s) - v(\alpha(t, s), \beta(t, s)) \beta_s(t, s)]|_{t=a}^{t=b} = 0$$

car $\alpha_s(b, s) = \beta_s(b, s) = \alpha_s(a, s) = \beta_s(a, s) = 0$.

Etape 2. On considère $h \in \mathbb{C}$, suffisamment petit pour que $[z, z+h] \subset \Omega$. Il suit immédiatement du calcul précédent que

$$\int_{\gamma_{z+h}} f(w) dw - \int_{\gamma_z} f(w) dw = \int_{[z, z+h]} f(w) dw$$

et par conséquent

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(w) dw = h \int_0^1 f(z+th) dt.$$

On déduit que

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \int_0^1 [f(z+th) - f(z)] dt.$$

On a alors (f étant holomorphe, elle est continue, cf. Proposition 8.3)

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \sup_{|w-z| \leq |h|} \{|f(w) - f(z)|\} \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0$$

ce qui implique le résultat. ■

9.4 Théorème et Formule intégrale de Cauchy

On va maintenant généraliser les Théorèmes 9.7, 9.8 et le Corollaire 9.9.

9.4.1 Le Théorème de Cauchy

Le Théorème 9.7 va être étendu aux domaines simplement connexes (cf. Théorème 9.12) et d'une façon un peu différente aux domaines réguliers (cf. Théorème 9.14).

Théorème 9.12 (Théorème de Cauchy pour les simplement connexes)

Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $\gamma \in C_{morc}^1([a, b]; \Omega)$ (i.e. $\gamma([a, b]) \subset \Omega$) avec $\gamma(a) = \gamma(b)$. Alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Démonstration La démonstration résulte de la combinaison de la Proposition 9.3 du Théorème 9.11. ■

On rappelle maintenant la notion de domaine régulier au sens du Théorème de Green.

Définition 9.13 Un ouvert $O \subset \mathbb{C}$ est dit **régulier** s'il existe $O_0, O_1, \dots, O_m \subset \mathbb{C}$ des ouverts bornés tels que

$$O = O_0 \setminus \bigcup_{k=1}^m \overline{O}_k$$

avec

$$\begin{aligned}\overline{O}_k &\subset O_0 & k = 1, 2, \dots, m \\ \overline{O}_j \cap \overline{O}_k &= \emptyset & j \neq k \text{ et } j, k = 1, \dots, m \\ \partial O_k &= \gamma_k & k = 0, 1, 2, \dots, m\end{aligned}$$

où les γ_k sont des courbes simples fermées régulières par morceaux.

Théorème 9.14 (Théorème de Cauchy pour les domaines réguliers) Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $O \subset \overline{O} \subset \Omega$ un domaine régulier et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, alors

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

En particulier si γ est une courbe simple fermée et régulière par morceaux telle que $\gamma \cup \text{int } \gamma \subset \Omega$, alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Démonstration Le cas particulier se déduit du cas général en prenant

$$O_0 = \text{int } \gamma \quad \text{et} \quad O_1 = \dots = O_m = \emptyset.$$

Montrons maintenant le théorème sous l'hypothèse supplémentaire que toutes les courbes $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ sont régulières (si γ_k sont seulement régulières par morceaux on procède de manière similaire).

Etape 1. Soit γ une courbe régulière de paramétrisation $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t).$$

On écrit $f = u + iv$ et on trouve donc

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b (u + iv) \cdot (\alpha' + i\beta') dt \\ &= \int_a^b [u(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t) - v(\alpha(t), \beta(t)) \beta'(t)] dt \\ &\quad + i \int_a^b [v(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t) + u(\alpha(t), \beta(t)) \beta'(t)] dt.\end{aligned}$$

On pose ensuite

$$F(x, y) = (u(x, y), -v(x, y)) \quad \text{et} \quad G(x, y) = (v(x, y), u(x, y)).$$

Noter que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} F \cdot dl &= \int_a^b [u(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t) - v(\alpha(t), \beta(t)) \beta'(t)] dt \\ \int_{\gamma} G \cdot dl &= \int_a^b [v(\alpha(t), \beta(t)) \alpha'(t) + u(\alpha(t), \beta(t)) \beta'(t)] dt\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} F \cdot dl + i \int_{\gamma} G \cdot dl.$$

Etape 2. On applique alors le Théorème de Green, noter que $F, G \in C^1(\overline{O}; \mathbb{R}^2)$. On a donc que

$$\begin{aligned} \int_{\partial O} f(z) dz &= \int_{\partial O} F \cdot dl + i \int_{\partial O} G \cdot dl \\ &= \iint_O (\operatorname{rot} F) dx dy + i \iint_O (\operatorname{rot} G) dx dy \\ &= \iint_O (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_O (u_x - v_y) dx dy. \end{aligned}$$

En utilisant les équations de Cauchy-Riemann ($u_x = v_y$ et $u_y = -v_x$), on en déduit que

$$0 = \int_{\partial O} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz - \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

ce qui est le résultat souhaité. ■

9.4.2 La Formule intégrale de Cauchy

Le Théorème 9.8 et le Corollaire 9.9 se généralisent comme suit.

Théorème 9.15 (Formule intégrale de Cauchy) Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit γ une courbe simple fermée et régulière par morceaux telle que $\gamma \cup \operatorname{int} \gamma \subset \Omega$. Alors f est infiniment différentiable et si $n \in \mathbb{N}$ alors

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \forall z_0 \in \operatorname{int} \gamma.$$

En particulier quand $n = 0$, cette formule s'écrit

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \forall z_0 \in \operatorname{int} \gamma.$$

Remarque Dans les Théorèmes 9.14 et 9.15 on observe que si Ω est simplement connexe et si $\gamma \subset \Omega$, alors automatiquement $\gamma \cup \operatorname{int} \gamma \subset \Omega$; c'est pour cette raison que, dans la plupart des livres d'analyse complexe, les théorèmes sont énoncés sous l'hypothèse de connexité simple. Et donc nos théorèmes ne sont qu'en apparence plus généraux.

Voyons maintenant des exemples.

Exemple Soit γ une courbe simple, fermée et régulière par morceaux. Discuter en fonction de γ la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(2z)}{z} dz.$$

Discussion On observe que $z = 0$ est une singularité pour $f(z) = [\cos(2z)]/z$. On va distinguer plusieurs cas.

Cas 1 $0 \in \text{int } \gamma$. On applique la formule intégrale de Cauchy à $g(z) = \cos(2z)$ et on trouve

$$1 = g(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cos(2z)}{z-0} dz$$

et par conséquent $\int_{\gamma} \frac{\cos(2z)}{z} dz = 2\pi i$.

Remarque La formule intégrale de Cauchy représente un instrument bien utile dans le calcul de certaines intégrales. Un calcul direct, dans notre cas

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(2z)}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2e^{i\theta})}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} \cos(2e^{i\theta}) d\theta,$$

n'est pas évident.

Cas 2 $0 \notin \overline{\text{int } \gamma}$. Le Théorème de Cauchy appliqué à f nous permet de conclure immédiatement que

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(2z)}{z} dz = 0.$$

Cas 3 $0 \in \gamma$. Dans ce dernier cas l'intégrale n'est pas bien définie. ♠

Exemple Soit $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\}$. Calculer

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3} dz.$$

Discussion Soient $f(z) = e^{z+2}$, $z_0 = 2$ et $n = 2$. Le Théorème 9.15 nous donne

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(2) = \frac{2\pi i}{2} e^4 = \pi i e^4. \quad \spadesuit$$

Démonstration (Théorème 9.15). La démonstration est un corollaire immédiat du Théorème de Cauchy (cf. Théorème 9.14). En effet prenons $z_0 \in \Omega$ et $\epsilon > 0$ arbitraire mais petit tel que $B_{\epsilon}(z_0) \subset \text{int } \gamma \subset \Omega$. Appliquons le Théorème de Cauchy à

$$O = \text{int } \gamma \setminus \overline{B_{\epsilon}(z_0)}, \quad \Omega' = \Omega \setminus \{z_0\} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}.$$

On trouve

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\partial B_{\epsilon}(z_0)} g(z) dz = i \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon e^{i\theta} d\theta.$$

Comme f est holomorphe et donc continue, on a bien par un passage à la limite que

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

Le cas des dérivées supérieures se démontre exactement comme ci-dessus et comme dans le Corollaire 9.9. ■

9.5 Conséquences du Théorème de Cauchy

Théorème 9.16 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Alors f admet une **série de Taylor** en z_0 c'est à dire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_r(z_0).$$

De plus

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Démonstration Posons $\gamma_r = \partial B_r(z_0)$. Comme

$$z \in B_r(z_0) = \text{int } \gamma_r \subset \gamma_r \cup \text{int } \gamma_r = \overline{B_r(z_0)} \subset \Omega,$$

on a par la formule intégrale de Cauchy que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

On écrit alors

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}.$$

Comme $\xi \in \gamma_r$ (i.e. $|\xi - z_0| = r$) et $z \in B_r(z_0)$ (i.e. $|z - z_0| < r$), on a

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} < 1$$

et on peut alors écrire, z étant fixé,

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right]^n$$

et la série converge uniformément pour $\xi \in \partial B_r(z_0)$ (car z est fixé). On peut donc permuter somme et intégrale pour avoir

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left[\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right]^n d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right\} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Donc si on pose

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

on trouve que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{et} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Le théorème est donc démontré. ■

Théorème 9.17 (Théorème de Liouville) *Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et bornée, alors elle est constante.*

Démonstration Il suffit de vérifier que $f' = 0$, en vertu du Corollaire 9.4 et du fait que \mathbb{C} est connexe. Par le Corollaire 9.9, on a que

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{r} \max \{|f(\xi)| : \xi \in \partial B_r(z)\} = \frac{M}{r} \rightarrow 0 \quad \text{si } r \rightarrow \infty$$

ceci est le résultat souhaité. ■

Théorème 9.18 (Formule de la moyenne) *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ suffisamment petit pour que $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt.$$

Démonstration Ceci suit immédiatement de la formule intégrale de Cauchy avec $\gamma = \partial B_r(z_0)$. En effet

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt$$

comme affirmé. ■

Théorème 9.19 (Théorème fondamental de l'algèbre) *Soient $n \geq 1$, un entier, et*

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$$

un polynôme tel que $a_n \neq 0$. Alors le polynôme a exactement n racines.

Démonstration (Pour une autre démonstration, cf. Exercice 11.4). Il suffit de voir que P a une racine, puis on procède par induction. Pour cela on suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas et donc, comme P est holomorphe dans \mathbb{C} et qu'il ne s'annule pas, on a que $z \rightarrow 1/P(z)$ est holomorphe dans \mathbb{C} . Si on réussit à montrer que cette dernière fonction est bornée, on aura par le Théorème de Liouville que $1/P$ et donc P est constant, ce qui est absurde.

On écrit donc, pour $z \neq 0$,

$$\frac{P(z)}{z^n} = a_n + \left(\frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right).$$

Comme chaque terme $a_i/z^{n-i} \rightarrow 0$ quand $|z| \rightarrow \infty$, on peut trouver $R > 0$ tel que

$$\left| \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \leq \frac{|a_n|}{2} \quad \forall |z| > R.$$

En conclusion, on a que

$$\left| \frac{P(z)}{z^n} \right| \geq |a_n| - \frac{|a_n|}{2} = \frac{|a_n|}{2} > 0 \quad \forall |z| > R$$

et donc

$$\frac{|P(z)|}{R^n} \geq \left| \frac{P(z)}{z^n} \right| \geq \frac{|a_n|}{2} > 0 \quad \forall |z| > R$$

ce qui implique

$$\left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq \frac{2}{|a_n| R^n} \quad \forall |z| > R.$$

Donc $1/P$ est bornée si $|z| > R$, et comme P est continue et n'a pas de racines, on a aussi que $1/P$ est bornée sur le compact $|z| \leq R$, elle est ainsi bornée dans tout le plan complexe, comme souhaité. ■

Théorème 9.20 (Principe du prolongement analytique) Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes qui coïncident sur une suite de points distincts $\{z_\nu\}$ et dont la limite $z_0 \in \Omega$ ($z_\nu \neq z_0$ pour tout ν), alors

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in \Omega.$$

Remarque Le résultat est aussi partiellement vrai pour les fonctions $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. En effet si les deux fonctions coïncident sur un ouvert contenu dans Ω alors elles sont égales partout (cf. John [16] page 65). Par contre le résultat du théorème est plus fort et il est faux dès que $n \geq 2$. En effet il suffit de considérer la fonction

$$f(x) = x_1$$

qui est évidemment analytique (et même harmonique) dans \mathbb{R}^n et qui coïncide avec $g \equiv 0$ sur $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Démonstration Sans perte de généralité, on peut supposer que $g \equiv 0$, en remplaçant f par $f - g$.

Etape 1. On commence par montrer que $f \equiv 0$ sur n'importe quel disque $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ (la fonction f étant continue, on a $f(z_0) = 0$). On sait qu'on peut alors écrire (cf. Théorème 9.16)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_r(z_0).$$

Si f n'est pas identiquement nulle (hypothèse absurde), alors on peut trouver $N \geq 1$ (car $a_0 = f(z_0) = 0$) tel que $a_n = 0$ pour tout $n < N$ et $a_N \neq 0$. On écrit ensuite

$$f(z) = a_N (z - z_0)^N [1 + \epsilon(z, z_0)] \quad \text{avec} \quad \epsilon(z, z_0) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{a_N} (z - z_0)^{n-N}$$

et donc $\epsilon(z, z_0) \rightarrow 0$ si $z \rightarrow z_0$.

Choisissons donc z_ν (par hypothèse $z_\nu \rightarrow z_0$ et $z_\nu \neq z_0$) de telle façon que

$$1 + \epsilon(z_\nu, z_0) \neq 0.$$

On a ainsi pour ce z_ν que

$$a_N (z_\nu - z_0)^N [1 + \epsilon(z_\nu, z_0)] \neq 0$$

alors que $f(z_\nu) = 0$, ce qui est une contradiction.

Etape 2. On montre maintenant le théorème. On définit

$$A = \text{int} \{z \in \Omega : f(z) = 0\}.$$

Noter que :

- A est ouvert par définition,
- A est aussi fermé dans Ω ; en effet si

$$w_\nu \rightarrow w, \quad w_\nu \in A \text{ et } w \in \Omega$$

(car on veut montrer que A est fermé dans Ω), alors $f(w) = 0$ par continuité et par la première étape il existe un voisinage de w tel que $f(z) = 0$ et donc $w \in A$, c'est à dire que A est fermé dans Ω .

On pose ensuite

$$B = \Omega \setminus A.$$

On a bien que A et B sont ouverts dans Ω ,

$$\Omega = A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Comme Ω est connexe, on déduit qu'un des deux ensembles est vide. Comme $z_0 \in A$, on a le théorème. ■

Théorème 9.21 (Principe du maximum) Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et borné, $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et holomorphe dans Ω , alors

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} \{|f(z)|\} = \max_{z \in \partial\Omega} \{|f(z)|\}.$$

En fait, si $|f|$ atteint son maximum dans Ω , alors f est constante.

Remarque Il y a d'autres versions du principe du maximum, cf. Exercice 9.17.

Démonstration On va commencer par supposer que la fonction f n'est pas constante, sinon le théorème est trivial. Comme la fonction $z \mapsto |f(z)|$ est continue sur le compact $\overline{\Omega}$, elle atteint son maximum en un $a \in \overline{\Omega}$. Montrons qu'un tel a ne peut pas être dans Ω , et ainsi on aura démontré le théorème.

Supposons par l'absurde que $a \in \Omega$. On a ainsi

$$|f(z)| \leq |f(a)| \quad \forall z \in \overline{\Omega}.$$

On peut supposer que $f(a) \neq 0$, car sinon $|f(z)| = 0$ pour tout $z \in \overline{\Omega}$ et ceci contredit le fait que f n'est pas constante.

Comme Ω est ouvert, on peut alors trouver $r > 0$, suffisamment petit pour que $\overline{B_r(a)} \subset \Omega$ et donc

$$|f(z)| \leq |f(a)| \quad \forall z \text{ tel que } |z - a| \leq r.$$

Quitte à remplacer la fonction f par $z \mapsto f(z)/f(a)$, on peut supposer que

$$f(a) = 1 \quad \text{et} \quad |f(z)| \leq 1 \text{ pour tout } |z - a| \leq r.$$

On a donc par la formule de la moyenne que

$$1 = f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(a + r e^{it}) dt$$

(car $f(a)$ est réel). On a ainsi, comme

$$\operatorname{Re} f(a + r e^{it}) \leq |\operatorname{Re} f(a + r e^{it})| \leq |f(a + r e^{it})| \leq 1,$$

que

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\operatorname{Re} f(a + r e^{it}) - 1] dt \leq 0.$$

Or ceci n'est possible que si

$$\operatorname{Re} f(a + r e^{it}) = |\operatorname{Re} f(a + r e^{it})| = |f(a + r e^{it})| = 1$$

et donc

$$f(a + r e^{it}) \equiv 1 \quad \text{pour tout } |z - a| = r.$$

Par le principe du prolongement analytique (cf. Théorème 9.20), on déduit que f est constante, ce qui est la contradiction souhaitée. ■

Voici une autre formulation du principe du maximum.

Corollaire 9.22 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et non constante. Alors $|f|$ ne peut pas atteindre son maximum dans Ω .

Démonstration Supposons, par l'absurde, qu'il existe $a \in \Omega$ tel que

$$|f(z)| \leq |f(a)| \quad \forall z \in \Omega.$$

Soit $r > 0$ tel que $\overline{B_r(a)} \subset \Omega$. On peut alors appliquer le Théorème 9.21 à $B_r(a)$ et à f pour déduire que f est constante dans $B_r(a)$. Le principe du prolongement analytique (cf. Théorème 9.20) nous donne immédiatement que f est constante dans Ω ; ce qui est la contradiction souhaitée. ■

Corollaire 9.23 (Principe du minimum) Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et borné, $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et holomorphe dans Ω . Alors une des deux possibilités suivantes a lieu.

- (i) Il existe un point $a \in \Omega$ tel que $f(a) = 0$.
- (ii) Le minimum de $|f|$ est atteint sur le bord de Ω , i.e.

$$\min_{z \in \overline{\Omega}} \{|f(z)|\} = \min_{z \in \partial\Omega} \{|f(z)|\}.$$

Démonstration Supposons que $f(z) \neq 0$, pour tout $z \in \Omega$, sinon le corollaire est établi. De même on peut supposer que f n'est pas constante, sinon le résultat est trivial. Alors deux possibilités peuvent se produire.

1) Il existe un $b \in \partial\Omega$ tel que $f(b) = 0$ et alors le corollaire est démontré, car le minimum vaut alors 0 et est donc atteint sur le bord (en b).

2) $f(z) \neq 0$, pour tout $z \in \overline{\Omega}$. On pose alors $g = 1/f$, qui satisfait toutes les hypothèses du principe du maximum. Comme f n'est pas constante, g n'est pas constante. Alors par le principe du maximum $|g|$ atteint son maximum sur le bord et on a ainsi que $|f|$ atteint son minimum sur le bord, comme souhaité.

■

Théorème 9.24 (Théorème de Morera) Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Si

$$\int_{\partial T} f(z) dz = 0$$

pour tout triangle $\overline{T} \subset \Omega$, alors f est holomorphe dans Ω .

Démonstration Soit $\xi \in \Omega$ et $r > 0$ suffisamment petit pour que $\overline{B_r(\xi)} \subset \Omega$ et soit T un triangle tel que

$$T \subset \overline{B_r(\xi)} \subset \Omega.$$

On procède alors comme dans la démonstration du Théorème 9.6 (Théorème sur les primitives, qui est un corollaire du Lemme de Goursat). On pose

$$F(z) = \int_{[\xi, z]} f(w) dw \quad z \in B_r(\xi)$$

et on choisit $h \in \mathbb{C}$, suffisamment petit pour que $z + h \in B_r(\xi)$. On considère ensuite le triangle T dont le bord est

$$\partial T = [\xi, z] \cup [\xi, z + h] \cup [z, z + h].$$

(Les cas où $\xi = z$ ou $\{\xi, z, z + h\}$ sont alignés sont triviaux). Par hypothèse on a

$$\int_{\partial T} f(w) dw = 0$$

et donc

$$F(z + h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(w) dw = h \int_0^1 f(z + th) dt,$$

ce qui implique que

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) = \int_0^1 [f(z + th) - f(z)] dt.$$

Par la continuité de f , on trouve que

$$F'(z) = f(z)$$

et donc F est holomorphe et par le Corollaire 9.9, $F' = f$ est holomorphe, comme annoncé. ■

Théorème 9.25 (Théorème de Weierstrass) Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f_\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes, telles que si $\nu \rightarrow \infty$ alors

$$f_\nu \rightarrow f \quad \text{uniformément sur tout compact } K \subset \Omega.$$

Alors f est holomorphe dans Ω . De plus, pour tout entier $n \geq 1$,

$$f_\nu^{(n)} \rightarrow f^{(n)} \quad \text{uniformément sur tout compact } K \subset \Omega.$$

Démonstration *Etape 1.* Montrons tout d'abord que f est holomorphe dans Ω . Soit $\xi \in \Omega$ et $r > 0$ suffisamment petit pour que $\overline{B_r(\xi)} \subset \Omega$ et soit T un triangle tel que

$$T \subset \overline{B_r(\xi)} \subset \Omega.$$

Par le Lemme de Goursat on trouve que

$$\int_{\partial T} f_\nu(z) dz = 0.$$

Par hypothèse f est continue dans $\overline{B_r(\xi)}$, car elle est limite uniforme de fonctions continues sur le compact $\overline{B_r(\xi)}$, et on déduit donc que

$$0 = \int_{\partial T} f_\nu(z) dz \rightarrow \int_{\partial T} f(z) dz = 0.$$

Par le Théorème de Morera, on trouve que f est holomorphe dans $B_r(\xi)$ et ceci pour tout $\xi \in \Omega$ et donc f est holomorphe dans Ω .

Etape 2. On doit montrer que pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $\nu_0 = \nu_0(\epsilon, n, K)$ (indépendant de z) tel que

$$\left| f^{(n)}(z) - f_\nu^{(n)}(z) \right| \leq \epsilon \quad \text{pour tout } z \in K \text{ et } \nu \geq \nu_0.$$

Soit $\delta > 0$ on définit

$$K_\delta = \{z \in \mathbb{C} : \text{dist}(z; K) \leq \delta\}.$$

K étant compact et $K \subset \Omega$, on peut trouver δ suffisamment petit pour que (cf. Figure 9.5)

$$K \subset K_\delta \subset \Omega.$$

Noter que K_δ est compact. On applique alors la formule intégrale de Cauchy à

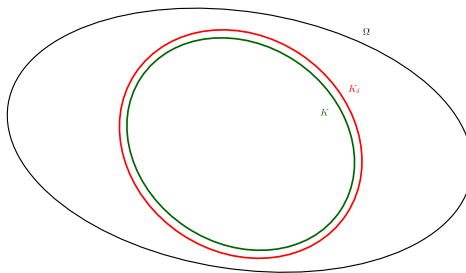


FIG. 9.5 –

n'importe quel $z \in K$ et on trouve, comme $\overline{B_\delta(z)} \subset K_\delta \subset \Omega$,

$$f^{(n)}(z) - f_\nu^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_\delta(z)} \left[\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} - \frac{f_\nu(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \right] d\xi.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left| f^{(n)}(z) - f_\nu^{(n)}(z) \right| &\leq \frac{n!}{\delta^n} \max[|f(\xi) - f_\nu(\xi)| : \xi \in \partial B_\delta(z)] \\ &\leq \frac{n!}{\delta^n} \max[|f(\xi) - f_\nu(\xi)| : \xi \in K_\delta]. \end{aligned}$$

Le résultat suit du fait que

$$f_\nu \rightarrow f \quad \text{uniformément sur } K_\delta.$$

La démonstration est ainsi complète. ■

9.6 Exercices

De nombreux autres exercices concernant ce chapitre, notamment les Exercices 1 à 9, se trouvent au Chapitre 10 de [9].

Exercice 9.1 (Conjugué harmonique) Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert et simplement connexe. Soit $u \in C^2(\Omega)$ (où Ω est vu dans \mathbb{R}^2) tel que $\Delta u = 0$ dans Ω .

(i) Montrer qu'il existe $v \in C^1(\Omega)$ telle que $u + iv$ soit holomorphe sur Ω . En déduire qu'en fait $u, v \in C^\infty(\Omega)$.

(ii) Que peut-on dire sur l'unicité d'un tel v ?

(iii) Tester les deux points précédents avec $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et

$$u(x, y) = \log \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

Exercice 9.2 Si $g(u, v)$ est harmonique dans \mathbb{R}^2 (i.e. $\Delta g = 0$) et $f = u + iv$ est holomorphe dans \mathbb{C} , vérifier alors que la fonction

$$h(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$$

est harmonique dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 9.3 Montrer le Corollaire 9.4. On pourra pour cela utiliser la Proposition 9.3.

Exercice 9.4 Soit Ω un ouvert simplement connexe, $z_0 \in \Omega$ et f une fonction holomorphe dans Ω telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Soit γ_z une courbe simple et régulière par morceaux telle que $\gamma_z \subset \Omega$ joignant z_0 à un point quelconque $z \in \Omega$. On définit alors

$$F(z) = \log[f(z_0)] + \int_{\gamma_z} \frac{f'(w)}{f(w)} dw$$

où la fonction \log est la détermination principale du logarithme définie à la Section 8.6, i.e.

$$\log z = \log |z| + i(\arg z) \quad \text{avec} \quad -\pi < \arg z \leq \pi.$$

(i) Montrer que la définition de F est indépendante du choix de γ_z , que F est holomorphe dans Ω et que, $\forall z \in \Omega$,

$$e^{F(z)} = f(z) \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}[F(z)] = \log |f(z)|.$$

(ii) Que donne la construction ci-dessus dans le cas où $f(z) = z$, $z_0 = 1$ et

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \leq 0\}.$$

Indication. Trouver une courbe γ_z entre 1 et z passant par $|z|$ et ne sortant jamais de Ω .

(iii) Que donne la construction ci-dessus dans le cas où $f(z) = z$, $z_0 = -1$ et

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \geq 0\}.$$

(iv) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, il existe une fonction holomorphe $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $g^n = f$.

(v) Trouver un contre-exemple au point (iv) si f s'annule ou si Ω n'est pas simplement connexe.

Exercice 9.5 Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et $w_0 \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe tel que

$$f(z) = e^{g(z)} + w_0.$$

Exercice 9.6 Soit f une fonction holomorphe non constante sur \mathbb{C} . Montrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans \mathbb{C} .

Indication. Procéder par l'absurde en utilisant le Théorème de Liouville.

Remarque. En fait, on peut montrer le résultat suivant (connu comme le Grand Théorème de Picard) : toute fonction holomorphe non constante sur \mathbb{C} atteint tout point de \mathbb{C} , sauf au plus un.

Exercice 9.7 (i) Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{C} non constante. Montrer, à l'aide du principe du prolongement analytique, que, pour tout $w \in \mathbb{C}$, $f^{-1}(w)$ est au plus dénombrable.

(ii) Montrer que le résultat est, en général, faux pour des applications

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

dont chaque composante est analytique.

Exercice 9.8 Soient $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ et

$$\gamma_{a,r} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}.$$

Discuter en fonction de n , de a et de r la valeur de l'intégrale

$$I(n, a, r) = \int_{\gamma_{a,r}} z^n dz.$$

Exercice 9.9 Soient $|a| < r < |b|$ et $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. Montrer que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{2\pi i}{a-b}.$$

Exercice 9.10 Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Indication. Utiliser le Théorème de Cauchy pour la fonction

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

et la frontière du domaine

$$D_{\epsilon,R} = \{z \in \mathbb{C} : \epsilon < |z| < R \text{ et } \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

On rappelle, par ailleurs, que

$$[\sin t \geq t/2 \text{ si } 0 \leq t \leq \pi/6] \quad \text{et} \quad [\sin t \geq 1/2 \text{ si } \pi/6 \leq t \leq \pi/2].$$

Exercice 9.11 (Intégrales de Fresnel) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Indication. Utiliser le Théorème de Cauchy pour la fonction

$$f(z) = e^{iz^2}$$

et la frontière du domaine

$$D_R = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Exercice 9.12 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $g : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $g = g(z, t)$, une fonction bornée, telle que

$$g : \Omega \times]0, 1[\rightarrow \mathbb{C} \quad \text{est continue}$$

et

$$z \mapsto g(z, t) \quad \text{est holomorphe dans } \Omega, \text{ pour tout } t \in [0, 1].$$

Montrer que la fonction

$$f(z) = \int_0^1 g(z, t) dt$$

est holomorphe dans Ω .

Indication. Se rappeler de la construction l'intégrale de Riemann (sommes de Darboux), et appliquer le Théorème de Weierstrass.

Exercice 9.13 Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx.$$

Suggestions. (i) On rappelle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

(ii) On pourra intégrer $f(z) = e^{-z^2}$ sur le bord du rectangle dont les sommets sont $\pm a$ et $\pm a + ib$, puis laisser $R \rightarrow \infty$.

Exercice 9.14 Soient f une fonction holomorphe dans \mathbb{C} et

$$\Gamma = f(C) \quad \text{où} \quad C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Montrer, à l'aide de la formule de la moyenne, que

$$\text{long}(\Gamma) \geq 2\pi |f'(0)|.$$

Exercice 9.15 Soient $R > 0$,

$$\Gamma_R = \Gamma_R^1 \cup \Gamma_R^2 \cup (-\Gamma_R^3)$$

où

$$\Gamma_R^1 = \{z = r \in]0, R[), \quad \Gamma_R^2 = \{z = R e^{i\theta} : \theta \in]0, \pi/8[\}$$

et

$$\Gamma_R^3 = \left\{ z = r e^{i\pi/8} : r \in]0, R[\right\}.$$

(i) Calculer

$$\int_{\Gamma_R} e^{-\sqrt{2}z^2} dz.$$

(ii) Calculer

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^1} e^{-\sqrt{2}z^2} dz.$$

On rappelle que

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2}x^2} dx = 2^{-5/4} \sqrt{\pi}.$$

(iii) Montrer que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^2} e^{-\sqrt{2}z^2} dz = 0.$$

(iv) Montrer que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^3} e^{-\sqrt{2}z^2} dz = e^{i\frac{\pi}{8}} \int_0^{+\infty} e^{-(1+i)r^2} dr.$$

(v) Dédurre des quatre questions précédentes la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+i)r^2} dr$$

et calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(x^2) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(x^2) dx.$$

Exercice 9.16 Soient $n \in \mathbb{N}$, $M > 0$ et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que

$$|f(z)| \leq M(1 + |z|^n), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Montrer qu'alors f est un polynôme de degré au plus n .

Suggestion. Procéder exactement comme dans le Théorème de Liouville (qui correspond au cas $n = 0$) en utilisant la formule intégrale de Cauchy.

Exercice 9.17 (Principe du maximum pour la partie réelle) Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe borné et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et telle que $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue. Montrer que si $\operatorname{Re} f$ atteint son maximum en un point $a \in \Omega$, alors f est constante. En déduire que

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} \{\operatorname{Re} f(z)\} = \max_{z \in \partial \Omega} \{\operatorname{Re} f(z)\}.$$

Suggestion. On montrera tout d'abord (à l'aide de la formule de la moyenne) que $\operatorname{Re} f$ est constante dans un voisinage de a , puis on déduira que f est constante dans ce voisinage et on obtiendra finalement le résultat.

Remarque. La même démarche permet d'établir le principe du maximum pour la partie imaginaire $\operatorname{Im} f$.

Exercice 9.18 (Formule de Jensen) Soient $0 < r < R$, $B_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ et $f : B_R \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe.

(i) Montrer que si $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \overline{B_r}$, alors

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

(Par hypothèse et grâce à l'Exercice 9.4, on peut trouver $\epsilon > 0$ suffisamment petit et $F : B_{r+\epsilon} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe tels que $\operatorname{Re} F = \log |f|$ dans $B_{r+\epsilon}$).

(ii) Soient a tel que $0 < |a| < r$ et $g(z) = z - a$. Montrer que

$$\log |g(0)| = \log \left(\frac{|a|}{r} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta.$$

Suggestion. Appliquer (après avoir vérifié les hypothèses) tout d'abord la question (i) à

$$h(z) = \frac{\overline{a}z - r^2}{r}.$$

(iii) Soient a_1, \dots, a_n (pas nécessairement différents) tels que

$$0 < |a_1|, \dots, |a_n| < r \quad \text{et} \quad g(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j).$$

Montrer, à l'aide de la question (ii), que

$$\log |g(0)| = \sum_{j=1}^n \log \left(\frac{|a_j|}{r} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta.$$

(iv) Montrer, en utilisant les questions (i) et (iii), que si a_1, \dots, a_n (pas nécessairement différents) tels que $0 < |a_1|, \dots, |a_n| < r$ sont les seuls zéros de f dans $\overline{B_r}$, alors

$$\log |f(0)| = \sum_{j=1}^n \log \left(\frac{|a_j|}{r} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Exercice 9.19 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et \mathcal{F} une famille de fonctions holomorphes dans Ω vérifiant la propriété suivante : pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $c = c(K)$ telle que

$$|f(z)| \leq c, \quad \forall z \in K \text{ et } \forall f \in \mathcal{F}.$$

(i) Soit $r > 0$ suffisamment petit pour que

$$K_{2r} = \{\xi \in \mathbb{C} : \text{dist}(\xi, K) \leq 2r\} \subset \Omega.$$

Montrer que

$$\left. \begin{array}{l} |z - w| \leq r \\ z, w \in K \end{array} \right\} \Rightarrow |f(z) - f(w)| \leq \max \{|f(\xi)| : |\xi - w| = 2r\} \cdot \frac{|z - w|}{r}.$$

Suggestion. On pourra utiliser la formule intégrale de Cauchy intégrée sur

$$\gamma = \partial B_{2r}(w) = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - w| = 2r\}.$$

(ii) Montrer alors que \mathcal{F} est une famille de fonctions équi continues, dans le sens où, pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\epsilon, K) > 0$ tel que

$$\left. \begin{array}{l} |z - w| \leq \delta \\ z, w \in K \end{array} \right\} \Rightarrow |f(z) - f(w)| \leq \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Exercice 9.20 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe borné et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions telles que

- $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et $f_n : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue pour tout n ,
- $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $\partial\Omega$ quand $n \rightarrow \infty$.

Montrer, grâce au principe du maximum, qu'alors

- il existe $\tilde{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et $\tilde{f} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue avec $\tilde{f} = f$ sur $\partial\Omega$,
- $f_n \rightarrow \tilde{f}$ uniformément sur $\overline{\Omega}$ quand $n \rightarrow \infty$.

9.7 Corrigés

Exercice 9.1 (i) Par le Théorème 8.4, il suffit de montrer qu'il existe $v \in C^1(\Omega)$ satisfaisant les équations de Cauchy-Riemann

$$v_y = u_x \quad \text{et} \quad v_x = -u_y \quad \text{sur } \Omega$$

pour conclure que $f = u + i v$ est holomorphe. On remarque que ces équations sont équivalentes au fait que le champs vectoriel $(-u_x, u_y)$ dérive d'un potentiel. Comme Ω est simplement connexe et $u \in C^2(\Omega)$, une condition suffisante est donnée par

$$\operatorname{rot}(-u_x, u_y) = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Or cette condition est vérifiée puisque u est harmonique. On a donc trouvé un v tel que $f = u + i v$ est holomorphe. Par le Théorème 9.10, il s'ensuit que $u, v \in C^\infty(\Omega)$.

(ii) Utilisant les équations de Cauchy-Riemann v est unique à une constante près.

(iii) Soit $u = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$. Il est facile de voir que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ et que $\Delta u = 0$. Par l'absurde supposons qu'il existe v tel que $u + i v$ est holomorphe. Alors par unicité de v à une constante près et puisque la fonction

$$\log z = \log(|z|) + i \arg z$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{y = 0, x \leq 0\}$, on aurait que $v = \arg z + c$. Ceci est absurde car la fonction \arg n'est pas continue sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. ♠

Exercice 9.2 Comme g est harmonique on a

$$\Delta g = g_{uu} + g_{vv} = 0.$$

Par ailleurs f étant holomorphe on a

$$u_x = v_y \quad \text{et} \quad u_y = -v_x.$$

En calculant les dérivées successives de h (cf. Théorème 9.10) on trouve

$$h_x = g_u u_x + g_v v_x \quad \text{et} \quad h_y = g_u u_y + g_v v_y$$

$$h_{xx} = g_{uu} u_x^2 + 2 g_{uv} u_x v_x + g_{vv} v_x^2 + g_u u_{xx} + g_v v_{xx}$$

$$h_{yy} = g_{uu} u_y^2 + 2 g_{uv} u_y v_y + g_{vv} v_y^2 + g_u u_{yy} + g_v v_{yy}.$$

Par conséquent en se rappelant que (cf. Théorème 9.10) les équations de Cauchy-Riemann donnent

$$\Delta u = \Delta v = 0, \quad u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2, \quad u_x v_x + u_y v_y = 0,$$

on déduit

$$\begin{aligned} \Delta h &= h_{xx} + h_{yy} \\ &= g_{uu} (u_x^2 + u_y^2) + 2 g_{uv} (u_x v_x + u_y v_y) \\ &\quad + g_{vv} (v_x^2 + v_y^2) + g_u \Delta u + g_v \Delta v \end{aligned}$$

et donc

$$\Delta h = \Delta g (u_x^2 + u_y^2) = 0. \quad \spadesuit$$

Exercice 9.3 Soient $a, b \in \Omega$. Comme Ω est connexe et ouvert, il est connexe par arc. Il existe donc une courbe régulière γ joignant a à b complètement contenue dans Ω . Comme f est une primitive de f' , on a par la Proposition 9.3 que

$$f(b) - f(a) = \int_{\gamma} f' = \int_{\gamma} 0 = 0.$$

Il s'ensuit que $f(b) = f(a)$ pour tout $a, b \in \Omega$ et donc f est constante. ♠

Exercice 9.4 (i) Le Théorème de Cauchy (cf. Théorème 9.12) donne immédiatement l'indépendance par rapport à la courbe γ_z . Par le Théorème 9.11 (et sa démonstration) on sait que F est holomorphe dans Ω et que

$$F'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

On observe alors que

$$\frac{d}{dz} [f(z) e^{-F(z)}] = 0$$

et on infère du Corollaire 9.4, que

$$f(z) e^{-F(z)} = f(z_0) e^{-F(z_0)} = f(z_0) e^{-\log f(z_0)} = 1$$

d'où le résultat $e^{F(z)} = f(z)$. Par ailleurs comme $e^{F(z)} = f(z)$, on a que $e^{\operatorname{Re} F(z)} = |f(z)|$ et par conséquent, pour tout $z \in \Omega$,

$$\operatorname{Re} [F(z)] = \log |f(z)|.$$

(ii) Quand $f(z) = z$, $z_0 = 1$ et

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \leq 0\}$$

on trouve ($\gamma_z \subset \Omega$)

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{dw}{w}.$$

Soient les courbes

$$\{\gamma_1(t) = 1 + t(|z| - 1), t \in [0, 1]\} \quad \text{et} \quad \{\gamma_2(t) = |z| e^{it \arg z}, t \in [0, 1]\}.$$

On remarque que

$$\gamma_1(0) = 1, \quad \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = |z| \quad \text{et} \quad \gamma_2(1) = z$$

et donc la courbe $\gamma_z = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \subset \Omega$ est une courbe simple et régulière par morceaux joignant 1 à z et passant par $|z|$. On déduit donc que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_z} \frac{dw}{w} &= \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w} + \int_{\gamma_2} \frac{dw}{w} = \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)} dt + \int_0^1 \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(|z| - 1) dt}{1 + t(|z| - 1)} + \int_0^1 \frac{i|z| \arg z e^{it \arg z}}{|z| e^{it \arg z}} dt = \log |z| + i \arg z = \log z \end{aligned}$$

et par conséquent $F(z) = \log z$, à savoir la détermination principale du logarithme donnée au cours.

(iii) On procède comme ci-dessus et on obtient ($\gamma_z \subset \Omega$)

$$\tilde{F}(z) = \log(-1) + \int_{\gamma_z} \frac{dw}{w} = i\pi + \int_{\gamma_z} \frac{dw}{w}.$$

On écrit maintenant

$$z = |z| e^{i \widetilde{\arg} z} \quad \text{où} \quad 0 \leq \widetilde{\arg} z < 2\pi$$

de manière à rendre la fonction $\widetilde{\arg}$ continue dans Ω . En particulier, la relation entre $\widetilde{\arg}$ et \arg (celui utilisé dans la définition de la détermination principale du logarithme) est

$$\widetilde{\arg} z = \begin{cases} \arg z & \text{si } 0 \leq \arg z \leq \pi \\ \arg z + 2\pi & \text{si } -\pi < \arg z < 0. \end{cases}$$

Soient alors les courbes

$$\begin{aligned} \{\gamma_1(t) &= -1 + t(1 - |z|), \quad t \in [0, 1]\} \\ \{\gamma_2(t) &= |z| e^{i[\pi + t(\widetilde{\arg} z - \pi)]}, \quad t \in [0, 1]\}. \end{aligned}$$

On remarque que

$$\gamma_1(0) = -1, \quad \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = -|z| \quad \text{et} \quad \gamma_2(1) = z$$

et donc la courbe $\gamma_z = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \subset \Omega$ est une courbe simple et régulière par morceaux joignant -1 à z et passant par $-|z|$. On déduit donc que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_z} \frac{dw}{w} &= \int_{\gamma_1} \frac{dw}{w} + \int_{\gamma_2} \frac{dw}{w} = \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)} dt + \int_0^1 \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(|z| - 1) dt}{1 + t(|z| - 1)} + \int_0^1 \frac{i|z|(\widetilde{\arg} z - \pi) e^{i[\pi + t(\widetilde{\arg} z - \pi)]}}{|z| e^{i[\pi + t(\widetilde{\arg} z - \pi)]}} dt \end{aligned}$$

et ainsi

$$\int_{\gamma_z} \frac{dw}{w} = [\log(1 + t(|z| - 1))]_0^1 + i(\widetilde{\arg} z - \pi) = \log |z| + i(\widetilde{\arg} z - \pi).$$

On a finalement

$$\tilde{F}(z) = \log |z| + i \widetilde{\arg} z.$$

Attention : ceci n'est pas la détermination principale du logarithme.

(iv) La fonction $g(z) = e^{F(z)/n}$ est clairement holomorphe et vérifie

$$g^n(z) = \left(e^{F(z)/n}\right)^n = \left(e^{F(z)/n}\right)^n = e^{F(z)} = f(z)$$

où nous avons utilisé l'Exercice 8.5 et la Proposition 8.7.

(v) La fonction $f(z) = z$ n'a pas de racine carrée holomorphe dans \mathbb{C} , ni même dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En effet, les seules fonctions f vérifiant $f^2 = z$ sont

$$\pm z^{1/2} = \pm e^{(\log z)/2}$$

qui ne sont même pas continues sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Rappel. La fonction $f(z) = z^\gamma$ (avec $\gamma \in \mathbb{C}$) est toujours holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{\operatorname{Im} z = 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \leq 0\}$, mais f est holomorphe dans \mathbb{C} si et seulement si $\gamma \in \mathbb{N}$. ♠

Exercice 9.5 Soit $h(z) = f(z) - w_0$. Appliquons l'Exercice 9.4 à h pour trouver une fonction $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que

$$f(z) - w_0 = h(z) = e^{g(z)}.$$

Le résultat suit immédiatement. ♠

Exercice 9.6 Par l'absurde supposons que $f(\mathbb{C})$ n'est pas dense dans \mathbb{C} . Il existe alors $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ tels que

$$f(\mathbb{C}) \cap B_r(z_0) = \emptyset$$

c'est à dire

$$|f(z) - z_0| > r, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Il s'ensuit directement que la fonction

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - z_0}, \quad z \in \mathbb{C}$$

est bornée par $1/r$ et est donc constante, par le Théorème de Liouville. Donc f est constante ce qui contredit les hypothèses. ♠

Exercice 9.7 (i) Par l'absurde, supposons qu'il existe $w_0 \in \mathbb{C}$ tel que $f^{-1}(w_0)$ soit infini non dénombrable et dénotons, pour $n \in \mathbb{N}$, le disque fermé centré en 0 et de rayon n par D_n . Il s'ensuit qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que D_n contienne une infinité (non dénombrable) d'éléments de l'ensemble $f^{-1}(w_0)$ (sinon $f^{-1}(w_0)$ serait au plus dénombrable). Comme D_n est compact, il existe alors un point d'accumulation des zéros de $f(\cdot) - w_0$ et donc, par le principe du prolongement analytique, f est constante, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

(ii) Soit $f(x, y) = (x, 0)$; c'est clairement une fonction analytique sur \mathbb{R}^2 , non constante et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x, 0)$ est indénombrable. ♠

Exercice 9.8 D'abord, si $n \geq 0$, alors z^n est holomorphe dans \mathbb{C} et donc $I = 0$ pour tout a et r , par le Théorème de Cauchy. Si $n = -k < 0$, alors z^n admet une singularité en 0. Il y a trois cas à traiter.

(i) Si $r < |a|$, alors $0 \notin \gamma_{a,r} \cup \operatorname{int}(\gamma_{a,r})$ et donc le Théorème de Cauchy nous dit que $I = 0$.

(ii) Si $r = |a|$, alors $0 \in \gamma_{a,r}$ et I est mal définie.

(iii) Si $r > |a|$, alors $0 \in \text{int}(\gamma_{a,r})$ et la formule intégrale de Cauchy nous donne, en posant $f \equiv 1$,

$$\frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma_{a,r}} \frac{dz}{z^k} = f^{(k-1)}(0).$$

Donc $I = 2\pi i$ si $n = -1$, et $I = 0$ si $n < -1$. En résumé, nous avons

$$I(n, a, r) = \begin{cases} \text{pas défini} & \text{si } n < 0 \text{ et } r = |a| \\ 2\pi i & \text{si } n = -1 \text{ et } r > |a| \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad \spadesuit$$

Exercice 9.9 Puisque $b \notin \gamma \cup \text{int } \gamma$ et $a \in \text{int } \gamma$, nous appliquons directement la formule intégrale de Cauchy à la fonction $f(z) = 1/(z-b)$, ce qui nous donne

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) = \frac{1}{a-b}$$

d'où le résultat. \spadesuit

Exercice 9.10 Posons $f(z) = e^{iz}/z$. Comme f n'a pas de singularité dans $\overline{D_{\epsilon,R}}$ (cf. Figure 9.6), on aura, par le Théorème de Cauchy,

$$0 = \int_{\partial D_{\epsilon,R}} f = \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_{\epsilon}} f(z) dz + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_R} f(z) dz \quad (9.2)$$

où $C_{\epsilon} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \epsilon, \text{ Im } z \geq 0\}$ et $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \text{ Im } z \geq 0\}$.

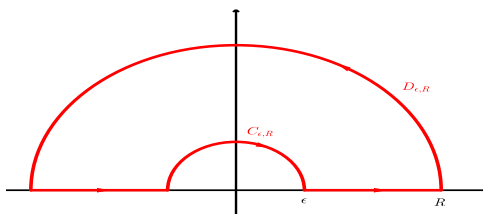


FIG. 9.6 –

(i) Groupons d'abord la première et la troisième intégrales de (9.2)

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx.$$

En passant à la limite, nous avons donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right\} = 2i \lim_{\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx \right\}.$$

(ii) Evaluons ensuite la deuxième intégrale de (9.2). Remarquons que $\exp(i\epsilon e^{it})$ converge uniformément vers 1 lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. On en déduit que, pour tout $t \in [0, \pi]$,

$$\begin{aligned} |\exp(i\epsilon e^{it}) - 1| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\epsilon e^{it})^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(i\epsilon e^{it})^n}{n!} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \leq |e^\epsilon - 1| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On peut donc permuter limite et intégrale, ce qui donne

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C_\epsilon} f(z) dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -i \int_0^\pi \exp(i\epsilon e^{it}) dt = -i\pi.$$

(iv) Estimons ensuite la dernière intégrale de (9.2)

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi |e^{iR e^{it}}| dt = \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt.$$

Comme $e^{-R \sin t}$ ne converge pas uniformément vers 0 (ni ponctuellement en $t = 0$) quand $R \rightarrow \infty$, on ne peut pas permuter limite et intégrale comme précédemment. En utilisant le fait que

$$[\sin t \geq t/2 \text{ si } 0 \leq t \leq \pi/6] \quad \text{et} \quad [\sin t \geq 1/2 \text{ si } \pi/6 \leq t \leq \pi/2]$$

on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t} dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{Rt}{2}} dt + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{R}{2}} dt = \frac{2}{R} \left(1 - e^{-\frac{\pi R}{12}}\right) + \frac{\pi}{3} e^{-\frac{R}{2}}$$

et donc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

(v) Finalement regroupons tous les calculs précédents pour obtenir

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{\partial D_{\epsilon, R}} f = 2i \lim_{\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \left\{ \int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x} dx \right\} - i\pi$$

et donc

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \left\{ \int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x} dx \right\} = \frac{\pi}{2}$$

c'est à dire

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. Il faut noter ici qu'il n'est pas clair, a priori, que l'intégrale est bien définie car

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx = \infty.$$

L'Exercice montre toutefois que c'est le cas et donne même la valeur de la limite. ♠

Exercice 9.11 Posons $f(z) = e^{iz^2}$. Comme f n'a pas de singularité dans D_R (cf. Figure 9.7), on aura, par le Théorème de Cauchy,

$$0 = \int_{\partial D_R} f = \int_0^R e^{ix^2} dx + iR \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2ix}} e^{ix} dx + e^{\frac{i\pi}{4}} \int_R^0 e^{-x^2} dx.$$

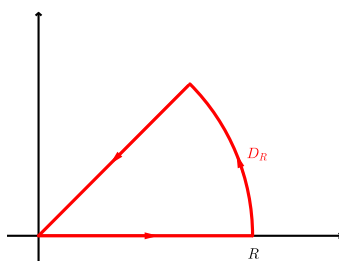


FIG. 9.7 –

- La première intégrale nous donne les quantités que nous devons évaluer, à savoir

$$\int_0^\infty e^{ix^2} = \int_0^\infty \cos(x^2) dx + i \int_0^\infty \sin(x^2) dx.$$

- Traitons la deuxième intégrale. Comme la fonction $x \rightarrow e^{iR^2 e^{2ix}}$ ne converge pas uniformément vers 0 (ni ponctuellement en $x = 0$) quand $R \rightarrow \infty$, nous ne pouvons pas permuter limite et intégrale. La bonne technique consiste à majorer le module de l'intégrale par une fonction indépendante de x , qui converge vers 0 quand $R \rightarrow \infty$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \left| R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2ix}} e^{ix} dx \right| &\leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} |e^{iR^2 e^{2ix}} e^{ix}| dx = R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin(2x)} dx \\ &= \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin(x)} dx. \end{aligned}$$

En utilisant, comme dans l'Exercice 9.10, le fait que

$$[\sin t \geq t/2 \text{ si } 0 \leq t \leq \pi/6] \quad \text{et} \quad [\sin t \geq 1/2 \text{ si } \pi/6 \leq t \leq \pi/2]$$

on trouve

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin t} dt &\leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{R^2 t}{2}} dt + \frac{R}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{R^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R^2 \pi}{12}}\right) + \frac{\pi R}{6} e^{-\frac{R^2}{2}} \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i R^2 e^{2i x}} e^{i x} dx \right] = 0.$$

- La dernière intégrale donne directement

$$e^{\frac{i\pi}{4}} \int_{\infty}^0 e^{-x^2} dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} (1+i)$$

- Combinant ce qui précède, nous avons

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\partial D_R} f \right] = \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx + i \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} (1+i)$$

autrement dit

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx + i \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} (1+i).$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on infère que

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \quad \spadesuit$$

Exercice 9.12 Soit $O \subset \Omega$ un ouvert borné, tel que $\overline{O} \subset \Omega$. Nous allons construire une suite $\{f_\nu\}$ de fonctions holomorphes qui converge uniformément vers f dans O . Notons

$$M = \sup_{z \in \Omega, t \in [0,1]} \{|g(z, t)|\} < \infty$$

puisque, par hypothèse, g est bornée. Pour tout $\nu \geq 1$ assez grand, on définit $0 < a_\nu < b_\nu < 1$ par

$$a_\nu = \frac{1}{4\nu M} \quad \text{et} \quad b_\nu = 1 - \frac{1}{4\nu M}.$$

Par hypothèse, g est continue sur $\Omega \times]0, 1[$. Par conséquent, g est uniformément continue sur le compact $\overline{O} \times [a_\nu, b_\nu]$ et donc il existe une partition de $[a_\nu, b_\nu]$, que l'on note

$$a_\nu = c_1^{(\nu)} < c_2^{(\nu)} < \dots < c_N^{(\nu)} = b_\nu, \quad N = N(\nu) \in \mathbb{N},$$

telle que

$$\sup_{z \in \overline{O}} \{|g(z, t_1) - g(z, t_2)|\} \leq \frac{1}{2\nu}, \quad \forall t_1, t_2 \in [c_i^{(\nu)}, c_{i+1}^{(\nu)}], \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

Définissons enfin

$$f_\nu(z) = \sum_{i=1}^{N-1} (c_{i+1}^{(\nu)} - c_i^{(\nu)}) g(z, c_i^{(\nu)}) = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{c_i^{(\nu)}}^{c_{i+1}^{(\nu)}} g(z, c_i^{(\nu)}) dt.$$

On a donc que f_ν est holomorphe dans Ω . Pour tout $z \in O$, on obtient

$$\begin{aligned} & |f(z) - f_\nu(z)| \\ &= \left| \int_0^{a_\nu} g(z, s) ds + \int_{b_\nu}^1 g(z, s) ds + \sum_{i=1}^{N-1} \int_{c_i^{(\nu)}}^{c_{i+1}^{(\nu)}} (g(z, s) - g(z, c_i^{(\nu)})) ds \right| \\ &\leq M a_\nu + M(1 - b_\nu) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{c_{i+1}^{(\nu)} - c_i^{(\nu)}}{2\nu} \leq \frac{1}{\nu} \end{aligned}$$

d'où

$$f_\nu \rightarrow f \quad \text{uniformément dans } O.$$

Par le Théorème de Weierstrass, f est holomorphe dans Ω . ♠

Exercice 9.13 On va prouver le résultat quand $b > 0$ (le cas $b < 0$ est identique car l'intégrale est indépendante du signe de b ; le cas $b = 0$ est standard). Soit $a > 0$ et soit le rectangle (cf. Figure 9.8)

$$\gamma_a = [-a, a] \cup [a, a + ib] \cup [a + ib, -a + ib] \cup [-a + ib, -a].$$

Par le Théorème de Cauchy appliqué à $f(z) = e^{-z^2}$ et γ_a on obtient

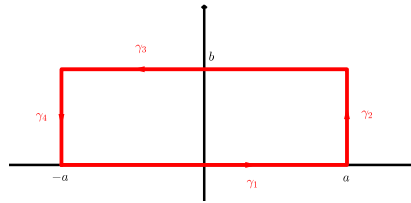


FIG. 9.8 –

$$0 = \int_{\gamma_a} f = \int_{-a}^a e^{-x^2} dx + \int_a^{a+ib} e^{-z^2} dz - \int_{-a}^a e^{-(x+ib)^2} dx - \int_{-a}^{-a+ib} e^{-z^2} dz. \quad (9.3)$$

(i) La première intégrale donne

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

alors que la troisième intégrale nous conduit à

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-a}^a e^{-(x+ib)^2} dx \right\} &= e^{b^2} \lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-a}^a e^{-x^2} (\cos(2bx) + \sin(2bx)) dx \right\} \\ &= e^{b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (\cos(2bx) + \sin(2bx)) dx. \end{aligned}$$

(ii) Evaluons ensuite la deuxième et la quatrième intégrales de (9.3). On obtient directement que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{a+ib} e^{-z^2} dz \right| &= \left| \int_0^b e^{-(a+is)^2} i ds \right| = \left| \int_0^b e^{-a^2+s^2} e^{-2ias} ds \right| \\ &= e^{-a^2} \int_0^b e^{s^2} ds \rightarrow 0 \quad \text{quand } a \rightarrow \infty \end{aligned}$$

car b est fixé. L'autre intégrale donne de manière analogue que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-a}^{-a+ib} e^{-z^2} dz \right\} = 0.$$

(iii) En combinant (9.3) (i) et (ii), on déduit que

$$0 = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\int_{\gamma_a} f \right] = \sqrt{\pi} - e^{b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (\cos(2bx) + \sin(2bx)) dx$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}. \quad \spadesuit$$

Exercice 9.14 On a, par définition

$$\Gamma = \{ \gamma(\theta) = f(e^{i\theta}) \text{ avec } \theta \in [0, 2\pi] \}.$$

On trouve donc que

$$\begin{aligned} \text{long}(\Gamma) &= \int_0^{2\pi} |\gamma'(\theta)| d\theta = \int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta}) i e^{i\theta}| d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta})| d\theta \geq \left| \int_0^{2\pi} f'(e^{i\theta}) d\theta \right|. \end{aligned}$$

Par la formule de la moyenne, appliquée à f' , on sait que

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(e^{i\theta}) d\theta.$$

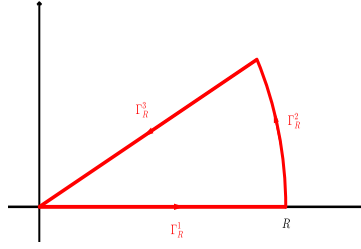


FIG. 9.9 –

La combinaison des deux résultats donne l'inégalité souhaitée. ♠

Exercice 9.15 (i) Par le Théorème de Cauchy (cf. Figure 9.9) on a

$$\int_{\Gamma_R} e^{-\sqrt{2}z^2} dz = 0.$$

(ii) Par ailleurs

$$\int_{\Gamma_R^1} e^{-\sqrt{2}z^2} dz = \int_0^R e^{-\sqrt{2}r^2} dr$$

et donc

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\Gamma_R^1} e^{-\sqrt{2}z^2} dz \right] = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{2}r^2} dr = 2^{-5/4} \sqrt{\pi}.$$

(iii) On trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R^2} e^{-\sqrt{2}z^2} dz &= \int_0^{\pi/8} e^{-\sqrt{2}(R e^{i\theta})^2} (i R e^{i\theta}) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/8} e^{-\sqrt{2}R^2 [\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)]} (i R e^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R^2} e^{-\sqrt{2}z^2} dz \right| &\leq \left| R \int_0^{\pi/8} e^{-\sqrt{2}R^2 \cos(2\theta)} d\theta \right| \leq \frac{R\pi}{8} \sup_{\theta \in [0, \pi/8]} \left\{ e^{-\sqrt{2}R^2 \cos(2\theta)} \right\} \\ &\leq \frac{R\pi}{8} \left[e^{-\sqrt{2}R^2 \cos(\pi/4)} \right]. \end{aligned}$$

On a donc que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\Gamma_R^2} e^{-\sqrt{2}z^2} dz \right] = 0.$$

(iv) On obtient immédiatement que

$$\int_{\Gamma_R^3} e^{-\sqrt{2}z^2} dz = \int_0^R e^{-\sqrt{2}(r e^{i\pi/8})^2} (e^{i\pi/8}) dr = e^{i\pi/8} \int_0^R e^{-(1+i)r^2} dr$$

et ainsi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\Gamma_R^3} e^{-\sqrt{2}z^2} dz \right] = e^{i\frac{\pi}{8}} \int_0^{+\infty} e^{-(1+i)r^2} dr.$$

(v) On déduit donc que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\Gamma_R^1} e^{-\sqrt{2}z^2} dz \right] = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\Gamma_R^3} e^{-\sqrt{2}z^2} dz \right]$$

et ainsi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\Gamma_R^3} e^{-\sqrt{2}z^2} dz \right] = e^{i\frac{\pi}{8}} \int_0^{+\infty} e^{-(1+i)r^2} dr = 2^{-5/4} \sqrt{\pi}.$$

Par conséquent

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(x^2) dx - i \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} e^{-(1+i)x^2} dx = 2^{-5/4} \sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{8}}$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(x^2) dx &= 2^{-5/4} \sqrt{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(x^2) dx &= 2^{-5/4} \sqrt{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right). \quad \spadesuit \end{aligned}$$

Exercice 9.16 Par la formule intégrale de Cauchy on a que

$$f^{(n+1)}(z_0) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}} dz$$

où γ est le cercle centré en z_0 et de rayon R . Le résultat sera prouvé si nous montrons que

$$f^{(n+1)}(z_0) = 0, \quad \forall z_0.$$

De la formule on obtient immédiatement que

$$\left| f^{(n+1)}(z_0) \right| \leq \frac{(n+1)!}{2\pi} \frac{M(1+(|z_0|+R)^n)}{R^{n+2}} 2\pi R$$

car, sur γ , on a $|z-z_0|=R$ et donc $|z| \leq |z_0|+R$ et ainsi

$$|f(z)| \leq M(1+(|z_0|+R)^n).$$

Or le membre de droite tend vers 0 quand R tend vers l'infini. Le résultat est donc démontré. \spadesuit

Exercice 9.17 *Etape 1.* Comme $a \in \Omega$ on peut trouver $R > 0$ tel que $\overline{B_R(a)} \subset \Omega$ et

$$\operatorname{Re} f(z) \leq \operatorname{Re} f(a) \quad \forall z \text{ tel que } |z-a| \leq R.$$

Par la formule de la moyenne on a que, pour tout $0 < r \leq R$,

$$\operatorname{Re} f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(a + r e^{it}) dt$$

On trouve ainsi, comme $\operatorname{Re} f(a + r e^{it}) \leq \operatorname{Re} f(a)$, que

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\operatorname{Re} f(a + r e^{it}) - \operatorname{Re} f(a)] dt \leq 0.$$

Or ceci n'est possible que si

$$\operatorname{Re} f(a + r e^{it}) = \operatorname{Re} f(a)$$

et donc, comme ceci est vrai pour tout $0 < r \leq R$, on déduit que

$$\operatorname{Re} f(z) \equiv \operatorname{Re} f(a) \quad \text{pour tout } |z - a| \leq R.$$

Etape 2. Par les équations de Cauchy-Riemann on déduit qu'on a aussi

$$\operatorname{Im} f(z) \equiv \operatorname{Im} f(a) \quad \text{pour tout } |z - a| \leq R$$

et donc f est constante dans $\overline{B_R(a)}$. Par le principe du prolongement analytique f est constante sur Ω et donc $\operatorname{Re} f$ est constante sur Ω . De ceci on a directement que

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} \{\operatorname{Re} f(z)\} = \max_{z \in \partial\Omega} \{\operatorname{Re} f(z)\}.$$

Remarques. (i) On peut montrer, de façon analogue, que

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} \{\operatorname{Im} f(z)\} = \max_{z \in \partial\Omega} \{\operatorname{Im} f(z)\}.$$

(ii) Quitte à changer f en $-f$ on obtient aussi que

$$\min_{z \in \overline{\Omega}} \{\operatorname{Re} f(z)\} = \min_{z \in \partial\Omega} \{\operatorname{Re} f(z)\} \quad \text{et} \quad \min_{z \in \overline{\Omega}} \{\operatorname{Im} f(z)\} = \min_{z \in \partial\Omega} \{\operatorname{Im} f(z)\}. \quad \spadesuit$$

Exercice 9.18 (i) On sait (cf. Exercice 9.4) qu'il existe une fonction F holomorphe dans un disque ouvert contenant $\overline{B_r}$ telle que $\operatorname{Re} F(z) = \log |f(z)|$. Elle satisfait donc la formule de la moyenne, i.e.

$$F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r e^{i\theta}) d\theta.$$

Par ailleurs, comme $\operatorname{Re} F(z) = \log |f(z)|$, on déduit que

$$\log |f(0)| = \operatorname{Re} F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} F(r e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r e^{i\theta})| d\theta.$$

(ii) On pose

$$h(z) = \frac{\bar{a}z - r^2}{r}$$

qui satisfait les hypothèses de la question (i), car

$$h(z) = 0 \Leftrightarrow |z| = \frac{r^2}{|\bar{a}|} > r.$$

On observe que

$$|h(re^{i\theta})| = \frac{|\bar{a}re^{i\theta} - r^2|}{r} = |e^{i\theta}| |\bar{a} - re^{-i\theta}| = |re^{i\theta} - a| = |g(re^{i\theta})|$$

et donc, en appliquant (i) à h , on trouve

$$\log |h(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |h(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta.$$

Comme $|a| = |g(0)|$ et $r = |h(0)|$, on déduit que

$$\log |g(0)| = \log \left(\frac{|a|}{r} |h(0)| \right) = \log \left(\frac{|a|}{r} \right) + \log |h(0)|$$

et ainsi

$$\log |g(0)| = \log \left(\frac{|a|}{r} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta.$$

(iii) Ceci suit immédiatement de (ii) appliquée à $g_j(z) = (z - a_j)$, à savoir

$$\log |g_j(0)| = \log \left(\frac{|a_j|}{r} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g_j(re^{i\theta})| d\theta.$$

Comme $g(z) = \prod_{j=1}^n g_j(z)$, on déduit que

$$\log |g(0)| = \sum_{j=1}^n \log |g_j(0)| = \sum_{j=1}^n \log \left(\frac{|a_j|}{r} \right) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \int_0^{2\pi} \log |g_j(re^{i\theta})| d\theta$$

et donc

$$\log |g(0)| = \sum_{j=1}^n \log \left(\frac{|a_j|}{r} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta.$$

(iv) On pose g comme dans la question (iii) et $h = f/g$ qui est holomorphe et qui ne s'annule pas dans $\overline{B_r}$. On a donc par (i) que

$$\log |h(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |h(re^{i\theta})| d\theta$$

alors que par (iii) on trouve

$$\log |g(0)| = \sum_{j=1}^n \log \left(\frac{|a_j|}{r} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta.$$

Comme

$$\log |f(0)| = \log |g(0)| + \log |h(0)|$$

et

$$\log |f(re^{i\theta})| = \log |g(re^{i\theta})| + \log |h(re^{i\theta})|$$

on obtient tout de suite le résultat. ♠

Exercice 9.19 (i) Comme $|z - w| \leq r$, on a que $z, w \in \text{int } \gamma$ et on peut appliquer la formule intégrale de Cauchy, i.e.

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\frac{f(\xi)}{\xi - z} - \frac{f(\xi)}{\xi - w} \right] d\xi.$$

Noter que si $\xi \in \gamma$ (i.e. $|\xi - w| = 2r$)

$$|\xi - z| \geq |\xi - w| - |z - w| = 2r - |z - w| \geq r$$

et donc

$$\left| \frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - w} \right| = \frac{|z - w|}{|\xi - w||\xi - z|} = \frac{|z - w|}{2r|\xi - z|} \leq \frac{|z - w|}{2r^2}.$$

En utilisant cette estimation, on déduit que

$$|f(z) - f(w)| \leq \max \{|f(\xi)| : |\xi - w| = 2r\} \cdot \frac{|z - w|}{2r^2} \cdot \frac{4\pi r}{2\pi}$$

et (i) est démontré.

(ii) Soit $c = c(K_{2r})$ (i.e. $|f(\xi)| \leq c, \forall \xi \in \gamma \subset K_{2r}$ et $\forall f \in \mathcal{F}$), on choisit alors

$$\delta = \min \left\{ r, \frac{r\epsilon}{c} \right\}$$

et on a, en invoquant (i), que, si $|z - w| \leq \delta$, alors $|z - w| \leq r$ et

$$|f(z) - f(w)| \leq c \cdot \frac{|z - w|}{r} \leq \epsilon. \quad \spadesuit$$

Exercice 9.20 Montrons que $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy dans $C(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$. On sait déjà que c'est une suite de Cauchy dans $C(\partial\Omega; \mathbb{C})$ qui converge vers f , i.e.

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left[\sup_{z \in \partial\Omega} \{|f_n(z) - f_m(z)|\} \right] = 0.$$

Comme par le principe du maximum on a que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{z \in \overline{\Omega}} \{|f_n(z) - f_m(z)|\} = \sup_{z \in \partial\Omega} \{|f_n(z) - f_m(z)|\},$$

on déduit que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left[\sup_{z \in \overline{\Omega}} \{|f_n(z) - f_m(z)|\} \right] = 0.$$

Par conséquent $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy dans $C(\overline{\Omega}; \mathbb{C})$ et par conséquent elle converge uniformément vers une fonction \tilde{f} (et, par unicité des limites, $\tilde{f} = f$ sur $\partial\Omega$). Par le Théorème de Weierstrass f est holomorphe dans Ω et la convergence a lieu sur tout $\overline{\Omega}$. ♠

9.8 Appendice : Exercices sur les fonctions analytiques réelles

Rappel. Soient $r > 0$ et $c_n \in \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$, tels que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n \quad \text{converge.}$$

Alors la fonction

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

appartient à $C^\infty(-r, r)$ et vérifie

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $x \in]-r, r[$, on a

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} c_n x^{n-m}.$$

Définition 9.26 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) Soit $y \in \Omega$. On dit que f est analytique en y s'il existe $r > 0$ et $c_n \in \mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-y)^n \quad \text{pour tout } |x-y| \leq r.$$

(ii) On dit que f est analytique dans Ω et on note $f \in C^\omega(\Omega)$, si f est analytique en y pour tout $y \in \Omega$.

Exercice 9.21 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert connexe et $f \in C^\omega(\Omega)$. Soit $y \in \Omega$. Montrer que f est uniquement déterminé dans Ω à partir des valeurs $f^{(m)}(y)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.22 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert, $y \in \Omega$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) f est analytique en y .
- (ii) Il existe $M, r > 0$ tels que $f \in C^\infty(y-r, y+r[)$ et

$$\left| f^{(m)}(x) \right| \leq \frac{M m!}{r^m} \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N} \text{ et tout } |x-y| \leq r.$$

Indication. Pour (i) \Rightarrow (ii), montrer tout d'abord que, pour tout $|z| < 1$ et tout $m \in \mathbb{N}$, l'identité suivante a lieu

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} z^{n-m} = \frac{m!}{(1-z)^{1+m}}.$$

Pour (ii) \Rightarrow (i) on pourra utiliser le Théorème de Taylor, à savoir que pour

$$\varphi(t) = f(y + t(x - y)).$$

on a

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + R_j$$

où

$$R_j = \frac{1}{(j-1)!} \int_0^1 (1-t)^{j-1} \varphi^{(j)}(t) dt.$$

Exercice 9.23 Soit

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mais que f n'est pas analytique en 0.

Exercice 9.24 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert, $y \in \Omega$, et $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions analytiques en y .

- (i) Montrer que f est analytique dans un voisinage de y .
- (ii) Montrer que $f + g$ et fg sont analytiques en y .

Exercice 9.25 Soit $f \in C^\omega(\mathbb{R})$. Décider (en justifiant) si les assertions suivantes sont justes ou fausses.

- (i) f est une série entière, c'est à dire il existe $c_n, n \in \mathbb{N}$ tels que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Indication. Choisir $f(x) = 1/(1+x^2)$.

- (ii) Si f est entière et bornée alors f est constante.

9.9 Corrigés

Exercice 9.21 Sans perte de généralité, on suppose que $f^{(m)}(y) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Montrons que $f \equiv 0$. Posons

$$\Omega_1 = \left\{ x \in \Omega : f^{(m)}(x) = 0, \forall m \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{ x \in \Omega : f^{(m)}(x) \neq 0, \text{ pour un certain } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Puisque $f \in C^\infty(\Omega)$, tous les $f^{(m)}$ sont continus et donc Ω_2 est ouvert. Soit alors $z \in \Omega_1$. Par analyticité de f en z , nous avons, par définition et par le rappel,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (x-z)^n = 0$$

pour tout x dans un voisinage de z . Par conséquent, Ω_1 est ouvert. On a ainsi montré que Ω est l'union disjointe de deux ouverts. Puisque Ω est connexe et $y \in \Omega_1$, on déduit que $\Omega_2 = \emptyset$ et $\Omega_1 = \Omega$, d'où $f \equiv 0$. ♠

Exercice 9.22 (i) \Rightarrow (ii). Par définition on sait qu'il existe $\delta > 0$ et des $c_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-y)^n \quad \text{pour tout } |x-y| \leq \delta.$$

En particulier, on a que $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \delta^n < \infty$, ce qui implique

$$\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{|c_n| \delta^n\} < \infty \quad (9.4)$$

et aussi, par le rappel, que $f \in C^\infty(y-\delta, y+\delta)$. Puisque, pour $|z| < 1$ on a que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

on obtient en dérivant m fois

$$\frac{m!}{(1-z)^{1+m}} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} z^{n-m}. \quad (9.5)$$

Soient $|x-y| \leq \delta/2$ et $m \in \mathbb{N}$. Puisque (cf. rappel)

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} c_n (x-y)^{n-m}$$

on infère, utilisant (9.4) et (9.5), que (on suppose, sans perte de généralité que $\delta \leq 1$)

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(x)| &\leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} |c_n| \left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-m} = \frac{1}{\delta^m} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} |c_n| \delta^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} \\ &\leq \frac{\mu}{\delta^m} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} = \frac{\mu}{\delta^m} \frac{m!}{(1-1/2)^{1+m}} = \frac{2\mu m!}{(\delta/2)^m}. \end{aligned}$$

On a donc le résultat en posant $M = 2\mu$ et $r = \delta/2$.

(ii) \Rightarrow (i). On sait qu'il existe $M, r > 0$ tels que

$$|f^{(m)}(x)| \leq \frac{M m!}{r^m} \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N} \text{ et tout } |x-y| \leq r.$$

Soient x tel que $|x-y| \leq r/2$ et $\varphi \in C^\infty([0,1])$ défini par

$$\varphi(t) = f(y + t(x-y)).$$

Pour $t \in [0, 1]$ et $m \in \mathbb{N}$ on remarque que

$$|\varphi^{(m)}(t)| = |f^{(m)}(y + t(x - y)) \cdot (x - y)^m| \leq \frac{M m! (r/2)^m}{r^m} = \frac{M m!}{2^m}.$$

Il vient alors que

$$\begin{aligned} |R_m| &= \left| \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \varphi^{(m)}(t) dt \right| \\ &\leq \frac{M m!}{(m-1)! 2^m} \int_0^1 (1-t)^{m-1} dt = \frac{M}{2^m} \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R_m = 0.$$

Comme

$$f(x) = \varphi(1) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} + R_m = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(y)}{j!} (x-y)^j + R_m$$

il s'ensuit, laissant tendre m vers l'infini, que

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} (x-y)^j.$$

Ceci étant vérifié pour tout x tel que $|x-y| \leq r/2$, on a montré l'assertion. ♠

Exercice 9.23 Il est facile de voir que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(m)}(0) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. La fonction f ne peut pas être analytique en 0, parce que sinon on aurait

$$f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m = 0$$

pour tout x dans un voisinage de 0, ce qui est absurde. ♠

Exercice 9.24 (i) Immédiat par l'Exercice 9.22. En effet puisque

$$|f^{(m)}(x)| \leq \frac{M m!}{r^m} \quad \text{pour tout } |x-y| \leq r$$

alors, trivialement,

$$|f^{(m)}(x)| \leq \frac{M m!}{r^m} \leq \frac{M m!}{(r/2)^m} \quad \text{pour tout } |x-z| \leq r/2$$

pour tout $|z-y| \leq r/2$ et donc f est analytique pour tout z tel que $|z-y| \leq r/2$.

(ii) Soient $M_1, r_1 > 0$, respectivement $M_2, r_2 > 0$, vérifiant la caractérisation d'analyticité pour f , respectivement pour g . Posant $M = \max \{M_1, M_2\}$ et $r = \min \{r_1, r_2\}$, on déduit que

$$\left| f^{(m)}(x) \right|, \left| g^{(m)}(x) \right| \leq \frac{M m!}{r^m} \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N} \text{ et tout } |x - y| \leq r.$$

Il s'ensuit directement que

$$\left| (f + g)^{(m)}(x) \right| \leq \frac{2 M m!}{r^m} \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{N} \text{ et tout } |x - y| \leq r$$

et donc $f + g$ est analytique en y . Utilisant la formule bien connue

$$(fg)^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^m \frac{m!}{j!(m-j)!} f^{(j)}(x) g^{(m-j)}(x)$$

il s'ensuit que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $|x - y| \leq r$,

$$\begin{aligned} \left| (fg)^{(m)}(x) \right| &\leq \sum_{j=0}^m \frac{M^2 m!}{r^m} = \frac{(m+1) M^2 m!}{r^m} \\ &= \frac{m+1}{2^m} \frac{M^2 m!}{(r/2)^m} \leq \frac{M^2 m!}{(r/2)^m}. \spadesuit \end{aligned}$$

Exercice 9.25 (i) L'assertion est fausse car la fonction $f(x) = 1/(1+x^2)$ est analytique dans \mathbb{R} , mais il n'existe pas de $c_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En effet la fonction $g : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(z) = 1/(1+z^2)$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$; il s'ensuit donc que, pour $x, y \in \mathbb{R}$ avec $|y - x| < 1$,

$$f(y) = g(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(x)}{n!} (y-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (y-x)^n$$

et donc f est analytique dans \mathbb{R} . Supposons, par l'absurde, que

$$f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} y^n, \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Posons

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}$$

qui est holomorphe dans \mathbb{C} . Comme $g = h$ sur l'axe réel, on a, par le principe du prolongement analytique, que $g \equiv h$ sur $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ et donc g serait définie sur i et $-i$; ce qui est absurde.

(ii) Ici aussi l'assertion est fausse car la fonction

$$\cos x = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$$

est entière et bornée, mais pas constante. ♠

Chapitre 10

Séries de Laurent

10.1 Le Théorème de Laurent

Théorème 10.1 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $z_0 \in \Omega$, γ une courbe simple fermée, régulière par morceaux, telle que $z_0 \in \text{int } \gamma \subset \gamma \cup \text{int } \gamma \subset \Omega$. Soient

$$f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

une fonction holomorphe, $N \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} L_N f(z) &= \sum_{n=-N}^N c_n (z - z_0)^n \\ &= c_N (z - z_0)^N + \cdots + c_1 (z - z_0) + c_0 + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \cdots + \frac{c_{-N}}{(z - z_0)^N}, \end{aligned}$$

où

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

(en particulier $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\xi) d\xi$). Soit enfin $R > 0$ tel que $\overline{B_R(z_0)} \subset \Omega$ (cf. Figure 10.1). Alors, pour tout $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$, la limite $Lf(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} L_N f(z)$ existe, est finie et

$$f(z) = Lf(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Par ailleurs la série converge uniformément dans $B_R(z_0) \setminus \overline{B_r(z_0)}$ où $0 < r < R$.

Remarque La définition des c_n est indépendante du choix de γ . ♠

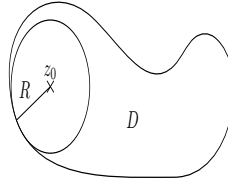


FIG. 10.1 –

10.2 Différents types de singularités

Conformément aux notations du théorème, nous introduisons maintenant les définitions suivantes.

Définition 10.2 (i) L'expression $Lf(z)$ est appelée **série de Laurent** de f au voisinage de z_0 .

(ii) La **partie régulière** de la série de Laurent est, par définition, la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

alors que

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

en est sa **partie singulière** (ou principale).

(iii) On dit que z_0 est un **point régulier** de f si et seulement si la partie singulière de la série de Laurent est zéro.

(iv) On dit que z_0 est un **pôle d'ordre m** de f si et seulement si

$$c_{-m} \neq 0 \quad \text{et} \quad c_{-k} = 0, \quad \forall k \geq m + 1.$$

On a alors

$$\begin{aligned} Lf(z) &= \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=1}^m \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

(v) On dit que z_0 est une **singularité essentielle isolée** de f si et seulement si $c_{-k} \neq 0$, pour une infinité de k . Dans ce cas

$$Lf(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

- (vi) On appelle **résidu de f en z_0** et on note $\text{Res}_{z_0}(f)$, la valeur c_{-1} .
- (vii) Le **rayon de convergence** de la série est le plus grand $R > 0$ tel que $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\} \subset \Omega$.
- (viii) On dit que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction **méromorphe** s'il existe un ensemble

$$S = \{z_1, z_2, \dots\}$$

sans point d'accumulation tel que $f : \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et chaque point de S est un pôle de f .

Remarque (i) Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe alors le développement de Laurent coïncide avec la **série de Taylor**, c'est-à-dire que $c_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ et

$$Lf(z) = Tf(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

(ii) Les séries de Laurent ne sont définies que pour des singularités isolées. Par exemple la fonction

$$f(z) = \log z$$

n'admet pas de série de Laurent en $z_0 = 0$.

(iii) Remarquer que si z_0 est un pôle d'ordre m de f , alors

$$g(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

est holomorphe dans Ω , mais la fonction $(z - z_0)^{m-1} f(z)$ ne l'est pas.

(iv) Noter que si Ω est borné dans la définition des fonctions méromorphes, alors S consiste en au plus un nombre fini de points. ♠

Dans les exemples qui suivent on trouvera la série de Laurent pour une fonction f donnée. On spécifiera de plus la nature des singularités, ainsi que le rayon de convergence de la série et le résidu.

Exemple $f(z) = 1/z$ et $z_0 = 0$.

Discussion On a immédiatement que

$$Lf(z) = \frac{1}{z} + 0$$

i.e. les parties régulière et singulière sont respectivement 0 et $\frac{1}{z}$. De plus $\text{Res}_0(f) = 1$ et $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1. La série de Laurent converge $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i.e. $R = \infty$. ♠

Exemple $f(z) = 1/z$ et $z_0 = 1$.

Discussion Avant de répondre à la question rappelons la formule de la *série géométrique* à savoir que si $q \in \mathbb{C}$ et $|q| < 1$ alors

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n.$$

Dans notre cas on a donc

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z-1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n$$

c'est-à-dire que la série de Laurent de f coïncide avec la série de Taylor et $z_0 = 1$ est un point régulier. La convergence a lieu dans $|z-1| < 1$, i.e. $R = 1$, et le résidu est zéro. ♠

Exemple $f(z) = \frac{1}{z^2}$ et $z_0 = 0$.

Discussion Il est facile de voir que $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 2 et que

$$Lf(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Le résidu est zéro et la convergence a lieu $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i.e. $R = \infty$. ♠

Exemple $f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z}$ et $z_0 = 0$.

Discussion On remarque que $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 3, $\text{Res}_0(f) = 2$ et que la convergence a lieu $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i.e. $R = \infty$. ♠

Exemple $f(z) = \frac{1}{z^2+z}$ et $z_0 = 0$.

Discussion On écrit (à l'aide de la série géométrique)

$$\frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = Lf(z)$$

pour tout $z : 0 < |z| < 1$ (i.e. $R = 1$). De plus $\text{Res}_0(f) = 1$ et $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1. ♠

Exemple $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ et $z_0 = 0$.

Discussion Comme

$$e^y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}$$

on a, en posant $y = 1/z$, que

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = Lf(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}.$$

On voit que $z_0 = 0$ est une singularité essentielle isolée de f , $\text{Res}_0(f) = 1$ et que la convergence a lieu $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i.e. $R = \infty$. ♠

Définition 10.3 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $z_0 \in \Omega$ et $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Si les coefficients c_n de la série de Laurent sont tels que

$$c_{-n} = 0 \quad \text{pour tout } n = 1, 2, \dots$$

on dit alors que z_0 est une **singularité éliminable**.

Exemple Soient $z_0 = 0$ et $f(z) = \sin z/z$. Alors z_0 est une singularité éliminable.

Discussion Il suffit de poser

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

et d'observer que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}.$$

La fonction f ainsi définie est holomorphe dans \mathbb{C} , et donc $z_0 = 0$ est un point régulier de f . ♠

Exemple Montrer que toutes les singularités d'une fonction ne sont pas nécessairement des pôles ou des singularités essentielles isolées.

Discussion On a déjà vu le cas de $f(z) = \log(z)$, en $z_\infty = 0$. Un autre exemple est $f(z) = \operatorname{tg}(1/z)$, en $z_\infty = 0$. On a en effet que, si $k \in \mathbb{N}$,

$$y_k = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}(y_k) = \infty$$

et donc

$$z_k = \frac{2}{(2k+1)\pi} \quad (\rightarrow z_\infty = 0, \text{ quand } k \rightarrow \infty) \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{1}{z_k}\right) = \infty.$$

Donc f n'admet pas de série de Laurent en $z_\infty = 0$ car alors on devrait avoir $R = 0$. Conclusion : $z_\infty = 0$ **n'est pas une singularité isolée**. ♠

Voici maintenant quelques résultats simples mais utiles.

Proposition 10.4 Soit $f(z) = p(z)/q(z)$, où p et q sont des fonctions holomorphes au voisinage de z_0 . Soient

a) z_0 un zéro d'ordre k de p , i.e. (si $p(z_0) \neq 0$ on pose $k = 0$)

$$p(z_0) = \dots = p^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad \text{mais } p^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

b) z_0 un zéro d'ordre l de q , i.e. (si $q(z_0) \neq 0$ on pose $l = 0$)

$$q(z_0) = \dots = q^{(l-1)}(z_0) = 0, \quad \text{mais } q^{(l)}(z_0) \neq 0.$$

- Si $l > k$, alors z_0 est un pôle d'ordre $l-k$ de f .
- Si $l \leq k$, alors z_0 est une singularité éliminable de f (où on a posé $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} p(z)/q(z)$, cf. Exemple 10.3).

Démonstration Cf. Exercice 10.2. ■

Proposition 10.5 Si z_0 est un pôle d'ordre m de la fonction f , alors la fonction

$$F(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

est holomorphe au voisinage de z_0 et

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \right].$$

Démonstration Par définition d'un pôle d'ordre m , on a que

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

et par conséquent F est holomorphe car

$$F(z) = (z - z_0)^m f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{n+m} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k-m} (z - z_0)^k.$$

On a donc

$$F(z) = c_{-1} (z - z_0)^{m-1} + \sum_{k=0, k \neq m-1}^{+\infty} c_{k-m} (z - z_0)^k$$

et ainsi

$$\left. \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [F(z)] \right|_{z=z_0} = (m-1)! c_{-1}$$

ce qui est le résultat souhaité. ■

Proposition 10.6 Soit $f(z) = p(z)/q(z)$, où p et q sont des fonctions holomorphes au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$ et telles que $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$ et $q'(z_0) \neq 0$. Alors

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Démonstration Cf. Exercice 10.3. ■

Théorème 10.7 (Règle de l'Hôpital) Soient f et g deux fonctions holomorphes au voisinage de z_0 telles que z_0 est un zéro d'ordre k de f et d'ordre l de g avec $k \geq l$. Alors

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{f^{(l)}(z_0)}{g^{(l)}(z_0)}.$$

En particulier si $l = 1$ (i.e. $f(z_0) = g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$), alors

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Démonstration Comme f est holomorphe au voisinage de z_0 on a

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots \\ &= (z - z_0)^l \left[\frac{f^{(l)}(z_0)}{l!} + \sum_{n=l+1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-l} \right] \\ &= (z - z_0)^l \frac{f^{(l)}(z_0)}{l!} + (z - z_0)^l F(z) \end{aligned}$$

car z_0 est un zéro d'ordre $k \geq l$ de f . De même on obtient

$$\begin{aligned} g(z) &= (z - z_0)^l \left[\frac{g^{(l)}(z_0)}{l!} + \sum_{n=l+1}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-l} \right] \\ &= (z - z_0)^l \frac{g^{(l)}(z_0)}{l!} + (z - z_0)^l G(z) \end{aligned}$$

Donc, comme $F(z_0) = G(z_0) = 0$ et $g^{(l)}(z_0) \neq 0$, on en déduit que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{\frac{f^{(l)}(z_0)}{l!} + F(z)}{\frac{g^{(l)}(z_0)}{l!} + G(z)} \right] = \frac{f^{(l)}(z_0)}{g^{(l)}(z_0)}.$$

Ceci termine la démonstration. ■

(Pour plus de détails, cf. [1], [5] 155-159).

10.3 Démonstration du théorème

Démonstration On divise la démonstration en trois étapes.

Etape 1. Soient r, R tels que

$$0 < r < |z - z_0| < R \quad \text{et} \quad \overline{B_R(z_0)} \subset \Omega.$$

Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que (cf. Figure 10.2)

$$\overline{B_\epsilon(z)} \subset B_R(z_0) \setminus \overline{B_r(z_0)}.$$

Soit la fonction

$$g(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z};$$

noter qu'elle est holomorphe dans

$$O = \Omega \setminus \left[\overline{B_r(z_0)} \cup \overline{B_\epsilon(z)} \right].$$

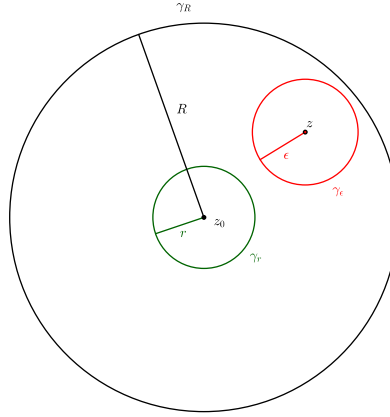


FIG. 10.2 –

Par le Théorème de Cauchy, on a, si

$$\gamma_R = \partial B_R(z_0), \quad \gamma_r = \partial B_r(z_0), \quad \gamma_\epsilon = \partial B_\epsilon(z),$$

que

$$\int_{\gamma_R} g(\xi) d\xi = \int_{\gamma_r} g(\xi) d\xi + \int_{\gamma_\epsilon} g(\xi) d\xi.$$

Or, comme d'habitude, de la continuité de f en z on déduit que

$$\int_{\gamma_\epsilon} g(\xi) d\xi = i \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon e^{i\theta} d\theta \rightarrow 2\pi i f(z), \quad \text{quand } \epsilon \rightarrow 0.$$

On a ainsi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Etape 2. On procède ensuite comme dans le Théorème 9.16. On évalue chacune des deux intégrales séparément.

(i) On écrit

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}.$$

Comme $\xi \in \gamma_R$ (i.e. $|\xi - z_0| = R$) et $z \in B_R(z_0)$ (i.e. $|z - z_0| < R$), on a

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{R} < 1$$

et on peut alors écrire, z étant fixé,

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right]^n$$

et la série converge uniformément pour $\xi \in \gamma_R$ (car z est fixé). On peut donc permuter somme et intégrale pour avoir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left[\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right]^n d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right\} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

(ii) On écrit

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{-1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}}.$$

Comme $\xi \in \gamma_r$ on a $|\xi - z_0| = r < |z - z_0| < R$, on déduit que

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| = \frac{r}{|z - z_0|} < 1$$

et on peut alors écrire, z étant fixé,

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{-1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right]^n$$

et la série converge uniformément pour $\xi \in \gamma_r$ (car z est fixé). On peut donc permuter somme et intégrale pour avoir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{z - z_0} \left[\frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right]^n d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\xi) (\xi - z_0)^n d\xi \right\} (z - z_0)^{-n-1} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left\{ \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \right\} (z - z_0)^k. \end{aligned}$$

Etape 3. Soit γ est une courbe simple fermée, régulière par morceaux, telle que $\gamma \cup \text{int } \gamma \subset \Omega$ ($z_0 \in \text{int } \gamma$). On choisit maintenant r suffisamment petit pour que

$$\overline{B_r(z_0)} \subset \text{int } \gamma$$

et $R > r$ comme avant pour que (cf. Figure 10.3)

$$\overline{B_r(z_0)} \subset B_R(z_0) \subset \overline{B_R(z_0)} \subset \Omega.$$

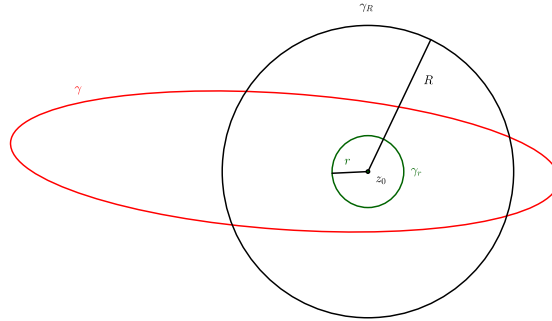


FIG. 10.3 –

On observe alors que, par le Théorème de Cauchy, on a

$$\int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Par conséquent si

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

on obtient par la première et la deuxième étapes que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

On a donc montré le théorème, à savoir que la convergence des deux séries a lieu si $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ et qu'elle est bien uniforme dans tout anneau contenu dans Ω . ■

10.4 Exercices

De nombreux autres exercices concernant ce chapitre, notamment les Exercices 1, 6, 8 et 12, se trouvent au Chapitre 11 de [9].

Exercice 10.1 Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{C} telle que son développement en série entière autour de chaque point a , c'est à dire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n,a} (z - a)^n$$

possède au moins un des $c_{n,a}$ nul.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit l'ensemble

$$A_n = \{a \in B : c_{n,a} = 0\}$$

où $B \subset \mathbb{C}$ est le disque unité. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que A_m soit non-dénombrable.

(ii) Appliquer le principe du prolongement analytique à $f^{(m)}$ pour en déduire que f est un polynôme.

Exercice 10.2 Montrer la Proposition 10.4.

Exercice 10.3 Montrer la Proposition 10.6.

Exercice 10.4 Soient $a, z_0 \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - z_0}{a - z_0} \right)^n = \frac{a - z_0}{a - z}, \quad \forall |z - z_0| < |z - a|.$$

Exercice 10.5 Soit f holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et paire, i.e $f(z) = f(-z)$. Montrer que $\text{Res}_0(f) = 0$.

Exercice 10.6 Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière telle que, pour un certain $r > 0$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n |a_n| r^{n-1} < |a_1|.$$

(i) Montrer que f possède un rayon de convergence supérieur ou égal à r .

(ii) Montrer que, pour $|w|, |z| \leq r$,

$$\left| \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left(\sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} w^j \right) \right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} n |a_n| r^{n-1}.$$

(iii) Montrer que f est injective sur $B_r(0)$, en utilisant le point précédent et la formule

$$z^n - w^n = (z - w) \sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k}.$$

(iv) Dédurre du point précédent que si une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ satisfait $f'(z_0) \neq 0$ pour un $z_0 \in \Omega$, il existe un voisinage de z_0 sur lequel f est injective.

Exercice 10.7 (Lemme de Riemann) Soit f une fonction holomorphe et bornée sur $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

(i) Montrer que la fonction

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

est holomorphe sur $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

(ii) En déduire que f peut s'étendre en une fonction holomorphe sur $B_r(z_0)$.

Remarque. Pour une approche très légèrement différente voir Exercice 10.8 (ii).

Exercice 10.8 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $z_0 \in \Omega$, $R > 0$ tel que

$$\overline{B_R(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\} \subset \Omega$$

et $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Soit Lf le développement de Laurent de f , à savoir

$$Lf(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad 0 < |z - z_0| \leq R.$$

(i) Montrer que pour tout $0 < r < R$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$|c_n| \leq \frac{1}{r^n} \max\{|f(z)| : z \in \partial B_r(z_0)\}.$$

(ii) Montrer, à l'aide de (i), que z_0 est une singularité éliminable si et seulement si f est bornée dans $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ pour un certain $0 < r < R$.

(iii) Montrer que z_0 est un pôle de f si et seulement si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty.$$

Exercice 10.9 (Théorème de Casorati-Weierstrass) Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $z_0 \in \Omega$, $R > 0$ tel que

$$\overline{B_R(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\} \subset \Omega$$

et $f : \Omega \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Montrer que si z_0 est une singularité essentielle isolée de f , alors pour tout $0 < r < R$, l'image de $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ est dense dans \mathbb{C} , en d'autres termes

$$\overline{f(B_r(z_0) \setminus \{z_0\})} = \mathbb{C}.$$

Suggestion. Procéder par contradiction en supposant qu'il existe $0 < r < R$, $\xi \in \mathbb{C}$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$|f(z) - \xi| \geq \epsilon \quad \text{pour tout } z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$$

puis poser

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \xi}.$$

Puis utiliser l'Exercice 10.8.

Remarque. En fait le théorème peut être nettement amélioré et est alors connu comme le Grand Théorème de Picard.

Exercice 10.10 (i) Montrer que les coefficients du développement de Taylor $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ en 0 d'une fonction f holomorphe sur $B_1(0)$, le disque centré en 0 et de rayon 1, sont donnés récursivement par

$$a_0 = \lim_{z \rightarrow 0} [f(z)] \quad \text{et} \quad a_k = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j}{z^k} \right] \quad \text{pour } k \geq 1.$$

(ii) En déduire qu'il n'existe pas de fonction f holomorphe sur $B_1(0)$ satisfaisant

$$f(1/n) = 1/2^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Exercice 10.11 Soit

$$f(z) = \frac{1}{\sin e^z}.$$

Trouver toutes les singularités de f . Indiquer la nature des singularités dont la partie imaginaire est nulle, leur résidu et le rayon de convergence de leur série de Laurent.

Exercice 10.12 Soient $n \in \mathbb{Z}$ et

$$f(z) = \frac{\sin(\pi(z-1))}{(z-1)^n}$$

Trouver la série de Laurent de f en $z=1$. Préciser, en fonction de n , la nature de la singularité, son résidu et le rayon de convergence de la série de Laurent.

Exercice 10.13 Soit la fonction

$$f(z) = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2} e^z \right].$$

Trouver toutes les singularités de f . Pour chacune des singularités, déterminer

- la nature de la singularité
- le résidu
- le rayon de convergence de la série de Laurent en ce point.

Exercice 10.14 Soit la fonction

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z^2)}.$$

(i) Trouver toutes les singularités de f . Pour chacune des singularités, déterminer la nature de la singularité et le rayon de convergence de la série de Laurent en ce point.

(ii) Calculer le résidu en $z=0$.

Exercice 10.15 Soit

$$f(z) = z^4 e^{-\frac{1}{z}} + \frac{z^2}{\sin(z^3)}.$$

Trouver toutes les singularités de f . Indiquer la nature des singularités, leur résidu et le rayon de convergence de leur série de Laurent.

Exercice 10.16 (i) Soit $f(z) = z^5 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$. Trouver sa série de Laurent en $z_0 = 0$, préciser la nature de la singularité, le résidu et le rayon de convergence.

(ii) Soient $g(z) = \frac{1}{\sin(ze^z)}$ et $z_0 = 0$. Préciser la nature de la singularité et son résidu. Donner le terme constant dans la partie régulière de la série de Laurent.

Exercice 10.17 (i) Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant 0 et $f : \Omega \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et paire (voir aussi Exercice 10.5). Montrer qu'alors sa série de Laurent, au voisinage de 0, est de la forme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{2n} z^{2n}.$$

Que vaut $\text{Res}_0(f)$?

(ii) Soit

$$f(z) = \frac{e^{1/z^4}}{(z^2 + 1) \cos(z^2)}.$$

Trouver toutes les singularités de f qui sont à l'intérieur de γ , le cercle centré en 0 et de rayon 2. Pour chacune des singularités dire sa nature, en donner son résidu et le rayon de convergence de la série de Laurent en ce point.

10.5 Corrigés

Exercice 10.1 (i) Par hypothèse, nous savons que, pour tout $a \in \mathbb{C}$ (et donc en particulier dans B le disque unité de \mathbb{C}), il existe $m_a \in \mathbb{N}$ avec

$$c_{m_a, a} = 0. \quad (10.1)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble A_n par

$$A_n = \{a \in B : c_{n, a} = 0\}.$$

Par (10.1), on a que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = B.$$

Puisque B n'est pas dénombrable, il existe nécessairement $m \in \mathbb{N}$ tel que A_m est également non-dénombrable.

(ii) Puisque $A_m \subset B$ et que B est borné, il existe $z_k \in A_m$ et $z \in \mathbb{C}$ (en fait aussi dans A_m) une suite telle que $z_k \neq z$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [z_k] = z.$$

Comme

$$f^{(m)}(z_k) = m! c_{m, z_k} = 0$$

on conclut par le principe du prolongement analytique que

$$f^{(m)} \equiv 0 \quad \text{dans } \mathbb{C}.$$

Il s'ensuit directement que f est polynôme de degré au plus $m - 1$. ♠

Exercice 10.2 Comme z_0 est un zéro d'ordre k de p et l de q , on peut écrire

$$p(z) = (z - z_0)^k P(z) \quad \text{et} \quad q(z) = (z - z_0)^l Q(z)$$

où P et Q sont holomorphes et $P(z_0), Q(z_0) \neq 0$. On a donc que

$$f(z) = (z - z_0)^{k-l} F(z)$$

où $F(z) = P(z)/Q(z)$ est holomorphe en z_0 et $F(z_0) \neq 0$.

(i) Si $l > k$, alors

$$f(z)(z - z_0)^{l-k} = F(z)$$

qui est holomorphe et ne s'annule pas en z_0 , par conséquent, z_0 est un pôle d'ordre $l - k$ de f .

(ii) Si $k \geq l$, alors $z \rightarrow (z - z_0)^{k-l}$ et F sont holomorphes en z_0 et donc z_0 est un point régulier de f . ♠

Exercice 10.3 Par l'Exercice 10.2, z_0 est un pôle d'ordre 1 de f . Par la Proposition 10.5, le résidu est donné par

$$\text{Res}_{z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{p(z)}{\frac{q(z)}{z - z_0}} \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{p(z)}{\frac{q(z) - q(z_0)}{z - z_0}} \right] = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \quad \spadesuit$$

Exercice 10.4 La formule de la série géométrique standard (avec $a = 1$ et $z_0 = 0$) est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w^n = \frac{1}{1-w}, \quad \forall |w| < 1.$$

En écrivant, pour $z \neq a$,

$$\frac{a - z_0}{a - z} = \frac{a - z_0}{a - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{a - z_0} \right)}$$

on applique à $w = \frac{z - z_0}{a - z_0}$ la formule précédente valable pour autant que

$$|w| = \frac{|z - z_0|}{|a - z_0|} < 1$$

ce qui donne le résultat voulu. ♠

Exercice 10.5 Par le Théorème de Laurent, f admet une série de Laurent autour de 0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Comme f est paire, tous les coefficients impairs sont nuls, c'est à dire

$$c_{2k+1} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, le résidu est nul

$$\text{Res}_0(f) = c_{-1} = 0. \quad \spadesuit$$

Exercice 10.6 (i) La série entière converge absolument en $|z| = r$ puisque

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n r^n| &= |a_0| + |a_1| r + \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| r^n \\ &\leq |a_0| + |a_1| r + r \sum_{n=2}^{+\infty} n |a_n| r^{n-1} \\ &< |a_0| + |a_1| r + |a_1| r < \infty. \end{aligned}$$

Son rayon de convergence est donc supérieur ou égal à r .

(ii) Soient $|w|, |z| < r$. On a directement

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left(\sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} w^j \right) \right| \\ &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \sum_{j=0}^{n-1} |z|^{n-1-j} |w|^j \leq \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \sum_{j=0}^{n-1} |r|^{n-1-j} |r|^j \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n |a_n| r^{n-1}. \end{aligned}$$

(iii) Soient $z, w \in B_r(0)$ tels que $f(z) = f(w)$, c'est à dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z^n - w^n) = 0.$$

Comme, pour $n \geq 2$,

$$z^n - w^n = (z - w) \sum_{j=0}^{n-1} z^{n-1-j} w^j$$

nous avons

$$a_1 (w - z) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (z^n - w^n) = (z - w) \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} \right)$$

en particulier

$$|a_1| |z - w| = |z - w| \left| \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} \right) \right|.$$

Supposons par l'absurde que $z \neq w$, ce qui implique

$$|a_1| = \left| \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} \right) \right|. \quad (10.2)$$

Puisque $|z|, |w| \leq r$, nous avons, par le point (ii) et par hypothèse

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k w^{n-1-k} \right) \right| &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |z|^k |w|^{n-1-k} \\ &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} n |a_n| r^{n-1} < |a_1| \end{aligned}$$

ce qui contredit (10.2). Ainsi $z = w$, et donc f est injective dans $B_r(0)$.

(iv) Sans perte de généralité, quitte à remplacer $f(z)$ par $f(z + z_0)$, on peut supposer que $z_0 = 0 \in \Omega$. Puisque f est holomorphe sur Ω , alors il existe $R > 0$ tel que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad \forall |z| \leq R$$

$$f'(z) = a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n z^{n-1}, \quad \forall |z| \leq R$$

avec $a_1 = f'(z_0) \neq 0$. Ceci implique que la fonction réelle

$$g(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n |a_n| t^{n-1}$$

est continue sur $[0, R]$. Comme $g(0) = 0$, il existe $r \in]0, R[$ tel que

$$g(r) = \sum_{n=2}^{+\infty} n |a_n| r^{n-1} < |a_1|.$$

Alors, par le point (iii), la fonction f est injective sur $B_r(0)$. ♠

Exercice 10.7 (i) Soit $g : B_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

Montrons que g est holomorphe sur $B_r(z_0)$. Il est clair que g est holomorphe sur $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Voyons cela en z_0

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)] = 0$$

puisque f est bornée. On a donc que $g'(z_0) = 0$.

(ii) Par le Théorème de Laurent, g se développe en série de Taylor autour de z_0

$$g(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad \forall |z - z_0| < r$$

où $a_0 = g(z_0) = 0$ et $a_1 = g'(z_0) = 0$. Il en découle que

$$f(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k (z - z_0)^{k-2}, \quad \forall |z - z_0| < r, z \neq z_0.$$

La partie singulière de cette série est nulle, donc on peut prolonger f en z_0 en posant

$$f(z_0) = a_2 = g''(z_0)/2.$$

Par le Théorème 8.6, f est également holomorphe en z_0 . ♠

Exercice 10.8 (i) Soit $\gamma = \partial B_r(z_0)$. Comme

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{(r e^{it})^{n+1}} i r e^{it} dt$$

on a tout de suite le résultat.

(ii) *Etape 1.* Si z_0 est une singularité éliminable, on a, par définition, que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad 0 < |z - z_0| \leq R$$

et, par conséquent,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = c_0$$

et ainsi f est bornée au voisinage de z_0 ; i.e. f est bornée dans $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ pour un certain $0 < r < R$.

Etape 2. Si f est bornée dans $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ pour un certain $0 < r < R$, alors par (i) on obtient si $0 < s < r$ et si

$$M = \max \{|f(z)| : z \in \partial B_s(z_0)\}$$

que

$$|c_n| \leq \frac{M}{s^n} = M s^{-n}.$$

En laissant $s \rightarrow 0$, on trouve que

$$c_n = 0 \quad \text{pour tout } n = -1, -2, \dots$$

et donc z_0 est une singularité éliminable.

(iii) *Etape 1.* Si z_0 est un pôle d'ordre N de f , la série de Laurent s'écrit

$$f(z) = Lf(z) = \sum_{n=1}^N \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \quad 0 < |z-z_0| \leq R$$

et on infère que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| (z-z_0)^N f(z) \right| = c_{-N} \neq 0.$$

On déduit alors immédiatement que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty.$$

Etape 2. Réciproquement si $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$, alors

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{1}{f(z)} \right| = 0$$

et, par la question (ii), $1/f$ a une singularité éliminable en z_0 . On peut donc écrire, au voisinage de z_0 ,

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n (z-z_0)^n.$$

Comme $d_0 = 0$ et $1/f$ n'est pas identiquement nulle, soit $N \geq 1$ le premier entier tel que $d_N \neq 0$, on a donc que

$$\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^N F(z) \quad \text{où } F(z) = d_N + \sum_{n=N+1}^{+\infty} d_n (z-z_0)^{n-N}.$$

Au voisinage de z_0 , on a que $F(z) \neq 0$ et donc

$$(z-z_0)^{-N} f(z) = \frac{1}{F(z)}$$

ce qui nous permet de conclure que z_0 est un pôle de f , comme souhaité. ♠

Exercice 10.9 Supposons que le résultat est faux. On peut donc trouver $0 < r < R$, $\xi \in \mathbb{C}$ et $\epsilon > 0$ tels que

$$|f(z) - \xi| \geq \epsilon \quad \text{pour tout } z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Soit

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \xi}$$

elle est holomorphe dans $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ et

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |g(z)| \leq \frac{1}{\epsilon}.$$

Par le rappel (i) g a une singularité éliminable en z_0 . Deux cas peuvent alors se présenter.

Cas 1 : $g(z_0) \neq 0$. On obtient alors que

$$f(z) = \xi + \frac{1}{g(z)}$$

est holomorphe en z_0 , ce qui contredit le fait que f a une singularité essentielle isolée en z_0 .

Cas 2 : $g(z_0) = 0$. On a alors que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - \xi| = \infty$$

et par le rappel (ii) $f(z) - \xi$ (et donc f) a un pôle en z_0 , ce qui contredit aussi le fait que f a une singularité essentielle isolée en z_0 . ♠

Exercice 10.10 (i) Puisque la série de Taylor de f en 0 converge absolument et uniformément sur tout disque $\overline{B_r(0)}$ avec $0 < r < 1$, on a

$$\lim_{z \rightarrow 0} [f(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\sum_{j=0}^{+\infty} a_j z^j \right] = \sum_{j=0}^{+\infty} \lim_{z \rightarrow 0} (a_j z^j) = a_0$$

et si $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j}{z^k} \right] &= \lim_{z \rightarrow 0} \left[\sum_{j=k}^{+\infty} a_j \frac{z^j}{z^k} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\sum_{j=k}^{+\infty} a_j z^{j-k} \right] \\ &= \sum_{j=k}^{+\infty} \lim_{z \rightarrow 0} (a_j z^{j-k}) = a_k. \end{aligned}$$

(ii) S'il existait une telle fonction, nous aurions

$$a_0 = \lim_{z \rightarrow 0} [f(z)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(1/n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/2^n) = 0$$

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{f(z) - a_0}{z} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(1/n) - 0}{1/n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (n/2^n) = 0.$$

Par récurrence, on a $a_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; en effet si

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0,$$

alors

$$a_k = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{f(z) - \sum_{j=0}^{k-1} a_j z^j}{z^k} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{f(1/n) - 0}{(1/n)^k} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^k / 2^n) = 0.$$

Donc $f(z) = 0$ sur $B_1(0)$, contredisant $f(1/2) = 1/4$. ♠

Exercice 10.11 (i) Appelons $p(z) = \sin e^z$ et remarquons que

$$\sin(e^z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^z = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ou encore, si $n \neq 0$,

$$p(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \begin{cases} \log(n\pi) + 2im\pi & \text{si } n \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{Z} \\ \log(|n|\pi) + i(2m+1)\pi & \text{si } (-n) \in \mathbb{N} \text{ et } m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

(ii) Les singularités dont la partie imaginaire est nulle sont donc

$$z_n = \log(n\pi) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}.$$

Ce sont des pôles d'ordre 1, car

$$p'(z_n) = (n\pi) \cos(n\pi) = (-1)^n (n\pi) \neq 0.$$

Le résidu en z_n est donné par

$$\text{Res}_{z_n}(f) = \frac{1}{p'(z_n)} = \frac{(-1)^n}{n\pi}.$$

Le rayon de convergence est

$$R_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

car si $n = 1$

$$R_1 = \min\{\pi, \log(2\pi) - \log \pi\} = \log 2$$

alors que si $n > 1$ on a

$$R_n = \min\{\pi, \log(n\pi) - \log((n-1)\pi), \log((n+1)\pi) - \log(n\pi)\}. \quad \spadesuit$$

Exercice 10.12 (i) Posons $y = \pi(z-1)$. On a

$$f(z) = \pi^n \frac{\sin y}{y^n} = \frac{\pi^n}{y^n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \pi^n}{(2k+1)!} y^{2k+1-n}$$

et donc la série de Laurent de f est

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!} (z-1)^{2k+1-n}$$

(ii) Par conséquent si $n \leq 1$, f est holomorphe dans \mathbb{C} ; alors que si $n \geq 2$ le point $z = 1$ est un pôle d'ordre $n - 1$.

(iii) La série de Laurent converge $\forall z \neq 1$ et de plus

$$\operatorname{Res}_1(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 3 \text{ et } n \text{ est impair} \\ \frac{(-1)^{m-1} \pi^{2m-1}}{(2m-1)!} & \text{si } n = 2m \text{ et } m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

car si $n = 2m \geq 2$, alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!} (z-1)^{2(k-m)+1} + \frac{(-1)^{m-1} \pi^{2m-1}}{(2m-1)!} \frac{1}{z-1} \\ &\quad + \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!} (z-1)^{2(k-m)+1}. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

Exercice 10.13 Les singularités sont en

$$e^z = 2n + 1 \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}$$

ou en d'autres termes

$$z_{n,m} = \begin{cases} \log(2n+1) + 2m\pi i & \text{si } n \geq 0 \text{ et } m \in \mathbb{Z} \\ \log|2n+1| + (2m+1)\pi i & \text{si } n \leq -1 \text{ et } m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(i) On a clairement que $z_{n,m}$ est un pôle d'ordre 1.

(ii) Comme la fonction est un quotient de fonctions holomorphes $f = p/q$, on trouve

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_{n,m}}(f) &= \lim_{z \rightarrow z_{n,m}} [(z - z_{n,m})f(z)] = \frac{p(z_{n,m})}{q'(z_{n,m})} \\ &= \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2} e^{z_{n,m}}\right]}{-\left[\frac{\pi}{2} e^{z_{n,m}}\right] \sin\left[\frac{\pi}{2} e^{z_{n,m}}\right]} = -\frac{2}{\pi(2n+1)}. \end{aligned}$$

(iii) Le rayon de convergence en $z_{n,m}$ est donné par

$$\begin{aligned} R_{n,m} &= \min\{\pi, |\log|2n+1| - \log(|2n+1|-1)|, |\log|2n+1| - \log(|2n+1|+1)|\} \\ &= \log\left[1 + \frac{1}{|2n+1|}\right]. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

Exercice 10.14 (i) Les singularités sont en

$$z^2 = n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad z = \begin{cases} \pm\sqrt{n\pi} & \text{si } n \geq 0 \\ \pm i\sqrt{|n|\pi} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

et ce sont des pôles d'ordre 1 sauf $z = 0$ qui est un pôle d'ordre 2. De plus le rayon de convergence en $z^2 = n\pi$ est

$$R_0 = \sqrt{\pi} \quad \text{si } n = 0$$

$$R_n = \min_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sqrt{n\pi} - \sqrt{(n-1)\pi}, \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} \right\}$$

$$= \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} \quad \text{si } n \geq 1$$

$$R_{-n} = \min_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sqrt{|n|\pi} - \sqrt{(|n|-1)\pi}, \sqrt{(|n|+1)\pi} - \sqrt{|n|\pi} \right\}$$

$$= \sqrt{(|n|+1)\pi} - \sqrt{|n|\pi} \quad \text{si } n < -1.$$

En résumé si $n \in \mathbb{Z}$

$$R_n = \sqrt{(|n|+1)\pi} - \sqrt{|n|\pi}.$$

(ii) Le résidu en $z = 0$ est donné par la formule

$$\text{Res}_0(f) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} [z^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z \sin(z^2) - z^2 [2z \cos(z^2)]}{[\sin(z^2)]^2}.$$

Et donc en faisant un développement limité, on trouve

$$\text{Res}_0(f) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z \left[z^2 - \frac{z^6}{3!} \right] - 2z^3 \left[1 - \frac{z^4}{2!} \right]}{z^4} = 0. \quad \spadesuit$$

Exercice 10.15 Les singularités de f sont en $z = 0$ et en $z^3 = n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(i) La singularité $z_0 = 0$ est une *singularité essentielle isolée*. En effet noter tout d'abord que la fonction s'écrit, au voisinage de $z_0 = 0$,

$$\frac{z^2}{\sin(z^3)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

et a donc un pôle d'ordre 1 en $z_0 = 0$ et de résidu 1. Alors que

$$z^4 e^{-\frac{1}{z}} = z^4 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! z^n} \right) = \left(z^4 - z^3 + \frac{z^2}{2!} - \frac{z}{3!} + \frac{1}{4!} \right) + \left(-\frac{1}{5!z} + \sum_{n=6}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! z^{n-4}} \right)$$

a une singularité essentielle isolée en $z_0 = 0$ et de résidu $(-1/(5!))$. En conclusion on a bien que $z = 0$ est une singularité essentielle isolée et

$$\text{Res}_{z_0}(f) = 1 - \frac{1}{5!}.$$

Le *rayon de convergence* de la série de Laurent en $z_0 = 0$ est $(\pi)^{1/3}$.

(ii) Les autres singularités sont donc pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$(z_{n,k})^3 = (n\pi) e^{ki\pi}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

et donc

$$z_{n,0} = (n\pi)^{1/3}, \quad z_{n,1} = (n\pi)^{1/3} e^{\frac{i\pi}{3}}, \quad z_{n,2} = (n\pi)^{1/3} e^{\frac{2i\pi}{3}},$$

$$z_{n,3} = (n\pi)^{1/3} e^{i\pi}, \quad z_{n,4} = (n\pi)^{1/3} e^{\frac{4i\pi}{3}}, \quad z_{n,5} = (n\pi)^{1/3} e^{\frac{5i\pi}{3}}.$$

Ce sont clairement des pôles d'ordre 1 et dont le résidu est donné par, pour $k = 0, \dots, 5$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_{n,k}}(f) &= \lim_{z \rightarrow z_{n,k}} [(z - z_{n,k}) f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_{n,k}} \left[(z - z_{n,k}) \frac{z^2}{\sin(z^3)} \right] \\ &= (z_{n,k})^2 \lim_{z \rightarrow z_{n,k}} \left[\frac{(z - z_{n,k})}{\sin(z^3)} \right] = (z_{n,k})^2 \lim_{z \rightarrow z_{n,k}} \left[\frac{1}{3z^2 \cos(z^3)} \right] \\ &= \frac{1}{3 \cos(z_{n,k})^3} = \frac{1}{3 \cos(\pm n\pi)} = \frac{(-1)^n}{3}. \end{aligned}$$

Le rayon de convergence $R_{n,k}$ de la série de Laurent en $z_{n,k}$ est donc

$$R_{n,k} = \min_{l=0, \dots, 5} \{|z_{n,k} - z_{n+1,l}|, |z_{n,k} - z_{n-1,l}|, |z_{n,k} - z_{n,l}|\}.$$

On voit facilement, avec la convention $z_{n,6} = z_{n,0}$, que

$$\begin{aligned} R_{n,k} &= \min \{|z_{n,k} - z_{n+1,k}|, |z_{n,k} - z_{n-1,k}|, |z_{n,k} - z_{n,k+1}|\} \\ &= \pi^{1/3} \min \left\{ (n+1)^{1/3} - n^{1/3}, n^{1/3} - (n-1)^{1/3}, n^{1/3} \left| e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 \right| \right\} \\ &= \pi^{1/3} \min \left\{ (n+1)^{1/3} - n^{1/3}, n^{1/3} - (n-1)^{1/3}, n^{1/3} \right\} \\ &= \pi^{1/3} \min \left\{ (n+1)^{1/3} - n^{1/3}, n^{1/3} - (n-1)^{1/3} \right\}. \end{aligned}$$

Comme la fonction $f(x) = (x+1)^{1/3} - x^{1/3}$ est décroissante, on déduit que

$$R_{n,k} = \pi^{1/3} \left[(n+1)^{1/3} - n^{1/3} \right]. \quad \spadesuit$$

Exercice 10.16 (i) Comme

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \dots$$

on a que la série de Laurent de f est

$$\begin{aligned} f(z) &= z^5 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{4n-3}} \\ &= z^3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{4n-3}} = z^3 - \frac{1}{3! z} + \dots \end{aligned}$$

On a donc que 0 est une singularité essentielle isolée et $\operatorname{Res}_0(f) = -(1/3!)$. Le rayon de convergence est infini.

(ii) On voit tout de suite que 0 est un pôle d'ordre 1 et donc

$$\operatorname{Res}_0(g) = \lim_{z \rightarrow 0} [z g(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(e^z + z e^z) \cos(z e^z)} \right] = 1.$$

Comme la fonction $h(z) = z g(z)$ est holomorphe en 0 on a

$$h(z) = h(0) + h'(0)z + \dots = 1 + h'(0)z + \dots$$

Il nous faut donc identifier $h'(0)$ (qui est le terme constant dans la partie régulière de la série de Laurent)

$$h'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(ze^z) - z(e^z + ze^z)\cos(ze^z)}{\sin^2(ze^z)} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{z - z(1+z)}{z^2} \right] = -1$$

où on a utilisé un développement limité. On a ainsi

$$g(z) = \frac{1}{z} - 1 + \dots \quad \spadesuit$$

Exercice 10.17 (i) On écrit la série de Laurent de f en 0. On a ainsi que pour $r > 0$ suffisamment petit et pour tout $0 < |z| < r$ que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \quad \text{et} \quad f(-z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (-1)^n z^n.$$

Comme f est paire on déduit des deux identités précédentes que $c_{2n+1} = 0$ et donc $\text{Res}_0(f) = 0$.

(ii) Les singularités à l'intérieur de γ sont clairement $0, \pm i$ et $\pm\sqrt{\pi/2}$.

1) $z_0 = 0$ est une singularité essentielle isolée et $\text{Res}_0(f) = 0$, car la fonction f est paire et donc par (i)

$$\text{Res}_0(f) = 0.$$

Le rayon de convergence est 1.

2) $z_0 = i$ est un pôle d'ordre 1,

$$\text{Res}_i(f) = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{e^{1/z^4}}{(z+i)\cos(z^2)} \right] = \frac{e}{2i\cos(1)}$$

Le rayon de convergence est 1.

3) $z_0 = -i$ est un pôle d'ordre 1,

$$\text{Res}_{-i}(f) = \lim_{z \rightarrow -i} \left[\frac{e^{1/z^4}}{(z-i)\cos(z^2)} \right] = \frac{-e}{2i\cos(1)}$$

Le rayon de convergence est 1.

4) $z_0 = \sqrt{\pi/2}$ est un pôle d'ordre 1,

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\sqrt{\pi/2}}(f) &= \lim_{z \rightarrow \sqrt{\pi/2}} \left[\frac{(z - \sqrt{\pi/2}) e^{1/z^4}}{(z^2 + 1) \cos(z^2)} \right] = \left[\frac{e^{\frac{4}{\pi^2}}}{\frac{\pi}{2} + 1} \right] \lim_{z \rightarrow \sqrt{\pi/2}} \left[\frac{(z - \sqrt{\pi/2})}{\cos(z^2)} \right] \\ &= \left[\frac{e^{\frac{4}{\pi^2}}}{\frac{\pi}{2} + 1} \right] \lim_{z \rightarrow \sqrt{\pi/2}} \left[\frac{1}{-2z \sin(z^2)} \right] = \frac{-e^{\frac{4}{\pi^2}}}{(\frac{\pi}{2} + 1) \sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Le rayon de convergence est $\sqrt{\pi/2}$.

5) $z_0 = -\sqrt{\pi/2}$ est un pôle d'ordre 1,

$$\begin{aligned} \text{Res}_{-\sqrt{\pi/2}}(f) &= \lim_{z \rightarrow -\sqrt{\pi/2}} \left[\frac{(z + \sqrt{\pi/2}) e^{1/z^4}}{(z^2 + 1) \cos(z^2)} \right] = \left[\frac{e^{\frac{4}{\pi^2}}}{\frac{\pi}{2} + 1} \right] \lim_{z \rightarrow -\sqrt{\pi/2}} \left[\frac{(z + \sqrt{\pi/2})}{\cos(z^2)} \right] \\ &= \left[\frac{e^{\frac{4}{\pi^2}}}{\frac{\pi}{2} + 1} \right] \lim_{z \rightarrow -\sqrt{\pi/2}} \left[\frac{1}{-2z \sin(z^2)} \right] = \frac{e^{\frac{4}{\pi^2}}}{\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Le rayon de convergence est $\sqrt{\pi/2}$. ♠

Chapitre 11

Théorème des résidus et applications

11.1 Le Théorème des résidus

Théorème 11.1 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et γ une courbe simple fermée et régulière par morceaux telle que $\gamma \cup \text{int } \gamma \subset \Omega$ (cf. Figure 11.1). Soient $z_1, \dots, z_N \in \text{int } \gamma$ ($z_j \neq z_k$, si $j \neq k$) et

$$f : \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_N\} \rightarrow \mathbb{C}$$

une fonction holomorphe, alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}_{z_k}(f)$$

où $\text{Res}_{z_k}(f)$ est le résidu de la fonction f au point z_k .

(Pour plus de détails, cf. [1] 150-151 et [5] 201-202).

Démonstration Comme $z_1, \dots, z_N \in \text{int } \gamma \subset \Omega$ et $\text{int } \gamma$ est ouvert on peut trouver $\epsilon > 0$ suffisamment petit, tel que

$$\overline{B_{\epsilon}(z_k)} \subset \text{int } \gamma \quad \text{et} \quad \overline{B_{\epsilon}(z_k)} \cap \overline{B_{\epsilon}(z_j)} = \emptyset, \quad j, k = 1, \dots, N, \quad j \neq k.$$

On applique alors le Théorème de Cauchy (cf. Théorème 9.14) à

$$O = (\text{int } \gamma) \setminus \bigcup_{k=1}^N \overline{B_{\epsilon}(z_k)}.$$

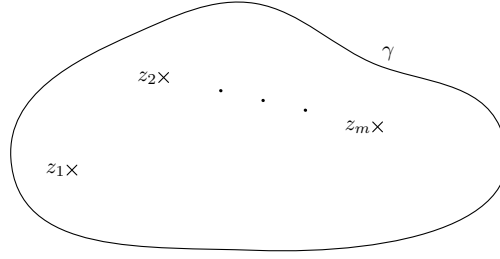


FIG. 11.1 –

On trouve, en notant $\gamma_k = \partial B_\epsilon(z_k)$, que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^N \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

Comme, par définition du résidu et grâce au Théorème de Laurent, on a

$$\text{Res}_{z_k}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(z) dz$$

on a immédiatement le théorème. ■

Remarque Soient Ω et γ comme dans le théorème précédent, alors aussi bien le Théorème de Cauchy que la formule intégrale de Cauchy sont une conséquence du Théorème des résidus.

1) Si f est holomorphe dans Ω , alors il n'y a aucune singularité et on déduit ainsi le Théorème de Cauchy, à savoir

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

2) Soient $z_0 \in \text{int } \gamma$ et f holomorphe dans Ω (on suppose par souci de simplicité que $f(z_0) \neq 0$). Alors considérons la fonction

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

qui a un pôle d'ordre $n + 1$ en z_0 . Par la Proposition 10.5, on déduit que

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z_0}(g) &= \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^n}{dz^n} \left[(z - z_0)^{n+1} g(z) \right] \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^n}{dz^n} [f(z)] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0). \end{aligned}$$

En appliquant le Théorème des résidus, on trouve

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

qui n'est rien d'autre que la formule intégrale de Cauchy. ♠

Exemple Soient Ω et γ comme dans le théorème précédent et

$$f(z) = \frac{2}{z} + \frac{3}{z-1} + \frac{1}{z^2}.$$

Calculer $\int_{\gamma} f(z) dz$.

Discussion On remarque tout d'abord que les singularités de f sont en $z = 0$ et $z = 1$. Il est facile de voir que $\text{Res}_0(f) = 2$ et $\text{Res}_1(f) = 3$. On va distinguer les cas suivants.

Cas 1 : $0, 1 \in \text{int } \gamma$.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i(2 + 3) = 10\pi i.$$

Cas 2 : $0 \in \text{int } \gamma$ et $1 \notin \overline{\text{int } \gamma}$. Dans ce cas

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 4\pi i.$$

Cas 3 : $1 \in \text{int } \gamma$ et $0 \notin \overline{\text{int } \gamma}$. On trouve

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 6\pi i.$$

Cas 4 : $0, 1 \notin \overline{\text{int } \gamma}$. On a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Cas 5 : $0 \in \gamma$ ou $1 \in \gamma$. Dans ce dernier cas l'intégrale n'est pas bien définie. ♠

11.2 Applications au calcul des intégrales réelles

Application 1. Calcul des intégrales de la forme

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta}$$

où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que

$$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

avec P et Q des polynômes et

$$Q(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0, \quad \forall \theta.$$

Discuter le cas $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos \theta}$.

(Pour plus de détails, cf. [1] 155 et [5] 203-205).

Démonstration On pose $z = e^{i\theta}$ et on a donc

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right).$$

Noter qu'on a aussi $d\theta = dz/iz$. Par conséquent, si γ dénote le cercle unité et si on pose

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{iz} f \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right);$$

dans le cas particulier

$$\tilde{f}(z) = \frac{2}{i(z^2 + 4z + 1)} = \frac{2}{i(z + 2 + \sqrt{3})(z + 2 - \sqrt{3})}.$$

on déduit du Théorème des résidus que

$$\int_{\gamma} \tilde{f}(z) dz = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}_{z_k}(\tilde{f}),$$

où z_k sont les singularités de \tilde{f} à l'intérieur du cercle unité γ (cf. Figure 11.2).

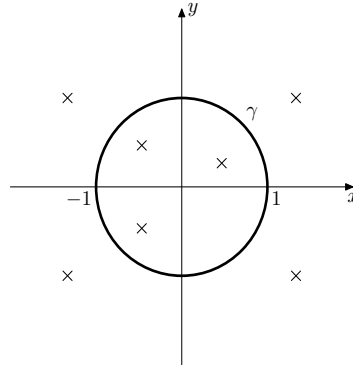


FIG. 11.2 –

Dans le cas particulier les singularités de $\tilde{f}(z)$ sont

$$z_1 = -(2 + \sqrt{3}), \quad z_2 = \sqrt{3} - 2,$$

mais seulement z_2 , qui est un pôle d'ordre 1, se trouve à l'intérieur du cercle unité. On obtient

$$\operatorname{Res}_{\sqrt{3}-2}(\tilde{f}) = \lim_{z \rightarrow \sqrt{3}-2} \frac{2(z+2-\sqrt{3})}{i(z+2+\sqrt{3})(z+2-\sqrt{3})} = \frac{1}{i\sqrt{3}}$$

et ainsi

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Ceci termine la démonstration. ■

Application 2. Calcul des intégrales de la forme

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i a x} dx}$$

avec $a \geq 0$ (le cas $a \leq 0$ est traité de la même façon)

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

où P et Q sont des polynômes tels que

$$Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \deg Q - \deg P \geq 2$$

(deg dénotant le degré d'un polynôme). En fait on peut considérer des R plus généraux, cf. la discussion ci-dessous. Sous ces hypothèses l'intégrale ci-dessus existe et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i a x} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}_{z_k}(f),$$

où z_k sont les singularités de $f(z) = R(z) e^{i a z}$ appartenant au demi-plan supérieur (i.e. $\operatorname{Im} z > 0$). Discuter le cas particulier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16+x^4} \cos(ax) dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16+x^4} \sin(ax) dx.$$

(Pour plus de détails, cf. [1] 156 and [5] 208-212).

Remarque Le résultat ci-dessus s'applique au calcul des transformées de Fourier, lorsque R est donné sous forme de quotient de polynômes, satisfaisant aux conditions ci-dessus. On trouve

$$\widehat{R}(-a) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{2\pi i a x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z_k}(R(z) e^{2\pi i a z}). \quad \spadesuit$$

Démonstration On divise la discussion en trois étapes (les deux premières s'appliquent au cas général alors que la troisième s'applique à l'exemple). On pose

$$f(z) = R(z) e^{i a z}.$$

Etape 1. Soient $r > 0$ et (cf. Figure 11.3)

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r \text{ et } \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

$$L_r = \{z \in \mathbb{C} : -r < \operatorname{Re} z < r \text{ et } \operatorname{Im} z = 0\}$$

$$\Gamma_r = C_r \cup L_r.$$

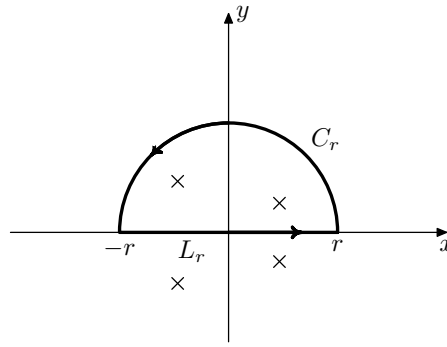


FIG. 11.3 –

On choisit r suffisamment grand pour que toutes les singularités de R situées dans le demi plan supérieur soient dans l'intérieur de Γ_r (noter que, comme $Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, la fonction R n'a aucune singularité sur l'axe réel).

Le Théorème des résidus s'applique et on trouve

$$\int_{\Gamma_r} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z_k}(f), \quad (11.1)$$

où z_k sont les singularités de $f(z) = R(z) e^{i a z}$ à l'intérieur de Γ_r . Par ailleurs les hypothèses ci-dessus impliquent (cf. Etape 2) que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} R(z) e^{i a z} dz = 0. \quad (11.2)$$

Comme, à partir d'un $r > 0$ suffisamment grand, le membre de droite de (11.1) est indépendant de r et que (11.2) a lieu, alors

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z_k}(f) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{L_r} f(z) dz \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r R(x) e^{i a x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{i a x} dx, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat souhaité.

Etape 2. On va maintenant montrer (11.2).

1) Supposons, cf. plus bas, que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \sup_{\theta \in [0, \pi]} \{ |R(re^{i\theta})| \} \right] = 0 \quad (11.3)$$

alors comme

$$\int_{C_r} R(z) e^{iaz} dz = \int_0^\pi R(re^{i\theta}) e^{iar e^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} R(z) e^{iaz} dz \right| &\leq \int_0^\pi |R(re^{i\theta})| |e^{iar e^{i\theta}}| |i r e^{i\theta}| d\theta \\ &\leq r \sup_{\theta \in [0, \pi]} \{ |R(re^{i\theta})| \} \int_0^\pi e^{-ar \sin \theta} d\theta \end{aligned}$$

Comme $a \geq 0$ et $\theta \in [0, \pi]$, on a que $e^{-ar \sin \theta} \leq 1$ et on obtient donc de (11.3) que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} R(z) e^{iaz} dz = 0$$

2) Il reste donc à montrer que (11.3) a lieu. Ecrivons donc

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 \quad \text{avec } a_n \neq 0 \\ Q(z) &= b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0 \quad \text{avec } b_m \neq 0 \end{aligned}$$

et on sait, par hypothèse que $m - n \geq 2$. On a ainsi que

$$\begin{aligned} |P(z)| &\leq |a_n| |z|^n + \cdots + |a_1| |z| + |a_0| \\ &\leq [|a_n| + \cdots + |a_0|] |z|^n = \alpha |z|^n \quad \text{si } |z| \geq 1. \end{aligned}$$

De même pour $r > 0$ suffisamment grand on a

$$\begin{aligned} |Q(z)| &\geq |b_m| |z|^m - [|b_{m-1}| |z|^{m-1} + \cdots + |b_1| |z| + |b_0|] \\ &\geq \frac{|b_m| |z|^m}{2} = \beta |z|^m \quad \text{si } |z| \geq r. \end{aligned}$$

En combinant les deux estimations on a que

$$|R(z)| = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{\alpha |z|^n}{\beta |z|^m} = \frac{\alpha}{\beta |z|^{m-n}}$$

et donc

$$r |R(re^{i\theta})| \leq \frac{\alpha}{\beta r^{m-n-1}} \rightarrow 0, \quad \text{car } m - n - 1 \geq 1.$$

On a donc bien obtenu (11.3).

Etape 3. Si on revient à l'exemple, on notera que les hypothèses ci-dessus sont satisfaites. On va chercher maintenant les zéros (complexes) de Q . On trouve

$$16 + z^4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^4 = 16 e^{i(\pi+2n\pi)} \quad \Leftrightarrow \quad z = 2 e^{i(2n+1)\frac{\pi}{4}}, \quad n = 0, 1, 2, 3,$$

i.e.

$$z_1 = 2 e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \quad z_2 = 2 e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_3 = 2 e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \quad z_4 = 2 e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Noter que

$$e^{i a z_1} = e^{i a (\sqrt{2} + i\sqrt{2})} = e^{-a\sqrt{2}} \left(\cos(a\sqrt{2}) + i \sin(a\sqrt{2}) \right)$$

$$e^{i a z_2} = e^{i a (-\sqrt{2} + i\sqrt{2})} = e^{-a\sqrt{2}} \left(\cos(a\sqrt{2}) - i \sin(a\sqrt{2}) \right)$$

Ce sont des pôles simples de

$$f(z) = R(z) e^{i a z} = \frac{z^2}{16 + z^4} e^{i a z}.$$

Seuls z_1 et z_2 appartiennent au demi-plan supérieur, par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16 + x^4} e^{i a x} dx = 2\pi i (\text{Res}_{z_1}(f) + \text{Res}_{z_2}(f)).$$

On va maintenant calculer les deux résidus, à l'aide de la Proposition 10.6, on a

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z_1}(f) &= \frac{z_1^2}{4 z_1^3} e^{i a z_1} = \frac{e^{i a z_1}}{4 z_1} = \frac{e^{i a z_1}}{4(1+i)\sqrt{2}} = \frac{(1+i)e^{i a z_1}}{8i\sqrt{2}} \\ &= \frac{(1+i)}{8i\sqrt{2}} e^{-a\sqrt{2}} \left(\cos(a\sqrt{2}) + i \sin(a\sqrt{2}) \right) \\ \text{Res}_{z_2}(f) &= \frac{z_2^2}{4 z_2^3} e^{i a z_2} = \frac{e^{i a z_2}}{4 z_2} = \frac{e^{i a z_2}}{4(-1+i)\sqrt{2}} = \frac{(1-i)e^{i a z_2}}{8i\sqrt{2}} \\ &= \frac{(1-i)}{8i\sqrt{2}} e^{-a\sqrt{2}} \left(\cos(a\sqrt{2}) - i \sin(a\sqrt{2}) \right) \end{aligned}$$

et donc

$$\text{Res}_{z_1}(f) + \text{Res}_{z_2}(f) = \frac{2}{8i\sqrt{2}} e^{-a\sqrt{2}} \cos(a\sqrt{2}) - \frac{2}{8i\sqrt{2}} e^{-a\sqrt{2}} \sin(a\sqrt{2}).$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16 + x^4} e^{i a x} dx &= 2\pi i (\text{Res}_{z_1}(R) + \text{Res}_{z_2}(R)) \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{4} e^{-a\sqrt{2}} \left(\cos(a\sqrt{2}) - \sin(a\sqrt{2}) \right). \end{aligned}$$

On note que le membre de droite est réel. ■

11.3 Exercices

De nombreux autres exercices concernant ce chapitre, notamment Exercices 2, 3, 9 et 13 se trouvent au Chapitre 12 de [9].

Exercice 11.1 (Principe de l'argument) Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et f une fonction holomorphe sur Ω et non-constante.

(i) Soit $z_0 \in \Omega$ un zéro d'ordre (multiplicité) $k \geq 1$ de f . Calculer le résidu de la fonction f'/f en z_0 .

(ii) Soit γ une courbe simple fermée régulière par morceaux telle que $\gamma \cup \text{int } \gamma \subset \Omega$ et f ne s'annule pas sur γ . À l'aide de la première question montrer que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} = N$$

où

N = nombre de zéros (comptés avec multiplicité) de f à l'intérieur de γ .

Remarque. Ce résultat peut se généraliser à des fonctions f méromorphes. Dans ce cas, la formule devient

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} = N - P$$

où

P = nombre de pôles (comptés avec multiplicité) de f à l'intérieur de γ . ♠

Exercice 11.2 (Théorème de Rouché) Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et f, g des fonctions holomorphes sur Ω . Soit γ une courbe simple, fermée, régulière par morceaux telle que $\gamma \cup \text{int } \gamma \subset \Omega$. Montrer que si

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad \forall z \in \gamma$$

alors f et $f + g$ ont le même nombre de zéros dans $\text{int } \gamma$.

Indication. Posant $f_t(z) = f(z) + t g(z)$, pour $t \in [0, 1]$, et n_t le nombre de zéros de f_t dans $\text{int } \gamma$, montrer, à l'aide de l'Exercice 11.1, que n_t est une fonction continue en t et conclure.

Exercice 11.3 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et injective. Montrer qu'alors

$$f'(z) \neq 0, \quad \forall z \in \Omega.$$

Suggestion. Raisonner par contradiction et utiliser le Théorème de Rouché (cf. Exercice 11.2).

Exercice 11.4 Démontrer le Théorème fondamental de l'algèbre à l'aide du Théorème de Rouché.

Exercice 11.5 Montrer, à l'aide du Théorème de Rouché, que le polynôme

$$p(z) = z^6 + 4z + 2$$

a une et une seule racine dans le disque unité.

Exercice 11.6 Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions telles que

- $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe pour tout n ,
- $f_n \rightarrow f$ uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$ quand $n \rightarrow \infty$,
- $f_n(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$.

Montrer qu'alors

$$\text{soit } [f(z) = 0, \forall z \in \Omega] \quad \text{soit } [f(z) \neq 0, \forall z \in \Omega].$$

On pourra procéder par contradiction et invoquer le principe de l'argument (cf. Exercice 11.1).

Exercice 11.7 Soit $0 < a < 1$. Calculer, à l'aide du Théorème des résidus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx.$$

Exercice 11.8 Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right)^2 d\theta.$$

Exercice 11.9 Soient $\lambda > 0$, $r \geq 4$

$$f(z) = \frac{e^{\lambda z}}{(z+1)(z+2)^2}$$

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r \text{ et } \operatorname{Re} z < 0\}$$

$$L_r = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0 \text{ et } -r < \operatorname{Im} z < r\}$$

$$\Gamma_r = C_r \cup L_r.$$

(i) Calculer

$$\int_{\Gamma_r} f(z) dz.$$

(ii) Montrer que si $z \in C_r$, alors

$$|z+1|, |z+2| \geq \frac{r}{2} \quad \text{et} \quad |e^{\lambda z}| \leq 1.$$

(iii) *Etablir que*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} f(z) dz = 0.$$

(iv) *Calculer*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(is) ds.$$

Exercice 11.10 *Calculer, pour $n \geq 1$ un entier,*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} d\theta.$$

Exercice 11.11 *Soit $s \in \mathbb{N}$ la fonction*

$$f(z) = \frac{1}{z^{2s+1} \sin z}.$$

(i) *Trouver toutes les singularités de f et en donner leur nature.*

(ii) *Montrer que le résidu de f en $z = 0$ est nul.*

(iii) *Calculer le résidu de f en toutes les autres singularités.*

(iv) *Calculer, en fonction de $n \in \mathbb{N}$,*

$$\int_{\Gamma_n} f(z) dz$$

où

$$\Gamma_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \right\}.$$

Exercice 11.12 *Calculer*

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \cos(2\theta)}.$$

Exercice 11.13 *Calculer*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 2} e^{-2ix} dx.$$

Exercice 11.14 *Soient*

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{z^2 - 4z + 3}.$$

En posant $g(r, \theta) = f(re^{i\theta})re^{i\theta}$, calculer (en justifiant votre réponse)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(r, \theta) d\theta \right], \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} g(r, \theta) d\theta \right],$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} g(r, \theta) d\theta \right] \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} g(r, \theta) d\theta + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} g(r, \theta) d\theta \right].$$

Exercice 11.15 Soient $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z_i \neq z_j$ pour tout $i \neq j$, holomorphe, $a, R > 0$, $k > 1$ tels que

$$|f(z)| \leq \frac{a}{|z|^k} \quad \text{pour tout } |z| > R.$$

Montrer, en utilisant le Théorème des résidus, que

$$\sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{z_j}(f) = 0.$$

11.4 Corrigés

Exercice 11.1 (i) Puisque f est holomorphe et non-constante, il existe $r > 0$ suffisamment petit tel que $f \neq 0$ dans $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. En effet, si ce n'était pas le cas, f serait nulle sur une suite de points convergeant vers z_0 , et donc, par le principe du prolongement analytique, f serait identiquement nulle dans Ω . Comme z_0 est un zéro d'ordre k de f , on peut alors écrire

$$f(z) = (z - z_0)^k F(z), \quad \forall z \in B_r(z_0)$$

où F est une fonction holomorphe telle que $F \neq 0$ dans $B_r(z_0)$. En dérivant, nous obtenons

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} F(z) + (z - z_0)^k F'(z), \quad \forall z \in B_r(z_0)$$

et donc

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{(z - z_0)} + \frac{F'(z)}{F(z)}, \quad \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$$

ce qui nous donne immédiatement

$$\operatorname{Res}_{z_0}(f'/f) = k.$$

(ii) Soient $z_1, \dots, z_m \in \operatorname{int} \gamma$ les zéros de f d'ordre $k_1, \dots, k_m \geq 1$ respectivement. Le nombre m de zéros est fini, car sinon, par le Théorème du prolongement analytique, f serait identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas, puisque f n'est pas constante. Comme f est holomorphe dans $\operatorname{int} \gamma$, alors z_1, \dots, z_m sont les seuls pôles de f'/f . Donc, par le Théorème des résidus et le point précédent, nous avons directement

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'}{f} = \operatorname{Res}_{z_1}(f'/f) + \dots + \operatorname{Res}_{z_m}(f'/f) = k_1 + \dots + k_m,$$

d'où le résultat. ♠

Exercice 11.2 Soit

$$f_t(z) = f(z) + t g(z), \quad \forall t \in [0, 1]$$

et soit $n_t \in \mathbb{N}$ le nombre de zéros de f_t , comptés avec multiplicité, dans $\text{int } \gamma$. Nous allons montrer que $n_0 = n_1$ pour conclure. Puisque $|f(z)| > |g(z)|$ sur γ , alors f_t ne s'annule pas sur γ . En effet, si c'était le cas, on aurait

$$t|g(z)| = |f(z)| > |g(z)|$$

pour un certain $z \in \gamma$ et $t \in [0, 1]$, ce qui est absurde. Ceci nous permet d'appliquer l'Exercice 11.1 et d'obtenir

$$n_t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'_t(z)}{f_t(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) + t g'(z)}{f(z) + t g(z)} dz.$$

Comme f et g sont holomorphes, l'application

$$(t, z) \rightarrow \frac{f'(z) + t g'(z)}{f(z) + t g(z)}$$

est uniformément continue dans $[0, 1] \times \gamma$, ce qui implique que

$$t \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) + t g'(z)}{f(z) + t g(z)} dz = n_t$$

est continue dans $[0, 1]$. Puisque $n_t \in \mathbb{N}$, cela n'est possible que si n_t est constante et ainsi

$$n_0 = n_1. \quad \spadesuit$$

Exercice 11.3 (i) Supposons par contradiction qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f'(z_0) = 0$. Par conséquent, comme $f \not\equiv 0$, il existe $k \geq 2$ tel que

$$f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Appelons $\lambda = f^{(k)}(z_0)/k!$, on a alors, pour $|z - z_0|$ suffisamment petit,

$$f(z) - f(z_0) = \lambda(z - z_0)^k + F(z) \quad \text{où} \quad F(z) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j.$$

(ii) On choisit $r > 0$ suffisamment petit tel que

$$\overline{B_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\} \subset \Omega$$

$$f'(z) \neq 0, \quad \forall z \in \overline{B_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$$

$$|F(z)| < \frac{|\lambda| r^k}{2}, \quad \forall z \in \overline{B_r(z_0)}.$$

(iii) Puis on prend $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| < |\lambda| r^k/2$ et on pose

$$\Lambda_w(z) = \lambda(z - z_0)^k - w$$

de telle façon que

$$f(z) - f(z_0) - w = \Lambda_w(z) + F(z).$$

On a clairement que

$$|F(z)| < \frac{|\lambda| r^k}{2} < |\lambda| r^k - |w| \leq |\Lambda_w(z)|, \quad \forall z \in \gamma = \partial B_r(z_0).$$

On peut donc appliquer le Théorème de Rouché (cf. Exercice 11.2) et on trouve que Λ_w et $\Lambda_w + F$ ont le même nombre de zéros dans $B_r(z_0)$.

(iv) Mais Λ_w a $k \geq 2$ zéros dans $B_r(z_0)$ car

$$\Lambda_w(z) = 0 \Rightarrow |z - z_0|^k = \frac{|w|}{|\lambda|} < \frac{r^k}{2} \Rightarrow |z - z_0| < \frac{r}{2^{1/k}} < r$$

et donc $f(z) - f(z_0) - w$ a aussi k zéros dans $B_r(z_0)$. Or, par hypothèse, $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in \overline{B_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$ et donc les zéros de $f(z) - f(z_0) - w$ sont simples. On a bien la contradiction souhaitée, à savoir que f n'est pas injective dans Ω . ♠

Exercice 11.4 Soit

$$f(z) = z^n \quad \text{et} \quad g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$$

et

$$P(z) = f(z) + g(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0.$$

Soit $R > 0$ suffisamment grand pour que

$$|f(z)| = |z|^n = R^n > |a_{n-1}|R^{n-1} + \cdots + |a_0| \geq |g(z)|, \quad \forall |z| = R.$$

Par l'Exercice 11.2, f et $P = f + g$ ont donc le même nombre de zéros dans $\{|z| < R\}$. Or f possède un zéro d'ordre n , donc P possède n zéros, comptés avec leur multiplicité, ce qui est exactement le Théorème fondamental de l'algèbre. ♠

Exercice 11.5 Soit $g(z) = z^6$ et $f(z) = 4z + 2$. Soit γ le cercle unité. Comme, $\forall z \in \gamma$,

$$|g(z)| = |z|^6 = 1 < 2 = 4|z| - 2 \leq |4z + 2| = |f(z)|$$

on a que f et $p = f + g$ ont exactement le même nombre de zéros dans $\text{int } \gamma$, qui est le disque unité. Mais f n'a évidemment qu'une seule racine qui est $-(1/2) \in \text{int } \gamma$. D'où le résultat. ♠

Exercice 11.6 Par l'absurde on suppose que $f \not\equiv 0$, mais qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) = 0$.

(i) Par le théorème de Weierstrass (cf. Théorème 9.25), on a que f est holomorphe dans Ω et que $f'_n \rightarrow f'$ uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$ quand $n \rightarrow \infty$

(ii) Par le principe du prolongement analytique (cf. Théorème 9.20), il existe $\epsilon > 0$ tel que $\overline{B_\epsilon(z_0)} \subset \Omega$ et f ne s'annule pas dans $\overline{B_\epsilon(z_0)} \setminus \{z_0\}$.

(iii) Soit alors γ une courbe simple fermée et régulière telle que $\gamma \cup \text{int } \gamma \subset B_\epsilon(z_0)$. Par le principe de l'argument (cf. Exercice 11.1)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'_n}{f_n} = 0 \quad \text{mais} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} \geq 1.$$

Comme $f_n \rightarrow f$ et $f'_n \rightarrow f'$ uniformément, on devrait donc avoir que

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'_n}{f_n} \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} \geq 1$$

ce qui est la contradiction souhaitée. ♠

Exercice 11.7 Avec le changement de variables $t = e^x$, il est facile de voir que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t} dt.$$

On va donc calculer seulement la première intégrale.

- Soit

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}.$$

Alors f est holomorphe dans \mathbb{C} sauf aux points $z_k = (2k+1)i\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ceux-ci sont des pôles d'ordre 1, car, par la règle de l'Hôpital,

$$\lim_{z \rightarrow z_k} [f(z)(z - z_k)] = \lim_{z \rightarrow z_k} \left[\frac{e^{az}(z - z_k)}{1 + e^z} \right] = -e^{az_k}.$$

Soit $R > 0$ et le rectangle

$$\gamma = [R, R+2\pi i] \cup [R+2\pi i, -R+2\pi i] \cup [-R+2\pi i, -R] \cup [-R, R]$$

La seule singularité de f à l'intérieur de γ est $z_0 = i\pi$. On obtient donc

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{\pi i}(f) = -2\pi i e^{a\pi i}.$$

- Combinons d'abord les deux intégrales

$$\begin{aligned} \int_{[-R, R]} f + \int_{[R+2\pi i, -R+2\pi i]} f &= \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx + \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx \\ &= (1 - e^{2a\pi i}) \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \end{aligned}$$

ce qui nous donne la quantité que nous voulons calculer.

- Montrons que les deux autres intégrales tendent vers 0 quand $R \rightarrow \infty$.

Posant

$$I_1 = i \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} dy \quad \text{et} \quad I_2 = -i \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-R+iy)}}{1+e^{-R+iy}} dy$$

nous avons d'une part

$$|I_1| \leq 2\pi \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \rightarrow 0 \quad \text{quand } R \rightarrow \infty$$

car $a < 1$ et

$$|I_2| \leq 2\pi \frac{e^{-aR}}{1 - e^{-R}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } R \rightarrow \infty$$

car $a > 0$.

- Combinant ce qui précède, nous avons finalement

$$(1 - e^{2a\pi i}) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = -2\pi i e^{a\pi i}$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{-2\pi i e^{a\pi i}}{1 - e^{2a\pi i}} = \frac{2\pi i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}. \quad \spadesuit$$

Exercice 11.8 (i) Commençons par remarquer que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k \right)^2 \right] = n!$$

car le terme en z^{n-1} est $n z^{n-1}$.

(ii) On observe ensuite que

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)^2 = \left(\frac{\frac{e^{i\frac{n\theta}{2}} - e^{-i\frac{n\theta}{2}}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}} \right)^2 = \left(\frac{(e^{in\theta} - 1)e^{-i\frac{n\theta}{2}}}{(e^{i\theta} - 1)e^{-i\frac{\theta}{2}}} \right)^2$$

et donc

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)^2 = \frac{1}{e^{i(n-1)\theta}} \left(\frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \right)^2.$$

Posons $z = e^{i\theta}$, on peut donc écrire

$$\left(\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right)^2 = \frac{1}{z^{n-1}} \left(\frac{z^n - 1}{z - 1} \right)^2 = \frac{\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k \right)^2}{z^{n-1}}.$$

(iii) Si on définit

$$\tilde{f}(z) = \frac{\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k \right)^2}{i z^n} = \frac{1}{i z^n} \left(\frac{z^n - 1}{z - 1} \right)^2$$

on trouve que 0 est un pôle d'ordre n et donc (par la Proposition 10.5 et par (i)) on obtient

$$\operatorname{Res}_0(\tilde{f}) = \frac{1}{i(n-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k \right)^2 \right] = \frac{n}{i}.$$

On a donc que (γ est le cercle unité)

$$\int_{\gamma} \tilde{f}(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0(\tilde{f}) = 2n\pi.$$

(iv) Comme, par (ii),

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) = \frac{1}{ie^{i\theta}} \left(\frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right)^2$$

on déduit de (iii) que

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \tilde{f}(e^{i\theta}) ie^{i\theta} d\theta = \int_{\gamma} \tilde{f}(z) dz = 2n\pi. \quad \spadesuit$$

Exercice 11.9 (i) Par le Théorème des résidus

$$\int_{\Gamma_r} f(z) dz = 2\pi i [\operatorname{Res}_{-1}(f) + \operatorname{Res}_{-2}(f)].$$

Or $z = -1$ est un pôle d'ordre 1 et $z = -2$ est un pôle d'ordre 2, on trouve

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{-1}(f) &= \lim_{z \rightarrow -1} [(z+1)f(z)] = \lim_{z \rightarrow -1} \left[\frac{e^{z\lambda}}{(z+2)^2} \right] = e^{-\lambda} \\ \operatorname{Res}_{-2}(f) &= \lim_{z \rightarrow -2} \left\{ \frac{d}{dz} \left[(z+2)^2 f(z) \right] \right\} = \lim_{z \rightarrow -2} \left\{ \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{z\lambda}}{(z+1)} \right] \right\} \\ &= \lim_{z \rightarrow -2} \left[\frac{\lambda e^{z\lambda}(z+1) - e^{z\lambda}}{(z+1)^2} \right] = -\lambda e^{-2\lambda} - e^{-2\lambda}. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\int_{\Gamma_r} f(z) dz = 2\pi i [e^{-\lambda} - \lambda e^{-2\lambda} - e^{-2\lambda}].$$

(ii) Si $z \in C_r$, on a $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$. On a trivialement par l'inégalité du triangle (comme $r \geq 4$)

$$|z+1| \geq r-1 \geq \frac{r}{2} \quad \text{et} \quad |z+2| \geq r-2 \geq \frac{r}{2}.$$

De plus

$$|e^{\lambda z}| = |e^{\lambda r \cos \theta + i \lambda r \sin \theta}| = e^{\lambda r \cos \theta} \leq 1$$

car $\lambda, r > 0$ et $\cos \theta \leq 0$.

(iii) On a

$$\int_{C_r} f(z) dz = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{\lambda r e^{i\theta}}}{(r e^{i\theta} + 1)(r e^{i\theta} + 2)^2} i r e^{i\theta} d\theta$$

et donc, par la question précédente,

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leq \frac{r}{\frac{r}{2} \left(\frac{r}{2}\right)^2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\theta.$$

Le résultat suit alors immédiatement.

(iv) On a alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(is) ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{L_r} f(z) dz = e^{-\lambda} - \lambda e^{-2\lambda} - e^{-2\lambda}. \spadesuit$$

Exercice 11.10 On pose $z = e^{i\theta}$ et on a

$$\sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}$$

et ainsi

$$\frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = \frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}} = \frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1} \frac{1}{z^{n-1}}.$$

On écrit alors

$$f(z) = \frac{z^{2n} - 1}{z^2 - 1} \frac{1}{i z^n} = \frac{1}{i z^n} (1 + z^2 + \dots + z^{2n-2})$$

et on remarque que si γ est le cercle unité centré en 0, alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} d\theta = \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0(f).$$

Par ailleurs on voit immédiatement que

$$\operatorname{Res}_0(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1/i & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2\pi & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \spadesuit$$

Exercice 11.11 (i) Les singularités de f sont en $z = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Ce sont des pôles d'ordre 1 si $k \neq 0$ et $(2s+2)$ si $k = 0$.

(ii) Comme f est une fonction paire on a tout de suite

$$\operatorname{Res}_0(f) = 0.$$

(iii) Pour toutes les autres singularités qui sont des pôles d'ordre 1 on a

$$\operatorname{Res}_{k\pi}(f) = \lim_{z \rightarrow k\pi} \left[\frac{z - k\pi}{z^{2s+1} \sin z} \right] = \frac{1}{(k\pi)^{2s+1} \cos(k\pi)} = \frac{(-1)^k}{(k\pi)^{2s+1}}.$$

(iv) A l'intérieur de Γ_n les singularités sont en $z = k\pi$ avec $|k| \leq n$ et donc

$$\int_{\Gamma_n} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \frac{(-1)^k}{(k\pi)^{2s+1}} = \frac{2i}{\pi^{2s}} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^{2s+1}} + \frac{2i}{\pi^{2s}} \sum_{k=-n}^{-1} \frac{(-1)^k}{k^{2s+1}} = 0. \spadesuit$$

Exercice 11.12 On pose $z = e^{i\theta}$ et on a donc

$$\cos(2\theta) = \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) = \frac{z^4 + 1}{2z^2}.$$

Soit γ le cercle unité et on pose

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= -\frac{z}{i} \frac{2}{z^4 - 4z^2 + 1} \\ &= -\frac{z}{i} \frac{2}{(z^2 - (2 + \sqrt{3}))(z^2 - (2 - \sqrt{3}))}. \end{aligned}$$

On déduit du Théorème des résidus que

$$\int_{\gamma} \tilde{f}(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \cos(2\theta)} = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z_k}(\tilde{f}),$$

où z_k sont les singularités de \tilde{f} à l'intérieur du cercle unité γ , à savoir

$$z_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

qui sont des pôles d'ordre 1. On obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_1}(\tilde{f}) &= -\lim_{z \rightarrow z_1} \left[\frac{2z}{i(z^2 - (2 + \sqrt{3}))(z + z_1)} \right] = \frac{1}{2i\sqrt{3}} \\ \operatorname{Res}_{z_2}(\tilde{f}) &= -\lim_{z \rightarrow z_2} \left[\frac{2z}{i(z^2 - (2 + \sqrt{3}))(z + z_2)} \right] = \frac{1}{2i\sqrt{3}} \end{aligned}$$

et ainsi

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \cos(2\theta)} = 2\pi i \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \spadesuit$$

Exercice 11.13 *Etape 1.* On pose

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + 2z + 2} e^{-2iz} = \frac{e^{-iz} + e^{-3iz}}{2(z^2 + 2z + 2)}.$$

Les seules singularités de f (qui sont des pôles d'ordre 1) sont

$$z_1 = -1 + i \quad \text{et} \quad z_2 = -1 - i.$$

On aura besoin plus bas de

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_2}(f) &= \lim_{z \rightarrow z_2} [(z - z_2) f(z)] = \frac{e^{-iz_2} + e^{-3iz_2}}{2(z_2 - z_1)} = \frac{e^{i-1} + e^{3i-3}}{-4i} \\ &= \frac{e^{-1}(\cos 1 + i \sin 1) + e^{-3}(\cos 3 + i \sin 3)}{-4i} \\ &= \frac{-e^{-1} \sin 1 - e^{-3} \sin 3}{4} + i \frac{e^{-1} \cos 1 + e^{-3} \cos 3}{4}. \end{aligned}$$

Etape 2. Soient $r > 0$ et

$$C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r \text{ et } \operatorname{Im} z \leq 0\}$$

$$L_r = \{z \in \mathbb{C} : -r < \operatorname{Re} z < r \text{ et } \operatorname{Im} z = 0\}$$

$$\Gamma_r = C_r \cup L_r.$$

On choisit r suffisamment grand ($r \geq 2$, par exemple) pour que $z_2 \in \operatorname{int} \Gamma_r$. Le Théorème des résidus s'applique et on trouve

$$\int_{\Gamma_r} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_2}(f). \quad (11.4)$$

Par ailleurs les hypothèses ci-dessus impliquent (cf. Etape 2) que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} f(z) dz = 0. \quad (11.5)$$

Comme, à partir d'un $r > 0$ suffisamment grand, le membre de droite de (11.4) est indépendant de r et que (11.5) a lieu, alors

$$2\pi i \operatorname{Res}_{z_2}(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{L_r} f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

En conclusion

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 2} e^{-2ix} dx = 2\pi i \frac{-e^{-1} \sin 1 - e^{-3} \sin 3}{4} - 2\pi \frac{e^{-1} \cos 1 + e^{-3} \cos 3}{4}$$

c'est à dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \cos(2x)}{x^2 + 2x + 2} dx = -\pi \frac{e^{-1} \cos 1 + e^{-3} \cos 3}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \sin(2x)}{x^2 + 2x + 2} dx = \pi \frac{e^{-1} \sin 1 + e^{-3} \sin 3}{2}.$$

Etape 3. On va maintenant montrer (11.5).

1) Supposons, cf. plus bas, que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \sup_{\theta \in [\pi, 2\pi]} \{|f(re^{i\theta})|\} \right] = 0 \quad (11.6)$$

alors comme

$$\int_{C_r} f(z) dz = \int_{\pi}^{2\pi} f(re^{i\theta}) i r e^{i\theta} d\theta$$

on déduit que

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| \leq \int_{\pi}^{2\pi} |f(re^{i\theta})| |i r e^{i\theta}| d\theta \leq \pi r \sup_{\theta \in [\pi, 2\pi]} \{|f(re^{i\theta})|\}$$

et on obtient donc de (11.6) que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{C_r} f(z) dz = 0.$$

2) Il reste donc à montrer que (11.6) a lieu. On a ainsi, en se rappelant que, pour $\theta \in [\pi, 2\pi]$, $\sin \theta \leq 0$, que

$$\left| e^{-i r e^{i\theta}} + e^{-3 i r e^{i\theta}} \right| \leq \left| e^{-i r e^{i\theta}} \right| + \left| e^{-3 i r e^{i\theta}} \right| = e^{r \sin \theta} + e^{3 r \sin \theta} \leq 2.$$

Par ailleurs on a, pour $|z| \geq r$ suffisamment grand,

$$|2(z^2 + 2z + 2)| \geq 2|z|^2 - 4|z| - 4 \geq |z|^2 \geq r^2.$$

En combinant les deux estimations on obtient que

$$|f(re^{i\theta})| = \left| \frac{e^{-i r e^{i\theta}} + e^{-3 i r e^{i\theta}}}{2(r e^{2i\theta} + 2r e^{i\theta} + 2)} \right| \leq \frac{2}{r^2} \Rightarrow r |f(re^{i\theta})| \leq \frac{2}{r}$$

ce qui implique (11.6). ♠

Exercice 11.14 (i) Les singularités de f sont en $z = 1, 3$ qui sont des pôles d'ordre 1. Les résidus sont donnés par

$$\begin{aligned} \text{Res}_1(f) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)f(z)] = -\frac{e^{-1}}{2} \\ \text{Res}_3(f) &= \lim_{z \rightarrow 3} [(z-3)f(z)] = \frac{e^{-9}}{2}. \end{aligned}$$

Soit $r > 3$ et $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$. On a donc, par le Théorème des résidus, que

$$\int_{C_r} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}_1(f) + \text{Res}_3(f)) = \pi i (e^{-9} - e^{-1}).$$

Comme le membre de droite ne dépend pas de r (dès que $r > 3$) on trouve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{C_r} f(z) dz \right] = \pi i (e^{-9} - e^{-1}).$$

(ii) Commençons par observer que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \sup_{\theta} \left\{ |f(re^{i\theta})| : \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right] \right\} \right] = 0. \quad (11.7)$$

En effet, pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$, $\cos(2\theta) \geq 0$, et pour $z = re^{i\theta}$ on a que

$$|e^{-z^2}| = |e^{-r^2 e^{2i\theta}}| = e^{-r^2 \cos(2\theta)} \leq 1.$$

Par ailleurs on a, pour $|z| \geq r$ suffisamment grand,

$$|z^2 - 4z + 3| \geq |z|^2 - 4|z| - 3 \geq \frac{|z|^2}{2} \geq \frac{r^2}{2}.$$

En combinant les deux estimations on obtient que

$$|rf(re^{i\theta})| = r \left| \frac{e^{-r^2 e^{2i\theta}}}{r^2 e^{2i\theta} - 4re^{i\theta} + 3} \right| \leq \frac{2}{r}$$

ce qui implique (11.7).

(iii) Le calcul précédent implique que, pour r suffisamment grand,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(re^{i\theta}) i r e^{i\theta} d\theta \right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} |rf(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{\pi}{2r} \\ \left| \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} f(re^{i\theta}) i r e^{i\theta} d\theta \right| &\leq \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |rf(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{\pi}{r} \\ \left| \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} f(re^{i\theta}) i r e^{i\theta} d\theta \right| &\leq \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} |rf(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{\pi}{2r} \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(re^{i\theta}) r e^{i\theta} d\theta \right] = 0$$

et

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} f(re^{i\theta}) r e^{i\theta} d\theta \right] = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} f(re^{i\theta}) r e^{i\theta} d\theta \right] = 0.$$

(iv) Pour $r > 3$ on a par (i) que

$$\begin{aligned} \pi i (e^{-9} - e^{-1}) &= \int_{C_r} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) i r e^{i\theta} d\theta \\ &= \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + \int_{\frac{7\pi}{4}}^{2\pi} \right] + \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \right]. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que le membre de gauche est indépendant de r et en invoquant (iii) on déduit que, en posant $g(r, \theta) = f(re^{i\theta})re^{i\theta}$,

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} g(r, \theta) d\theta + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} g(r, \theta) d\theta \right] \\ &= \frac{1}{i} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} i g(r, \theta) d\theta + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} i g(r, \theta) d\theta \right] = \pi (e^{-9} - e^{-1}). \quad \spadesuit \end{aligned}$$

Exercice 11.15 Soit C_r le cercle centré en 0 et de rayon r suffisamment grand pour que $z_1, \dots, z_n \in \text{int } C_r$ et $r > R$. On trouve alors que

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) i r e^{i\theta} d\theta \right| \leq 2\pi \sup_{|w|=r} \{r |f(w)|\} \leq \frac{2\pi a}{r^{k-1}}$$

et par conséquent

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\int_{C_r} f(z) dz \right] = 0.$$

Le Théorème des résidus donne immédiatement le résultat. \spadesuit

Chapitre 12

Applications conformes

12.1 Définitions et exemples

Définition 12.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. On dit que

$$f : \Omega \rightarrow f(\Omega) = \Omega^* \subset \mathbb{C}$$

est une **application conforme** de Ω sur Ω^* si

- (i) f est bijective de Ω sur Ω^* ,
- (ii) f est holomorphe dans Ω ,
- (iii) $f'(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$.

Remarque La définition d'application conforme que nous adoptons ici n'est pas la définition usuelle (cf. [1] 67-76, et [5] 427-434), mais elle est équivalente. Toutefois dans [5], page 432, on trouve la même définition. Par ailleurs l'Exercice 11.3 montre que l'hypothèse (iii) est inutile car elle résulte de (i) et (ii). ♠

Exemple La fonction $f(z) = z$ est manifestement conforme de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . ♠

Exemple $f(z) = \bar{z}$ n'est pas une application conforme.

Discussion Il suffit d'observer que $f(z) = \bar{z}$ n'est pas une fonction holomorphe. ♠

Définition 12.2 Une **transformation de Möbius** est une application

$$z \mapsto f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $ad - bc \neq 0$ ($\Rightarrow c \neq 0$ ou $d \neq 0$).

Remarque (i) Du point de vue géométrique, la transformation de Möbius peut être vue comme une combinaison de dilatations, rotations et de translations.

(ii) Lorsque $ad - bc = 0$ et disons $d \neq 0$ (idem si $d = 0$ et $c \neq 0$ qui implique $b = 0$; le cas $c = d = 0$ est mal posé), on s'aperçoit immédiatement que f est constante, en effet

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{d(az + b)}{d(cz + d)} = \frac{b(cz + d)}{d(cz + d)} = \frac{b}{d}. \spadesuit$$

Proposition 12.3 Soient $ad - bc \neq 0$ et

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

(i) Si $c \neq 0$,

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \quad \text{et} \quad \Omega^* = \mathbb{C} \setminus \{a/c\},$$

alors la transformation de Möbius est une application conforme de Ω sur Ω^* .

(ii) Si $c = 0$ ($\Rightarrow d \neq 0$), alors f est conforme de \mathbb{C} sur \mathbb{C} .

Démonstration (i) On discute d'abord le cas $c \neq 0$.

Etape 1. Tout d'abord on va montrer que f est bijective.

1) On va commencer par montrer l'injectivité. On a que, si $z_1, z_2 \in \Omega$,

$$\begin{aligned} f(z_1) = f(z_2) &\Leftrightarrow \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \\ &\Leftrightarrow acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd = acz_1z_2 + bcz_1 + adz_2 + bd \\ &\Leftrightarrow (ad - bc)z_2 = (ad - bc)z_1 \Leftrightarrow z_1 = z_2. \end{aligned}$$

(Noter qu'on a utilisé l'hypothèse $ad - bc \neq 0$).

2) On va prouver que f est surjective. On a

$$\begin{aligned} f(z) = w = \frac{az + b}{cz + d} &\Leftrightarrow (az + b) = w(cz + d) \\ &\Leftrightarrow (cw - a)z = b - dw \\ &\Leftrightarrow z = f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}. \end{aligned}$$

Noter que comme $w \in \Omega^*$, on a que

$$z = f^{-1}(w) \in \mathbb{C}.$$

De plus, comme $ad - bc \neq 0$, on trouve que

$$\frac{-dw + b}{cw - a} \neq -\frac{d}{c}.$$

En combinant les deux observations précédentes, on a bien trouvé que

$$z = f^{-1}(w) \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$$

et donc

$$f(\Omega) = \Omega^* = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}.$$

Etape 2. De plus f est holomorphe, car c'est le quotient de deux fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas. Finalement la dérivée est donnée par

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

En conclusion des deux étapes on a bien montré (i) de la proposition.

(ii) On considère enfin le cas $c = 0$. Comme $ad - bc \neq 0$, alors $d \neq 0$. On a donc

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

qui est une application conforme de \mathbb{C} sur \mathbb{C} (on a $a \neq 0$, car $c = 0$ et $ad - bc \neq 0$). ■

Proposition 12.4 *Toute transformation de Möbius transforme des cercles et des droites en des cercles et des droites (pour autant que $ad - bc \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$ ou $d \neq 0$).*

Démonstration Si $c = 0$ et donc $ad \neq 0$ alors

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

qui clairement transforme des cercles en des cercles et des droites en des droites (cf. Etape 2). On va donc à partir de maintenant supposer que $c \neq 0$.

Etape 1. On définit

$$f_1(z) = \frac{bc - ad}{c}z + \frac{a}{c}, \quad f_2(z) = \frac{1}{z}, \quad f_3(z) = cz + d.$$

Noter que la transformation de Möbius

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

s'écrit alors

$$f = f_1 \circ f_2 \circ f_3.$$

En effet

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1 \circ f_2 \circ f_3(z) = f_1 \circ f_2(cz + d) = f_1\left(\frac{1}{cz + d}\right) \\ &= \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c} = \frac{bc - ad + a(cz + d)}{c(cz + d)} = \frac{az + b}{cz + d}. \end{aligned}$$

Etape 2. Montrons qu'une application linéaire $f(z) = az + b$ a la propriété que

$$f : \{\text{droites}\} \rightarrow \{\text{droites}\} \quad \text{et} \quad f : \{\text{cercles}\} \rightarrow \{\text{cercles}\}.$$

Ecrivons $a = \alpha + i\beta$, $b = \gamma + i\delta$, $z = x + iy$ et $f(z) = u + iv$. On trouve alors que

$$\begin{aligned} f &= u + iv = (\alpha + i\beta)(x + iy) + \gamma + i\delta \\ &= (\alpha x - \beta y + \gamma) + i[(\beta x + \alpha y) + \delta] \end{aligned}$$

i.e.

$$u = \alpha x - \beta y + \gamma \quad \text{et} \quad v = \beta x + \alpha y + \delta.$$

En inversant on obtient

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} (u - \gamma) + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} (v - \delta) \\ y &= \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} (u - \gamma) + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} (v - \delta). \end{aligned}$$

Cas 1 : $\lambda x + \mu y = \nu$. On infère que

$$\frac{(\lambda\alpha - \mu\beta)u + (\lambda\beta + \mu\alpha)v}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{(\lambda\alpha - \mu\beta)\gamma + (\lambda\beta + \mu\alpha)\delta}{\alpha^2 + \beta^2} + \nu$$

qui est bien l'équation d'une droite.

Cas 2 : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. On pose

$$u_0 = \alpha x_0 - \beta y_0 + \gamma \quad \text{et} \quad v_0 = \beta x_0 + \alpha y_0 + \delta$$

qui est équivalent à

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} (u_0 - \gamma) + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} (v_0 - \delta) \\ y_0 &= \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} (u_0 - \gamma) + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} (v_0 - \delta). \end{aligned}$$

En revenant à l'équation $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, on déduit que

$$\begin{aligned} R^2 &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \\ &= \left(\frac{\alpha(u - u_0)}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\beta(v - v_0)}{\alpha^2 + \beta^2} \right)^2 + \left(\frac{-\beta(u - u_0)}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha(v - v_0)}{\alpha^2 + \beta^2} \right)^2 \\ &= \frac{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}{\alpha^2 + \beta^2} \end{aligned}$$

et le résultat suit immédiatement.

Etape 3. Comme f_1, f_2, f_3 transforment des cercles et des droites en des cercles et des droites (par l'Etape 2 pour le premier et troisième cas et par l'Exercice 1 du Chapitre 13 de [9] dans le deuxième cas), on a par l'Etape 1 le résultat souhaité. ■

Exemple (i) Soient

$$z_j, w_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, 3 \quad \text{avec} \quad z_j \neq z_k, w_j \neq w_k, \text{ si } j \neq k.$$

Trouver une transformation de Möbius f telle que

$$f(z_j) = w_j \quad j = 1, 2, 3$$

(i.e. les transformations de Möbius sont caractérisées par la donnée de trois points différents et de leurs images différentes).

(ii) Trouver une transformation de Möbius de $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ sur $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Discussion (i) On fait un calcul heuristique; toutefois une fois trouvé le résultat, on s'aperçoit qu'il est rigoureux. Si $f(z_j) = w_j, j = 1, 2, 3$, alors nécessairement

$$\frac{f(z) - w_1}{w_2 - w_1} \cdot \frac{w_2 - w_3}{f(z) - w_3} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}. \quad (12.1)$$

Posons

$$\alpha = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1};$$

on déduit alors de (12.1) que

$$\beta [f(z) - w_1] (z - z_3) = \alpha [f(z) - w_3] (z - z_1)$$

ce qui implique

$$f(z) [(\beta - \alpha)z - \beta z_3 + \alpha z_1] = \beta w_1 (z - z_3) - \alpha w_3 (z - z_1)$$

i.e.

$$f(z) = \frac{(\beta w_1 - \alpha w_3)z + (\alpha w_3 z_1 - \beta w_1 z_3)}{(\beta - \alpha)z + \alpha z_1 - \beta z_3}.$$

Il suffit alors de poser

$$a = \beta w_1 - \alpha w_3 \quad b = \alpha w_3 z_1 - \beta w_1 z_3$$

$$c = \beta - \alpha \quad d = \alpha z_1 - \beta z_3.$$

(ii) On cherche une application de la forme

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

On utilise la première partie et on choisit, par exemple, les points $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 0$ qui appartiennent tous à $\operatorname{Re} z = 0$ et on leur associe trois points sur $|w| = 1$ arbitraires, par exemple i , $-i$ et 1 (il est évident qu'il aurait mieux valu choisir i , $-i$ et -1 , mais j'ai fait intentionnellement ce choix pour illustrer le phénomène d'inversion). On a

$$\begin{cases} f(i) = i = \frac{ai+b}{ci+d} \\ f(-i) = -i = \frac{-ai+b}{-ci+d} \\ f(0) = 1 = \frac{b}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = -2c \\ 2ai = 2bi \\ b = d. \end{cases}$$

On trouve alors $a = b = -c = d$ et donc

$$f(z) = \frac{z+1}{1-z}.$$

Il reste encore à savoir si f a envoyé Ω sur D ou sur l'extérieur de D . On prend alors un point appartenant à Ω , par exemple $z = 1$, et on trouve que $f(z) = \infty \notin D$. Alors l'application requise, disons g , n'est rien d'autre que l'inverse de celle obtenue (car l'application $h(\zeta) = \zeta^{-1}$ envoie l'intérieur du disque unité sur l'extérieur et réciproquement), i.e.

$$g(z) = \frac{1-z}{z+1}. \quad \spadesuit$$

(Pour plus de détails, cf. [1] 76-89 et [5] 436-459).

12.2 Inversibilité des applications conformes

Commençons par un résultat préliminaire.

Proposition 12.5 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et

$$f : \Omega \rightarrow f(\Omega) = \Omega^* \subset \mathbb{C}$$

une fonction holomorphe non constante. Alors Ω^* est un ouvert connexe.

Remarque Le résultat est faux pour les fonctions analytiques dans \mathbb{R} . Par exemple la fonction

$$f(x) = \sin x$$

est telle que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Démonstration *Etape 1.* Le fait que Ω^* est connexe résulte (cf. le cours de topologie, mais c'est élémentaire) du fait que f est continue. En effet soit

$$\Omega^* = A^* \cup B^* \quad \text{avec} \quad A^*, B^* \text{ ouverts} \quad \text{et} \quad A^* \cap B^* = \emptyset$$

et montrons que soit $A^* = \emptyset$ soit $B^* = \emptyset$. Définissons $A = f^{-1}(A^*)$ et $B = f^{-1}(B^*)$ qui sont ouverts car f est continue. Comme $A \cap B = \emptyset$ et que $\Omega = A \cup B$ est connexe on déduit que soit $A = \emptyset$ soit $B = \emptyset$ et par conséquent soit $A^* = \emptyset$ soit $B^* = \emptyset$.

Etape 2. Montrons donc que Ω^* est ouvert. Soient

$$a \in \Omega \quad \text{et} \quad b = f(a),$$

il faut donc montrer qu'on peut trouver $\delta > 0$, tel que

$$B_\delta(b) \subset \Omega^*.$$

Considérons la fonction

$$z \rightarrow f(z) - b = f(z) - f(a)$$

qui est telle que $f(a) - b = 0$. Par le principe du prolongement analytique (cf. Théorème 9.20), comme f n'est pas constante, on a qu'il existe $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\overline{B_\epsilon(a)} \subset \Omega$ et

$$f(z) - b \neq 0 \quad \text{pour tout } z \in \overline{B_\epsilon(a)} \setminus \{a\}.$$

On pose alors

$$\delta = \frac{1}{2} \inf \{|f(z) - b| : z \in \partial B_\epsilon(a)\}.$$

On a clairement que $\delta > 0$.

Il reste à montrer que $B_\delta(b) \subset \Omega^*$ et pour cela il suffit de montrer (comme $f(B_\epsilon(a)) \subset \Omega^*$) que

$$B_\delta(b) \subset f(B_\epsilon(a)).$$

Soit $y \in B_\delta(b)$, on a alors, si $z \in \partial B_\epsilon(a)$, que

$$\begin{aligned} |f(z) - y| &= |f(z) - b + b - y| \geq |f(z) - b| - |b - y| \\ &\geq 2\delta - |b - y| > 2\delta - \delta = \delta. \end{aligned}$$

On déduit donc que, pour $y \in B_\delta(b)$ et pour tout $z \in \partial B_\epsilon(a)$,

$$|f(z) - y| > \delta > |b - y| = |f(a) - y|.$$

Donc la fonction $z \rightarrow |f(z) - y|$ n'atteint pas son minimum sur $\overline{B_\epsilon(a)}$ en un point de la frontière $\partial B_\epsilon(a)$. Par le principe du minimum (cf. Corollaire 9.23), il existe $w \in B_\epsilon(a)$ tel que

$$f(w) - y = 0,$$

c'est à dire que $y \in f(B_\epsilon(a)) \subset \Omega^*$, comme souhaité. ■

En revenant aux applications conformes, on a que

Proposition 12.6 Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et

$$f : \Omega \rightarrow f(\Omega) = \Omega^* \subset \mathbb{C}$$

une application conforme. Alors Ω^* est un ouvert connexe et l'application

$$g = f^{-1} : \Omega^* \rightarrow \Omega$$

est holomorphe (en fait une application conforme) et

$$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))} \quad \text{pour tout } w \in \Omega^*.$$

Démonstration Par la proposition précédente Ω^* est un ouvert connexe. Montrons que g est holomorphe (g existe car f est bijective).

Etape 1. Commençons par montrer que g est continue. Ceci vient de la proposition précédente, en effet

$$g^{-1}(\text{ouvert}) = f(\text{ouvert}) = \text{ouvert}.$$

Pour plus de détails on procède comme suit. Noter tout d'abord que f n'est pas constante, car elle est conforme. On veut montrer que pour tout $b \in \Omega^*$ (i.e. $b = f(a)$ avec $a \in \Omega$) et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(b, \epsilon) = \delta(a, \epsilon)$ tel que

$$w \in \Omega^* \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} |w - b| < \delta \\ w = f(z) \text{ avec } z \in \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow |g(w) - g(b)| = |z - a| < \epsilon.$$

En d'autres termes on doit montrer que

$$g(B_\delta(b)) \subset B_\epsilon(a) = B_\epsilon(g(b))$$

or c'est exactement ($B_\delta(b) \subset f(B_\epsilon(a))$) ce que nous avons fait dans la démonstration de la proposition précédente.

Etape 2. Il nous reste à prouver que g est holomorphe. Soient $b \in \Omega^*$ et $a \in \Omega$ tel que $b = f(a)$. Soient $h \in \mathbb{C}$ suffisamment petit pour que $b + h \in \Omega^*$, soit donc $z \in \Omega$ tel que $b + h = f(z)$. On a ainsi

$$\frac{g(b+h) - g(b)}{h} = \frac{z - a}{f(z) - f(a)} \rightarrow \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))} \quad \text{si } h \rightarrow 0$$

car la fonction g est continue (ce qui implique $z \rightarrow a$ si $h \rightarrow 0$) et f est holomorphe et $f'(a) \neq 0$, $\forall a \in \Omega$. On a ainsi bien montré la proposition. ■

12.3 Le lemme de Schwarz

Théorème 12.7 (Lemme de Schwarz) Soient D le disque unité (ouvert) et $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad |f(z)| \leq 1 \quad \text{pour tout } z \in D.$$

Alors

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |f(z)| \leq |z| \quad \text{pour tout } z \in D.$$

Si de plus soit $|f'(0)| = 1$ soit

$$|f(z_0)| = |z_0| \quad \text{pour un certain } z_0 \in D \setminus \{0\}$$

alors il existe $a \in \mathbb{C}$, avec $|a| = 1$, tel que

$$f(z) = az.$$

Démonstration *Etape 1.* Observer que la fonction

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

est holomorphe dans D , car $(f(0) = 0)$

$$g(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} z + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^{n-1}.$$

Pour $z \in D$, choisissons $|z| < r < 1$. On déduit principe du maximum (cf. Théorème 9.21) et du fait que $r > 1$ que

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq \sup \{|g(w)| : |w| = r\} = \frac{1}{r} \sup \{|f(w)| : |w| = r\} \\ &\leq \frac{1}{r} \sup \{|f(w)| : |w| < 1\}. \end{aligned}$$

Comme $|f(z)| \leq 1$ on infère que $\sup \{|f(w)| : |w| < 1\} \leq 1$ et donc

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

En laissant $r \rightarrow 1$, on a que

$$|g(z)| \leq 1 \quad \text{pour tout } z \in D$$

et ainsi

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \text{et} \quad |f(z)| \leq |z| \quad \text{pour tout } z \in D.$$

Etape 2. Si de plus soit $|f'(0)| = 1$ soit

$$|f(z_0)| = |z_0| \quad \text{pour un certain } z_0 \in D \setminus \{0\}$$

alors on a ($z_1 = z_0$ ou $z_1 = 0$)

$$|g(z_1)| = 1 \quad \text{pour un certain } z_1 \in D.$$

En appliquant à nouveau le principe du maximum (sous la forme du Corollaire 9.22), on déduit que g est constante (puisque $|g|$ atteint son maximum dans D qui est ouvert), on a donc

$$g = \text{constante} \quad \text{et} \quad |g(z)| \equiv 1.$$

En d'autres termes, il existe $a \in \mathbb{C}$, avec $|a| = 1$, tel que

$$g(z) \equiv a$$

d'où le résultat. ■

Le lemme de Schwarz a comme conséquence directe le résultat d'*unicité* suivant.

Théorème 12.8 *Soient Ω un ouvert connexe et D le disque unité (ouvert). Soient $f, g : \Omega \rightarrow D$ des applications conformes. S'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que*

$$f(z_0) = g(z_0) = 0$$

alors il existe $a \in \mathbb{C}$, avec $|a| = 1$, tel que

$$f(z) = a g(z) \quad \text{pour tout } z \in \Omega.$$

De plus s'il existe $t > 0$ tel que $f'(z_0) = t g'(z_0)$, alors $t = 1$ et

$$f \equiv g.$$

Démonstration *Etape 1.* Par la Proposition 12.6 la fonction $g^{-1} : D \rightarrow \Omega$ est bien définie et donc

$$h = f \circ g^{-1} : D \rightarrow D \quad \Rightarrow \quad |h(z)| \leq 1$$

est bien définie (et est conforme) et satisfait en outre

$$h(0) = f(g^{-1}(0)) = f(z_0) = 0.$$

Par le Lemme de Schwarz on déduit que

$$|h(z)| \leq |z| \quad \text{pour tout } z \in D.$$

En appliquant le même raisonnement à $h^{-1} : D \rightarrow D$, on déduit que

$$|h^{-1}(w)| \leq |w| \quad \text{pour tout } w \in D.$$

En combinant les deux résultats on trouve

$$|h(z)| \leq |z| = |h^{-1}(h(z))| \leq |h(z)| \quad \text{pour tout } z \in D$$

et ainsi

$$|h(z)| = |z| \quad \text{pour tout } z \in D.$$

En appliquant à nouveau le Lemme de Schwarz, on infère qu'il existe $a \in \mathbb{C}$, avec $|a| = 1$, tel que

$$h(z) = az$$

et donc (en posant $z = g(w)$)

$$f(w) = ag(w) \quad \text{pour tout } w \in \Omega.$$

Etape 2. Si, en outre, il existe $t > 0$ tel que

$$f'(z_0) = tg'(z_0),$$

alors on déduit (comme f et g sont conformes, on a que $f'(z_0), g'(z_0) \neq 0$) que $t = a$. Et comme $|a| = 1$, $t = a = 1$, ce qui veut dire que

$$f \equiv g$$

comme souhaité. ■

12.4 Le Théorème de Riemann

Théorème 12.9 (Théorème de Riemann) Soit $\Omega \neq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. Alors

(i) il existe une application conforme de Ω sur D , le disque unité (cf. Figure 12.1).

(ii) Si de plus il existe $z_0 \in \Omega$ tel que, par exemple,

$$f(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(z_0) > 0$$

(c'est à dire $\operatorname{Re} f'(z_0) > 0$ et $\operatorname{Im} f'(z_0) = 0$), alors un tel f est unique.

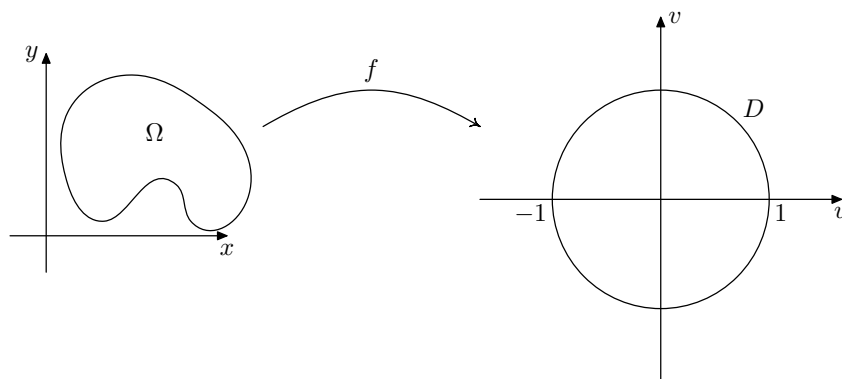


FIG. 12.1 –

(Pour plus de détails, cf. [1] 229-249, [5] 485-504).

Démonstration Nous ne ferons pas la démonstration de l'existence, mais observerons que l'unicité suit directement du Théorème 12.8. En effet supposons qu'il y en ait deux satisfaisant

$$f(z_0) = g(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(z_0), g'(z_0) > 0$$

alors il existe $t > 0$ tel que $f'(z_0) = t g'(z_0)$ et donc par le Théorème 12.8

$$f \equiv g.$$

Ceci termine la démonstration de l'unicité. ■

12.5 Exercices

De nombreux autres exercices concernant ce chapitre, notamment Exercices 1, 3, 6, 7 et 10, se trouvent au Chapitre 13 de [9].

Exercice 12.1 Soit f une application conforme sur Ω . Soient $z_0 \in \Omega$ et $c, d \in C^1]-\epsilon, \epsilon[; \Omega$ avec

$$c(0) = d(0) = z_0 \quad \text{et} \quad c'(0), d'(0) \neq 0.$$

(i) Montrer que

$$(f \circ c)'(t) = f'(c(t)) c'(t), \quad \forall t \in]-\epsilon, \epsilon[.$$

(ii) Dédurre que

$$\frac{d'(0)}{c'(0)} = \frac{(f \circ d)'(0)}{(f \circ c)'(0)}$$

et expliquer pourquoi cette dernière identité peut être interprétée comme une préservation des angles par l'application conforme.

Exercice 12.2 Soient $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et $f : D \rightarrow D$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$.

(i) Montrer que la fonction

$$g(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2z}$$

est holomorphe dans D .

(ii) Dédurre du lemme de Schwarz que

$$|g(z)| \leq |z|, \quad \text{pour tout } z \in D.$$

(iii) Inférer de (ii) que

$$|f(z) + f(-z)| \leq 2|z|^2, \quad \text{pour tout } z \in D.$$

Exercice 12.3 Soient

$$\Omega_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < 1 \right\}$$

$$\Omega_2 = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi \}$$

$$\Omega_3 = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \}.$$

- (i) Trouver une transformation de Möbius qui envoie Ω_1 sur Ω_2 .
- (ii) Montrer que l'application $z \rightarrow e^z$ est une application conforme qui envoie Ω_2 sur Ω_3 .
- (iii) Trouver une application conforme qui envoie Ω_1 sur Ω_3 .

Exercice 12.4 Soit

$$D = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}.$$

Montrer que si $f : D \rightarrow D$ est conforme, alors il existe $\alpha, a \in \mathbb{C}$ avec $|\alpha| < |a| = 1$ tels que

$$f(z) = a \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}.$$

Suggestion. (i) Soient $|\alpha| < 1$ et

$$h_\alpha(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}.$$

Montrer que $h_\alpha : D \rightarrow D$ est holomorphe (pour montrer le fait que $h_\alpha(D) \subset D$ on pourra utiliser le principe du maximum).

- (ii) Montrer que h_α est bijective de D sur D et que $h_\alpha^{-1} = h_\alpha$.
- (iii) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in D$ tel que $f(\alpha) = 0$.
- (iv) Poser $g = f \circ h_\alpha$, où α est tel que $f(\alpha) = 0$. Montrer, à l'aide du lemme de Schwarz, que, pour tout $z \in D$,

$$|g(z)|, |g^{-1}(z)| \leq |z|.$$

- (v) Conclure de la question précédente.

12.6 Corrigés**Exercice 12.1** (i) Soient

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$$

et $c(t) = c_1(t) + i c_2(t)$. On a donc

$$(f \circ c)(t) = u(c_1(t), c_2(t)) + i v(c_1(t), c_2(t)).$$

On trouve immédiatement, par la formule de dérivation des fonctions composées, que

$$\begin{aligned}(f \circ c)'(t) &= \frac{d}{dt} [u(c_1(t), c_2(t))] + i \frac{d}{dt} [v(c_1(t), c_2(t))] \\ &= u_x(c_1, c_2) c'_1 + u_y(c_1, c_2) c'_2 + i [v_x(c_1, c_2) c'_1 + v_y(c_1, c_2) c'_2].\end{aligned}$$

Comme f est holomorphe, les équations de Cauchy-Riemann nous donnent

$$(f \circ c)'(t) = u_x(c_1, c_2) c'_1 - v_x(c_1, c_2) c'_2 + i [v_x(c_1, c_2) c'_1 + u_x(c_1, c_2) c'_2]$$

et, comme $c' = c'_1 + i c'_2$, ceci implique que

$$(f \circ c)' = [u_x(c_1, c_2) + i v_x(c_1, c_2)] [c'_1 + i c'_2].$$

Le membre de droite n'est rien d'autre, par holomorphie de f , que $f'(c) c'$. On a donc bien montré que

$$(f \circ c)'(t) = f'(c(t)) c'(t)$$

et de manière analogue

$$(f \circ d)'(t) = f'(d(t)) d'(t).$$

(ii) Par le point précédent, et comme $c(0) = d(0) = z_0$, on a directement

$$\frac{(f \circ d)'(0)}{(f \circ c)'(0)} = \frac{f'(d(0)) d'(0)}{f'(c(0)) c'(0)} = \frac{f'(z_0) d'(0)}{f'(z_0) c'(0)} = \frac{d'(0)}{c'(0)}.$$

Comme $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$, l'égalité précédente implique que l'angle entre les courbes $c(t)$ et $d(t)$ au point z_0 et l'angle entre l'image des courbes, c'est à dire $(f \circ c)(t)$ et $(f \circ d)(t)$, au point $f(z_0)$ sont égales. ♠

Exercice 12.2 (i) Comme f est holomorphe dans D et $f(0) = 0$, on peut écrire, pour tout $z \in D$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad \text{et} \quad f(-z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

et donc

$$g(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[1 + (-1)^{n+1}] f^{(n+1)}(0)}{2(n+1)!} z^n$$

qui nous dit bien que g est holomorphe dans D .

(ii) Par le Lemme de Schwarz appliqué à f , on infère que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$. Comme par ailleurs $g(0) = 0$ par (i) et

$$|g(z)| = \frac{|f(z) + f(-z)|}{2|z|} \leq 1$$

et comme $g(0) = 0$ par (i) on a bien montré, en utilisant à nouveau le Lemme de Schwarz, que

$$|g(z)| \leq |z|, \quad \text{pour tout } z \in D.$$

(iii) Le résultat suit immédiatement de (ii). ♠

Exercice 12.3 (i) L'application $f_1(z) = 2\pi i(z - 1/2)$ est bien conforme de Ω_1 sur $f_1(\Omega_1)$. De plus $f_1(\Omega_1) = \Omega_2$. En effet si on pose $f_1(z) = \alpha + i\beta$ on obtient

$$\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha + i\beta}{2\pi i} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\pi} < 1$$

ce qui nous conduit à

$$0 < \beta < \pi.$$

(ii) Soit $f_2(z) = e^z$ qui est bien conforme de Ω_2 sur $f_2(\Omega_2) = \Omega_3$. En effet on doit vérifier que $f_2 : \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ a les propriétés suivantes.

- f_2 injective : soient $z_1, z_2 \in \Omega_2$ tels que $e^{z_1} = e^{z_2}$ et donc

$$z_2 = z_1 + 2in\pi \quad \Rightarrow \quad [\operatorname{Re} z_2 = \operatorname{Re} z_1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z_2 = \operatorname{Im} z_1 + 2n\pi].$$

Comme $0 < \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2 < \pi$ on déduit que $z_1 = z_2$ et donc f_2 est injective.

- f_2 surjective : soit $w \in \Omega_3$, on veut trouver $z \in \Omega_2$ tel que $f(z) = w$. Il suffit de prendre $z = \log w$. On a bien $\operatorname{Im} w > 0 \Rightarrow \operatorname{Im} z \in (0, \pi)$.

- f_2 holomorphe : on sait que $f_2(z) = e^z$ est holomorphe $\forall z \in \mathbb{C}$ et que

$$f_2'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

(iii) L'application

$$f(z) = f_2 \circ f_1(z) = e^{2\pi i(z - \frac{1}{2})}$$

a les propriétés voulues. ♠

Exercice 12.4 (i) Comme $|\alpha| < 1$, on a que $1 - \bar{\alpha}z \neq 0$ pour tout $|z| < 1$ et donc h_α est holomorphe dans D . Montrons maintenant que $h_\alpha(D) \subset D$. Observons que

$$h_\alpha(e^{i\theta}) = \frac{\alpha - e^{i\theta}}{1 - \bar{\alpha}e^{i\theta}} = \frac{\alpha - e^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - \bar{\alpha})} = -e^{-i\theta} \frac{\alpha - e^{i\theta}}{(\alpha - e^{i\theta})}$$

d'où on déduit que $|h_\alpha(e^{i\theta})| = 1$. Par le principe du maximum on infère que

$$|h_\alpha(z)| < 1, \quad \forall z \in D$$

ce qui est le résultat souhaité.

(ii) La fonction h_α est clairement injective car c'est une transformation de Möbius. Etudions maintenant la surjectivité de h_α . Soit $w \in D$, alors

$$w = \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{\alpha - w}{1 - \bar{\alpha}w}$$

à savoir $h_\alpha^{-1} = h_\alpha$.

(iii) Comme f est conforme de D sur D , il existe un unique $\alpha \in D$ tel que $f(\alpha) = 0$.

(iv) On a $g(0) = 0$ et $g : D \rightarrow D$ est holomorphe, On déduit du lemme de Schwarz que

$$|g(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in D.$$

Comme le même raisonnement s'applique à g^{-1} , on a aussi $|g^{-1}(w)| \leq |w|$, $\forall w \in D$.

(v) De la question précédente on obtient que

$$|z| = |g^{-1}(w)| \leq |w| = |g(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in D$$

à savoir

$$|g(z)| = |z|, \quad \forall z \in D.$$

En invoquant une nouvelle fois le lemme de Schwarz, on a qu'il existe $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| = 1$ tel que

$$g(z) = az$$

ce qui implique, comme $g = f \circ h_\alpha$ et $h_\alpha^{-1} = h_\alpha$, que

$$f(z) = ah_\alpha(z) = a \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$$

et ceci termine la démonstration. ♠

Chapitre 13

Quelques fonctions spéciales

13.1 Préliminaires sur les produits infinis

Soit $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Si

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N (1 + u_n)$$

existe et est finie, on dit que le *produit converge* et on note

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + u_n).$$

On a tout de suite la proposition suivante.

Proposition 13.1 *Si $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ converge, alors $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + u_n)$ converge. De plus le produit converge vers 0 si et seulement si un de ses facteurs est 0.*

Démonstration Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ converge, on a sûrement qu'il existe \bar{n} tel que $|u_n| < 1/2$ pour $n \geq \bar{n}$. L'expression $\log(1 + u_n)$ est alors bien définie et de plus

$$\prod_{n=\bar{n}}^N (1 + u_n) = \prod_{n=\bar{n}}^N e^{\log(1+u_n)} = e^{\{\sum_{n=\bar{n}}^N \log(1+u_n)\}}.$$

Comme

$$|\log(1 + z)| \leq 2|z| \quad \text{si } |z| < 1/2$$

on a (par hypothèse) que

$$\sum_{n=\bar{n}}^N |\log(1 + u_n)| \leq 2 \sum_{n=\bar{n}}^N |u_n| < \infty$$

et donc $\sum_{n=\bar{n}}^N \log(1+u_n)$ converge vers un certain a . On a ainsi montré que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=\bar{n}}^N (1+u_n) = e^a$$

ou encore

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N (1+u_n) = \prod_{n=1}^{\bar{n}-1} (1+u_n) \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=\bar{n}}^N (1+u_n) = e^a \prod_{n=1}^{\bar{n}-1} (1+u_n)$$

On a du même coup établi que le produit converge vers 0 si et seulement si un de ses facteurs est 0 (car $e^a \neq 0$). ■

Ceci se généralise au produit de fonctions holomorphes.

Proposition 13.2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}_+$ et soit $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ une suite de fonctions holomorphes dans Ω telles que*

$$|f_n(z) - 1| \leq c_n \text{ pour tout } z \in \Omega \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} c_n < \infty.$$

Alors il existe une fonction F holomorphe dans Ω telle que

$$F_N = \prod_{n=1}^N f_n \rightarrow F \text{ uniformément quand } N \rightarrow +\infty.$$

Démonstration On écrit

$$f_n(z) = 1 + u_n(z) \quad \text{avec} \quad |u_n(z)| \leq c_n$$

et on procède comme dans la démonstration précédente pour z fixé, en écrivant

$$F_N(z) = \prod_{n=1}^N f_n(z) = \prod_{n=1}^N (1 + u_n(z)).$$

Le fait que la convergence est uniforme suit immédiatement du fait que les c_n sont des constantes. On a donc bien montré que

$$F_N = \prod_{n=1}^N f_n = \prod_{n=1}^N (1 + u_n) \rightarrow F \text{ uniformément quand } N \rightarrow +\infty.$$

Le fait que F est holomorphe est une conséquence du Théorème de Weierstrass (cf. Théorème 9.25). ■

On peut montrer grâce à la proposition ci-dessus (cf. [5] page 356 ou [24] page 142) la formule d'Euler

$$\sin(\pi z) = (\pi z) \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

13.2 La fonction Γ

Définition 13.3 (Intégrale d'Euler) Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} z > 0$. On définit

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Théorème 13.4 La fonction Γ est holomorphe dans

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}.$$

De plus pour tout $z \in \Omega$

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$$

$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{et} \quad \Gamma(n) = (n-1)!, \quad \text{si } n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration *Etape 1.* Soient $0 < \alpha < \beta$ et

$$\Omega_{\alpha\beta} = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}.$$

Il suffit de montrer que pour tout $0 < \alpha < \beta$, la fonction est holomorphe dans $\Omega_{\alpha\beta}$. On définit ensuite pour $\epsilon > 0$,

$$\Gamma_\epsilon(z) = \int_\epsilon^{1/\epsilon} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

On va montrer que cette intégrale converge quand $\epsilon \rightarrow 0$ pour tout $z \in \Omega_{\alpha\beta}$. On observe tout d'abord que si $z = x + iy$

$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} t^{x-1} \leq \begin{cases} e^{-t} t^{\alpha-1} & \text{si } t \leq 1 \\ e^{-t} t^{\beta-1} & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Comme $z \rightarrow e^{-t} t^{z-1}$ est holomorphe dans Ω et la fonction $(t, z) \rightarrow e^{-t} t^{z-1}$ est continue dans $[\epsilon, 1/\epsilon] \times \Omega_{\alpha\beta}$, on peut appliquer l'Exercice 9.12 et déduire que Γ_ϵ est holomorphe dans $\Omega_{\alpha\beta}$. Si on montre que

$$\Gamma_\epsilon \rightarrow \Gamma \quad \text{uniformément dans } \Omega_{\alpha\beta} \tag{13.1}$$

alors par le Théorème de Weierstrass 9.25, on aura que Γ est bien holomorphe dans $\Omega_{\alpha\beta}$ pour tout $0 < \alpha < \beta$ et donc dans Ω , comme souhaité.

Il reste donc à montrer (13.1) et pour cela on observe que, pour tout $z \in \Omega_{\alpha\beta}$,

$$|\Gamma_\epsilon(z) - \Gamma(z)| \leq \int_0^\epsilon e^{-t} t^{\alpha-1} dt + \int_{1/\epsilon}^{+\infty} e^{-t} t^{\beta-1} dt.$$

Clairement, chacune des intégrales converge vers 0 et on a ainsi démontré le résultat.

Etape 2. Observons

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{\epsilon}} \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^z - e^{-\epsilon} \epsilon^z &= \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} \frac{d}{dt} [e^{-t} t^z] dt = - \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} e^{-t} t^z dt + z \int_{\epsilon}^{1/\epsilon} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= -\Gamma_{\epsilon}(z+1) + z \Gamma_{\epsilon}(z). \end{aligned}$$

Comme $\operatorname{Re} z > 0$, on trouve

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[e^{-\frac{1}{\epsilon}} \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^z \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [e^{-\epsilon} \epsilon^z] = 0$$

et donc, pour $z \in \Omega$, en passant à la limite

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$$

qui est le résultat désiré.

Etape 3. On voit que

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

et que par induction, pour $n \in \mathbb{N}$, (de l'équation $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$) on trouve

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

ce qui est le résultat souhaité. ■

Théorème 13.5 *La fonction Γ peut être étendue à tout le plan complexe en une fonction holomorphe sauf en $z = -n$ où $n \in \mathbb{N}$. Les points $z = -n$ sont des pôles d'ordre 1 dont le résidu est $(-1)^n / n!$.*

Démonstration Ceci suit de la formule $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$.

1) En effet définissons

$$\Gamma_1(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Le membre de droite est holomorphe pour $z \neq 0$ et pour $\operatorname{Re}(z+1) > 0$. Comme $\Gamma_1(z) = \Gamma(z)$ pour $\operatorname{Re} z > 0$, on a bien étendu la fonction à $\operatorname{Re}(z+1) > 0$ et qui a un pôle simple en $z = 0$ et le résidu est donné par

$$\operatorname{Res}_0(\Gamma_1) = \Gamma(1) = 1.$$

A partir de maintenant nous ne distinguerons plus Γ_1 et Γ .

2) On procède de manière analogue pour

$$\Gamma_2(z) = \frac{\Gamma_1(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}.$$

Le membre de droite est holomorphe pour $z \neq 0, -1$ et pour $\operatorname{Re}(z+2) > 0$. Comme $\Gamma_2(z) = \Gamma_1(z) = \Gamma(z)$ pour $\operatorname{Re} z > 0$, on a bien étendu la fonction à $\operatorname{Re}(z+2) > 0$ et qui a des pôles simples en $z = 0, -1$ et le résidu est donné par

$$\operatorname{Res}_{-1}(\Gamma_2) = \frac{\Gamma(1)}{-1} = -1.$$

A partir de maintenant nous ne distinguerons plus Γ_2 et Γ .

3) On itère alors le processus et on définit, par induction,

$$\Gamma_{n+1}(z) = \frac{\Gamma_n(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Le membre de droite est holomorphe pour

$$z \neq 0, -1, \dots, -n \quad \text{et} \quad \operatorname{Re}(z+n+1) > 0.$$

Comme $\Gamma_{n+1}(z) = \Gamma_n(z) = \Gamma(z)$ pour $\operatorname{Re} z > 0$, on a bien étendu la fonction à $\operatorname{Re}(z+n+1) > 0$ et qui a des pôles simples en $z = 0, -1, \dots, -n$ et le résidu est donné par

$$\operatorname{Res}_{-n}(\Gamma_{n+1}) = \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Ceci termine la démonstration. ■

Théorème 13.6 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, alors

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)};$$

en particulier

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Démonstration On a vu dans l'Exercice 11.7 que, si $0 < x < 1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{v^{x-1}}{1+v} dv = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.$$

Pour démontrer le théorème il suffit de le démontrer pour le cas où $z = x$ est réel avec $0 < x < 1$. Comme $z \rightarrow \Gamma(z)\Gamma(1-z)$ et $\pi/\sin(\pi z)$ sont holomorphes dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ (noter que $\Gamma(z)$ a des singularités sur tous les entiers négatifs et $\Gamma(1-z)$ sur tous les entiers positifs), on aura le résultat par le principe du prolongement analytique.

Pour $0 < x < 1$, on peut écrire,

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-x} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} e^{-t} t^{-x} dt du. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variables $(u, t) = (u, uv)$, on trouve

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du \left[u \int_0^{+\infty} e^{-uv} (uv)^{-x} dv \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u(1+v)} v^{-x} du dv = \int_0^{+\infty} \frac{v^{-x}}{1+v} dv \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi(1-x))} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}\end{aligned}$$

comme souhaité. ■

Avant de montrer la formule d'Euler, nous allons montrer deux lemmes préliminaires.

Lemme 13.7 (La constante d'Euler) *Soit*

$$\gamma_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N.$$

La suite γ_N tend vers une limite notée γ et appelée la constante d'Euler.

Démonstration On écrit

$$\begin{aligned}\gamma_N &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \int_1^N \frac{1}{x} dx \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right) dx + \frac{1}{N}.\end{aligned}$$

On observe que pour $n \leq x \leq n+1$ on a

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Si on pose

$$a_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right) dx$$

on a donc

$$\gamma_N = \sum_{n=1}^{N-1} a_n + \frac{1}{N}.$$

Comme $|a_n| \leq 1/n^2$ on a bien le résultat. ■

Lemme 13.8 *Soit*

$$F_n(z) = \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!n^z}.$$

Alors la fonction $F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} [F_n(z)]$ est holomorphe dans \mathbb{C} et ne s'annule que quand $z \in (-\mathbb{N})$.

Démonstration *Etape 1.* Soit γ_n comme dans le lemme précédent. Noter que

$$\begin{aligned} F_n(z) &= \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!} n^{-z} = \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!} e^{-z \log n} \\ &= \frac{z(z+1)\cdots(z+n)}{n!} e^{z(\gamma_n - \sum_{k=1}^n (1/k))} \\ &= z e^{\gamma_n z} \frac{(z+1)\cdots(z+n)}{n!} e^{-z \sum_{k=1}^n (1/k)} = z e^{\gamma_n z} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right]. \end{aligned}$$

Etape 2. Posons

$$f_n(z) = \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right] \quad \text{et} \quad f(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \right].$$

On a donc que

$$F_n(z) = z e^{\gamma_n z} f_n(z).$$

Le membre de droite est holomorphe dans \mathbb{C} et de plus grâce au lemme précédent il est facile de voir que la fonction g_n , définie par $g_n(z) = z e^{\gamma_n z}$, converge uniformément sur tout compact vers g où $g(z) = z e^{\gamma z}$. De même il est facile de voir (cf. Etape 3) que f_n converge uniformément sur tout compact vers f . Et donc F est holomorphe dans \mathbb{C} . Comme $f(z) \neq 0$ si $z \notin (-\mathbb{N})$ on a le résultat souhaité.

Etape 3. Montrons la convergence uniforme de f_n vers f . Noter que si on écrit

$$\phi_k(z) = \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}}$$

on a

$$f_n(z) = \prod_{k=1}^n \phi_k(z).$$

Il est alors facile de voir (en utilisant un développement limité) que si K est un compact, il existe $c = c(K) > 0$ tel que

$$|\phi_k(z) - 1| \leq \frac{c}{k^2} \quad \text{si } z \in K.$$

On peut donc appliquer la Proposition 13.2 pour déduire la convergence uniforme de f_n vers f sur le compact K ; d'où le résultat. ■

Théorème 13.9 (Formule d'Euler) Pour tous $z \neq 0, -1, \dots$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} \right].$$

Démonstration Grâce au Lemme 13.8 et au principe du prolongement analytique, il suffit de démontrer le résultat si $z = x$ est réel avec $x > 0$; à savoir

$$\Gamma(x) = \frac{1}{F(x)}$$

où F est définie dans le Lemme 13.8.

Etape 1. On commence par rappeler que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$

et on définit

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt.$$

On observe que par intégrations successives (cf. Exercice 13.1)

$$\Gamma_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} = \frac{1}{F_n(x)}$$

où F_n est définie dans le Lemme 13.8. Il reste à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x).$$

Ecrivons

$$\begin{aligned} \Gamma(x) - \Gamma_n(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt - \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad I_2 = \int_{n/2}^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{x-1} dt \\ I_3 &= \int_0^{n/2} \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{x-1} dt \end{aligned}$$

Le résultat sera démontré une fois qu'on aura prouvé que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_3 = 0$$

Etape 2. Estimation de I_1 . On a clairement

$$|I_1| = I_1 = \int_n^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Etape 3. Estimation de I_2 . Il est facile de voir (cf. Exercice 13.2) que

$$0 < t < n \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |I_2| &= I_2 = \int_{n/2}^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{x-1} dt \\ &\leq \int_{n/2}^n e^{-t} t^{x-1} dt \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Etape 4. Estimation de I_3 . On a (cf. Exercice 13.2) qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$0 < t < n/2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq c \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

On déduit ainsi que

$$\begin{aligned} |I_3| &= I_3 = \int_0^{n/2} \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{x-1} dt \leq \frac{c}{n} \int_0^{n/2} t^2 e^{-t} t^{x-1} dt \\ &\leq \frac{c}{n} \int_0^{n/2} e^{-t} t^{x+1} dt \leq \frac{c}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+1} dt. \end{aligned}$$

Or, comme $x > 0$, on déduit que

$$\delta = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+1} dt < \infty$$

et donc

$$|I_3| \leq \frac{c\delta}{n} \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Ceci termine la démonstration. ■

13.3 La fonction ζ

On définit pour $z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ la fonction

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Noter, par exemple, que $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Remarque La fonction ζ joue un rôle capital dans la théorie analytique des nombres, en particulier les zéros de cette fonction. Un résultat typique de théorie des nombres qui utilise très fortement cette fonction (et le fait que la fonction, proprement prolongée, n'a pas de zéros sur $\operatorname{Re} z = 1$) est le *Théorème fondamental des nombres premiers*, qui s'énonce comme suit. Soient $x > 0$ et

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \text{ premier}}} 1$$

(autrement dit le nombre de nombres premiers plus petit que x), alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi(x) \log x}{x} \right] = 1. \quad \spadesuit$$

Théorème 13.10 *La fonction ζ est holomorphe dans Ω .*

Démonstration Il suffit de démontrer le résultat pour

$$\Omega_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1 + \alpha\}$$

avec $\alpha > 0$. On définit pour $N \in \mathbb{N}$ la fonction

$$\zeta_N(z) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^z}$$

qui est clairement holomorphe dans Ω . Noter que

$$\zeta_N \rightarrow \zeta \quad \text{uniformément dans } \Omega_\alpha$$

car, si $N \rightarrow \infty$,

$$|\zeta_N(z) - \zeta(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{|n^z|} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \rightarrow 0$$

Par le Théorème de Weierstrass 9.25, on déduit que ζ est holomorphe dans Ω . ■

Théorème 13.11 (Identité d'Euler) *Soit $z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$, alors*

$$\zeta(z) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-z}}.$$

En particulier la fonction ζ ne s'annule jamais dans Ω .

Démonstration *Etape 1.* On note $P = \{p_1 = 2, p_2 = 3, \dots, p_N \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers. Soit

$$F_N(z) = \prod_{s=1}^N \frac{1}{1 - p_s^{-z}} = \prod_{s=1}^N \left(1 + \frac{p_s^{-z}}{1 - p_s^{-z}} \right) = \prod_{s=1}^N \left(1 + \frac{1}{p_s^z - 1} \right).$$

Noter que si

$$\Omega_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1 + \alpha\}$$

avec $\alpha > 0$ et si $z \in \Omega_\alpha$, alors, pour $p \in P$,

$$|p^z| = |e^{z \log p}| = |e^{\operatorname{Re} z \log p}| = p^{\operatorname{Re} z} \geq p^{1+\alpha} \geq 2.$$

Si on pose

$$u_s(z) = \frac{1}{p_s^z - 1}$$

on trouve que, pour tout $z \in \Omega_\alpha$,

$$|u_s(z)| = \frac{1}{|p_s^z - 1|} \leq \frac{1}{|p_s^z| - 1} \leq \frac{2}{|p_s^z|} \leq \frac{2}{p_s^{1+\alpha}} \leq \frac{2}{s^{1+\alpha}}.$$

Comme $\alpha > 0$ on peut appliquer la Proposition 13.2 pour déduire que F_N converge uniformément vers une fonction holomorphe F dans Ω_α , qui ne s'annule jamais. Comme $\alpha > 0$ est arbitraire, on a bien montré que

$$F(z) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

est holomorphe dans Ω et qu'elle ne s'annule jamais.

Etape 2. Le résultat est donc équivalent à montrer que

$$\frac{\zeta(z)}{F(z)} = 1.$$

1) Regardons

$$2^{-z} \zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^z}$$

puis (ceci est légal car les séries ci-dessous sont convergentes car $\operatorname{Re} z > 1$)

$$\begin{aligned} (1 - 2^{-z}) \zeta(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^z} = \sum_{n \text{ impair}}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \\ &= \sum_{2 \nmid n}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = 1 + \sum_{n \geq 3, 2 \nmid n}^{+\infty} \frac{1}{n^z}. \end{aligned}$$

2) De même

$$3^{-z} \sum_{2 \nmid n}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{2 \nmid n}^{+\infty} \frac{1}{(3n)^z}$$

et donc

$$(1 - 3^{-z}) \sum_{2 \nmid n}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{2 \nmid n, 3 \nmid n}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} (1 - 2^{-z}) (1 - 3^{-z}) \zeta(z) &= (1 - 3^{-z}) \sum_{2 \nmid n}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{2 \nmid n, 3 \nmid n}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \\ &= 1 + \sum_{\substack{n \geq 5 \\ 2 \nmid n, 3 \nmid n}}^{+\infty} \frac{1}{n^z}. \end{aligned}$$

3) En procédant de manière analogue avec les N premiers nombres premiers

$$p_1 = 2 < p_2 = 3 < \cdots < p_N$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(z)}{F_N(z)} &= \prod_{s=1}^N (1 - p_s^{-z}) \zeta(z) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ p_s \nmid n, 1 \leq s \leq N}}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \\ &= 1 + \sum_{\substack{n \geq p_{N+1} \\ p_s \nmid n, 1 \leq s \leq N}}^{+\infty} \frac{1}{n^z}. \end{aligned}$$

4) Noter (ceci a été essentiellement déjà fait dans la première étape) enfin que

$$\left| \sum_{\substack{n \geq p_{N+1} \\ p_s \nmid n, 1 \leq s \leq N}}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \right| \leq \sum_{\substack{n \geq p_{N+1} \\ p_s \nmid n, 1 \leq s \leq N}}^{+\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}} \leq \sum_{n=p_{N+1}}^{+\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re} z}}.$$

Comme il y a un nombre infini de nombres premiers et que $\operatorname{Re} z > 1$, on a que le membre de droite tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$. On a ainsi obtenu que

$$\frac{\zeta(z)}{F(z)} = 1.$$

Ceci est le résultat souhaité. ■

Théorème 13.12 *La fonction ζ peut être prolongée en une fonction holomorphe à $\operatorname{Re} z > 0$, sauf en $z = 1$ qui est alors un pôle d'ordre 1 dont le résidu est 1. Plus précisément la formule suivante est vraie pour $\operatorname{Re} z > 0$*

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + 1 - z \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{z+1}} dt$$

où $\{t\}$ est la partie fractionnaire de t (c'est à dire $\{t\} = t - [t]$ où $[t]$ dénote la partie entière).

Remarque (i) On peut même étendre (une fois le théorème démontré) la fonction à tout le plan complexe grâce à la *formule de Riemann*

$$\zeta(1-z) = 2^{1-z} \pi^{-z} \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(z) \zeta(z)$$

(ii) L'hypothèse de Riemann est alors que les seuls zéros de la fonction ζ dans la bande $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ se trouvent sur $\operatorname{Re} z = 1/2$. Les seuls zéros de ζ en dehors de cette bande sont en $z = -2, -4, -6, \dots$. ♠

Pour démontrer le théorème, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 13.13 (Procédé sommatoire d'Abel) Soient $x > 1$, $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ et

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n.$$

Soit enfin $f \in C^1([1, \infty[; \mathbb{C})$, alors, pour tout $x > 1$,

$$\sum_{n \leq x} a_n f(n) = A(x) f(x) - \int_1^x A(t) f'(t) dt.$$

Démonstration (Lemme 13.13) *Etape 1.* Nous allons tout d'abord donner la version discrète du *Procédé d'Abel*. Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites, on montre alors, par induction évidente, que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n b_n &= a_1 b_1 + \cdots + a_N b_N \\ &= a_1 (b_1 - b_2) + (a_1 + a_2) (b_2 - b_3) + (a_1 + a_2 + a_3) (b_3 - b_4) \\ &\quad + \cdots + (a_1 + \cdots + a_{N-1}) (b_{N-1} - b_N) + (a_1 + \cdots + a_N) b_N \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \left[(b_n - b_{n+1}) \sum_{i=1}^n a_i \right] + b_N \sum_{i=1}^N a_i. \end{aligned}$$

Etape 2. Voyons maintenant la forme intégrale du procédé ci-dessus. On pose

$$b_n = f(n) \quad \text{et} \quad N = [x].$$

On a donc, en se rappelant que $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n = A([x])$,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} a_n f(n) &= \sum_{n=1}^{[x]-1} [(f(n) - f(n+1)) A(n)] + A([x]) f([x]) \\ &= A([x]) f([x]) - \sum_{n=1}^{[x]-1} \left[A(n) \int_n^{n+1} f'(t) dt \right]. \end{aligned}$$

On observe ensuite que si $n \leq t < n+1$, alors $A(t) = A(n)$. Et donc, de l'identité précédente, on infère que

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} a_n f(n) &= A([x]) f([x]) - \sum_{n=1}^{[x]-1} \left[\int_n^{n+1} A(t) f'(t) dt \right] \\ &= A([x]) f([x]) - \int_1^{[x]} A(t) f'(t) dt \\ &= A([x]) f([x]) - \int_1^x A(t) f'(t) dt + \int_{[x]}^x A(t) f'(t) dt. \end{aligned}$$

Comme $A(t) = A([x]) = A(x)$ si $[x] \leq t \leq x$, on déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} a_n f(n) &= A([x]) f([x]) - \int_1^x A(t) f'(t) dt + A([x]) \int_{[x]}^x f'(t) dt \\ &= A([x]) f([x]) - \int_1^x A(t) f'(t) dt + A([x]) (f(x) - f([x])) \\ &= A([x]) f(x) - \int_1^x A(t) f'(t) dt \\ &= A(x) f(x) - \int_1^x A(t) f'(t) dt. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. ■

Tournons nous maintenant vers la démonstration du théorème.

Démonstration (Théorème 13.12) *Etape 1.* Choisissons $(\operatorname{Re} z > 1)$

$$a_n = 1 \text{ et donc } A(x) = [x] \quad \text{et} \quad f(n) = \frac{1}{n^z}$$

dans le lemme et déduisons que

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^z} = \frac{[x]}{x^z} - \int_1^x [t] (t^{-z})' dt = \frac{[x]}{x^z} + z \int_1^x [t] t^{-z-1} dt.$$

Noter que comme $\operatorname{Re} z > 1$, alors

$$\left| \frac{[x]}{x^z} \right| \leq \frac{x}{x^{\operatorname{Re} z}} = x^{1-\operatorname{Re} z} \rightarrow 0 \quad \text{quand } x \rightarrow \infty$$

et de même

$$\left| \int_1^x [t] t^{-z-1} dt \right| \leq \int_1^x t^{-\operatorname{Re} z} dt \leq \int_1^{+\infty} t^{-\operatorname{Re} z} dt < \infty, \text{ si } \operatorname{Re} z > 1.$$

On a ainsi montré, en laissant $x \rightarrow \infty$, que, si $\operatorname{Re} z > 1$,

$$\zeta(z) = z \int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{z+1}} dt = z \int_1^{+\infty} \frac{t - \{t\}}{t^{z+1}} dt = z \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^z} dt - z \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{z+1}} dt.$$

Par ailleurs on voit facilement, comme $\operatorname{Re} z > 1$, que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^z} dt = \left[\frac{t^{-z+1}}{-z+1} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{z-1} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{t^{-z+1}}{z-1} \right] = \frac{1}{z-1}$$

et ainsi

$$\zeta(z) = \frac{z}{z-1} - z \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{z+1}} dt = \frac{1}{z-1} + 1 - z \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{z+1}} dt.$$

Etape 2. Il reste à montrer que, si

$$O = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$$

alors

$$G(z) = \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{z+1}} dt$$

est bien holomorphe dans O et ainsi on aura démontré le théorème (noter que ceci ne suit pas directement de l'Exercice 9.12, car la fonction $t \rightarrow \{t\}$ n'est pas continue sur $[1, \infty[$ et en plus l'intervalle est non borné, par contre on va s'y ramener). On commence par observer que si k est un entier et si $t \in [k, k+1[$, alors

$$g : [k, k+1[\times O \rightarrow \mathbb{C}, \quad g = g(t, z) = \{t\} t^{-z-1},$$

est continue (noter qu'elle n'est pas continue en $k+1$) et bornée sur $[k, k+1] \times O$ et

$$z \rightarrow g(t, z) \quad \text{est holomorphe dans } O \text{ pour tout } t \in [k, k+1].$$

On applique alors l'Exercice 9.12 pour déduire que

$$\int_k^{k+1} \frac{\{t\}}{t^{z+1}} dt$$

est holomorphe dans $\operatorname{Re} z > 0$.

Soient N et k des entiers et définissons

$$G_N(z) = \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} \frac{\{t\}}{t^{z+1}} dt \quad \left(= \int_1^{N+1} \frac{\{t\}}{t^{z+1}} dt \right).$$

Observer que G_N est holomorphe dans $\operatorname{Re} z > 0$, comme une somme finie de fonctions holomorphes. Noter, par ailleurs, que si $\operatorname{Re} z \geq \alpha$ avec $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} |G(z) - G_N(z)| &= \left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{\{t\}}{t^{z+1}} dt \right| \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\operatorname{Re} z + 1}} \\ &= \int_{N+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\operatorname{Re} z + 1}} \leq \int_{N+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha + 1}} = \left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha} \right]_{N+1}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\alpha (N+1)^\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{si } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le Théorème de Weierstrass 9.25, pour déduire que G est holomorphe, comme souhaité. ■

Théorème 13.14 Pour $z \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$, alors

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt.$$

Démonstration *Etape 1.* On se rappelle que si $\operatorname{Re} z > 0$, alors

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

et donc

$$\frac{\Gamma(z)}{n^z} = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{n}\right)^z \frac{dt}{t}.$$

En faisant le changement de variables $u = t/n$ ($\Rightarrow dt/t = du/u$), on trouve

$$\frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} e^{-nu} u^z \frac{du}{u} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} e^{-nu} u^{z-1} du.$$

Etape 2. On observe ensuite que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nu} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nu} = \frac{1}{1 - e^{-u}}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nu} = \frac{1}{1 - e^{-u}} - 1 = \frac{1}{e^u - 1}.$$

On montre ensuite (cf. Etape 3) que si $\operatorname{Re} z > 1$, alors on peut permuter la somme et l'intégrale et donc

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} e^{-nu} u^{z-1} du = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nu} u^{z-1} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} du \end{aligned}$$

ce qui est le résultat souhaité.

Etape 3. On va anticiper ici un résultat de la théorie de l'intégration à savoir le Théorème de la convergence dominée (cf. Théorème 16.14). Soit N un entier,

$$f_N(u) = \sum_{n=1}^N e^{-nu} u^{z-1} \quad \text{et} \quad f(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nu} u^{z-1} = \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}.$$

Observer que

$$f_N(u) \rightarrow f(u) \quad \text{si } N \rightarrow \infty$$

et que, si $\operatorname{Re} z = x$, alors

$$|f_N(u)| \leq \sum_{n=1}^N e^{-nu} u^{x-1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nu} u^{x-1} = \frac{u^{x-1}}{e^u - 1} = |f(u)|.$$

Par ailleurs comme

$$[e^u - 1 \geq u \text{ quand } u \geq 0] \quad \text{et} \quad [e^u - 1 \geq e^u/2 \text{ quand } u \geq 1],$$

on déduit que, se rappeler que $x > 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f(u)| du &= \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{e^u - 1} du = \int_0^1 \frac{u^{x-1}}{e^u - 1} du + \int_1^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{e^u - 1} du \\ &\leq \int_0^1 u^{x-2} du + \int_1^{+\infty} 2 u^{x-1} e^{-u} du < \infty. \end{aligned}$$

On peut ainsi appliquer le Théorème de la convergence dominée (cf. Théorème 16.14) et obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-n u} u^{z-1} du = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_N(u) du = \int_0^{+\infty} f(u) du = \int_0^{+\infty} \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} du$$

comme souhaité. ■

13.4 Les intégrales elliptiques

Définition 13.15 On appelle intégrale elliptique une expression de la forme

$$I(x) = \int^x R(t, y(t)) dt$$

où $R(x, y)$ est un quotient de polynômes et

$$y^2 = [y(t)]^2 = a_4 t^4 + a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0.$$

Exemple 1) Intégrales de Weierstrass

$$y^2 = 4t^3 - \alpha t - \beta$$

et

$$\begin{aligned} W_0(x) &= \int^x \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - \alpha t - \beta}}, \quad W_1(x) = \int^x \frac{t dt}{\sqrt{4t^3 - \alpha t - \beta}}, \\ W_2(x) &= \int^x \frac{dt}{(t - \gamma) \sqrt{4t^3 - \alpha t - \beta}}. \end{aligned}$$

2) Intégrales de Legendre

$$y^2 = (1 - t^2)(1 - k^2 t^2)$$

et (en posant $t = \sin \varphi \Rightarrow \varphi = \arcsin t$)

$$\begin{aligned} L_1(x) &= L_1(x, k^2) = \int^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} = \int^{\arcsin x} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)}} \\ L_2(x) &= L_2(x, k^2) = \int^x \frac{\sqrt{(1-k^2 t^2)}}{\sqrt{(1-t^2)}} dt = \int^{\arcsin x} \sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi)} d\varphi \end{aligned}$$

$$L_3(x) = L_3(x, k^2, c^2) = \int^x \frac{dt}{\left(1 - \frac{t^2}{c^2}\right) \sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}.$$

3) **Longueur d'une ellipse** (d'où le nom). Soit l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec, disons $0 < a < b$. On paramètre l'ellipse par

$$x = a \cos \varphi \quad \text{et} \quad y = b \sin \varphi$$

et alors un élément de longueur (cf. Figure 13.1) de l'ellipse d'angle θ est donné

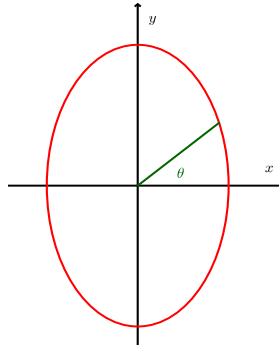


FIG. 13.1 –

par

$$L(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{((x')^2 + (y')^2)} d\varphi = \int_0^\theta \sqrt{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)} d\varphi.$$

En posant

$$k^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2}$$

on trouve

$$L(\theta) = b \int_0^\theta \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)} d\varphi$$

qui est exactement l'intégrale $b L_2(\theta, k^2)$ de Legendre.

4) **Longueur d'une lemniscate**. L'équation d'une lemniscate (cf. Figure 13.2, ici on suppose que $x^2 > y^2$) est donnée par

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

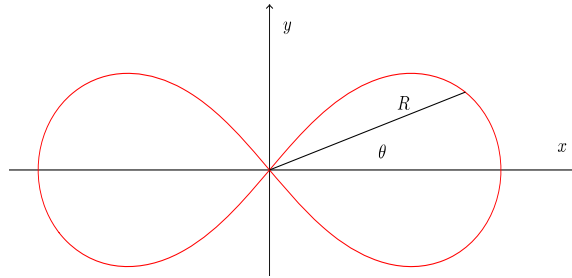


FIG. 13.2 –

En passant aux coordonnées polaires on a $r^2 = \cos(2\theta)$ (et donc $\theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$), on trouve après calcul (on peut écrire la longueur comme fonction de θ ou de façon équivalente de r)

$$L(r) = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Un problème historiquement important a été de "doubler l'arc de la lemniscate", il a été considéré notamment par Bernoulli, Fagnano, Euler, Gauss, Weierstrass... On trouve (cf. Proposition 13.16 ci dessous)

$$2L(r) = L\left(\frac{2r\sqrt{1-r^4}}{1+r^4}\right). \spadesuit$$

Remarque On peut montrer que la fonction hypergéométrique (définie dans la Section 13.6) et les intégrales $L_1(k)$ et $L_2(k)$ de Legendre sont liées par la formule (cf. Olver [20] page 161)

$$L_1(k^2) = \frac{\pi}{2} F\left(1/2, 1/2, 1, k^2\right) \quad \text{et} \quad L_2(k^2) = \frac{\pi}{2} F\left(-1/2, 1/2, 1, k^2\right). \spadesuit$$

Proposition 13.16 (Formule d'Euler) Soient $x, y > 0$ suffisamment petit et

$$L(r) = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

alors

$$L(x) + L(y) = L\left(\frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}\right).$$

Remarque (i) Il est facile de voir que le résultat a lieu pour tous $x, y \in]-1, 1[$ et que

$$-1 < \frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2} < 1.$$

(ii) De façon presque immédiate on peut généraliser le résultat au cas où

$$L(r) = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{p(t)}} \quad \text{où} \quad p(t) = 1 + at^2 - t^4.$$

On a alors

$$L(x) + L(y) = L\left(\frac{x\sqrt{p(y)} + y\sqrt{p(x)}}{1 + x^2y^2}\right).$$

(iii) La formule ci-dessus est l'exact analogue de la formule d'addition de l'arc sinus, à savoir

$$L(x) + L(y) = L\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

où

$$L(r) = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad \spadesuit$$

Démonstration On suit ici Siegel [22], pages 7-8. Soit

$$X = \sqrt{1-x^4}, \quad Y = \sqrt{1-y^4} \quad \text{et} \quad r = \frac{yX + xY}{1 + x^2y^2}.$$

On va considérer x comme la variable et r fixé. De la définition de r on déduit (par exemple par le Théorème des fonctions implicites) que $y = y(x)$. En dérivant par rapport à x , avec $y = y(x)$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= [y'X + yX' + Y + xY'y'] (1 + x^2y^2) - 2(xy^2 + x^2yy') [yX + xY] \\ &= \{[yX' + Y] (1 + x^2y^2) - 2xy^2[yX + xY]\} \\ &\quad + y'\{[xY' + X] (1 + x^2y^2) - 2x^2y[yX + xY]\}. \end{aligned}$$

Or

$$[yX' + Y] = y \frac{-4x^3}{2\sqrt{1-x^4}} + Y = \frac{1}{X} [-2x^3y + XY]$$

et donc

$$\begin{aligned} &\{[yX' + Y] (1 + x^2y^2) - 2xy^2[yX + xY]\} \\ &= \frac{1}{X} [-2x^3y + XY] (1 + x^2y^2) - 2\frac{xy^2}{X} [yX^2 + xXY] \\ &= \frac{1}{X} [XY(1 - x^2y^2) - 2x^3y(1 + x^2y^2) - 2xy^3X^2] \\ &= \frac{1}{X} [XY(1 - x^2y^2) - 2x^3y(1 + x^2y^2) - 2xy^3(1 - x^4)] \\ &= \frac{1}{X} [XY(1 - x^2y^2) - 2xy(x^2 + y^2)]. \end{aligned}$$

De même symétriquement on a

$$\begin{aligned} & \{[x Y' + X] (1 + x^2 y^2) - 2 x^2 y [y X + x Y]\} \\ &= \frac{1}{Y} [X Y (1 - x^2 y^2) - 2 x y (x^2 + y^2)]. \end{aligned}$$

Ainsi en revenant à l'équation et en simplifiant par le facteur commun

$$[X Y (1 - x^2 y^2) - 2 x y (x^2 + y^2)]$$

(noter que pour x, y petits l'expression ci dessus n'est pas nulle) on trouve

$$0 = \frac{1}{X} + \frac{y'}{Y}.$$

En intégrant on déduit que

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^x \frac{y'(t)}{\sqrt{1-[y(t)]^4}} dt = 0,$$

puis en faisant le changement de variable $s = y(t)$ on a

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} = 0.$$

Or $y(0) = r$ et $y = y(x)$, ainsi

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} = \int_0^r \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}.$$

C'est exactement la formule

$$L(x) + L(y) = L(r) = L\left(\frac{xY + yX}{1 + x^2 y^2}\right) = L\left(\frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1 + x^2 y^2}\right)$$

souhaitée. ■

13.5 Les fonctions elliptiques

13.5.1 Généralités sur les fonctions elliptiques

Définition 13.17 On dit que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction elliptique si

- 1) f n'est pas constante ;
- 2) f est méromorphe dans \mathbb{C} , ce qui veut dire que la fonction est holomorphe sauf en des singularités isolées et que ces singularités sont des pôles ;
- 3) f est doublement périodique, ce qui veut dire qu'il existe $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ avec $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$ et tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2).$$

Remarque Historiquement les fonctions elliptiques ont d'abord été vues comme les fonctions réciproques des intégrales elliptiques. Pour voir l'analogie avec les fonctions circulaires ($\sin u$ ou $\cos u$) on écrit

$$u = f^{-1}(x) = \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow x = f(u) = \sin u$$

alors que pour les fonctions elliptiques on a, par exemple,

$$u = f^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \Rightarrow x = f(u) = \operatorname{sl} u$$

ou encore pour la fonction \mathcal{P} de Weierstrass

$$u = \mathcal{P}^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}} \Rightarrow x = \mathcal{P}(u)$$

ou bien (c'est la même, cf. plus loin)

$$u = \mathcal{P}^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)}} \Rightarrow x = \mathcal{P}(u).$$

Pour voir la double périodicité il faut ensuite étendre les fonctions à \mathbb{C} , cf. plus bas. ♠

Voyons d'abord pourquoi on fait l'hypothèse que $\omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$. Pour ceci on aura besoin de deux petits lemmes.

Lemme 13.18 (Identité de Bezout) Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ des nombres premiers entre eux, alors il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$mp + nq = 1.$$

Démonstration Soit

$$S = \{d \in \mathbb{N} : d = px + qy \text{ avec } x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

et soit s le plus petit élément de S . On prétend que $s = 1$, ce qui est la conclusion du lemme. Pour cela il suffit de démontrer que $s \mid p$ et $s \mid q$ et comme p, q sont premiers entre eux, on aura $s = 1$. On va démontrer seulement le premier résultat, l'autre étant démontré de manière analogue.

Ecrivons

$$p = \alpha s + r$$

avec $\alpha \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < s$. Ainsi comme $s = px + qy$, on déduit que

$$\alpha s = \alpha px + \alpha qy = p - r$$

et donc

$$r = (1 - \alpha x)p + (-\alpha y)q.$$

Or $0 \leq r < s$ et $(1 - \alpha x), (-\alpha y) \in \mathbb{Z}$ et comme s est l'élément minimal de S on déduit que $r = 0$, c'est à dire $p = \alpha s$ et donc $s \mid p$. ■

Lemme 13.19 (Théorème de Kronecker) Soient $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{R} : x = m + n\tau \text{ avec } m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Alors Λ est dense dans \mathbb{R} .

Démonstration (cf. Exercice 17.24). La démonstration peut aussi être trouvée dans Stein-Shakarchi [23] page 106-107 sous une forme plus forte ou dans Katok-Hasselblatt [17] page 27 Proposition 1.3.3. ■

Proposition 13.20 Soit f une fonction méromorphe et doublement périodique de périodes $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$.

- (i) Si $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{Q}$, alors f est simplement périodique.
- (ii) Si $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors f est constante.

Démonstration (i) Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux tels que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{p}{q}.$$

Par le Lemme 13.18 (cf. aussi Stein-Shakarchi [23] Corollaire 1.3 du Chapitre 8) il existe $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$mp + nq = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_2}{q} = \left[\frac{mp}{q} + n \right] \omega_2 = m\omega_1 + n\omega_2.$$

On prétend alors que f est périodique de période ω_1 et ω_2 si et seulement si f est périodique de période

$$\omega = \frac{\omega_1}{p} = \frac{\omega_2}{q}.$$

- 1) En effet si f est périodique de période ω_1 et ω_2 , alors

$$f(z + \omega) = f\left(z + \frac{\omega_2}{q}\right) = f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = f(z).$$

- 2) Si maintenant f est périodique de période $\omega = \omega_1/p = \omega_2/q$, alors

$$f(z + \omega_1) = f(z + p\omega) = f(z) \quad \text{et} \quad f(z + \omega_2) = f(z + q\omega) = f(z).$$

- (ii) Comme

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

on a (cf. Lemme 13.19) que

$$\{x \in \mathbb{R} : x = m + n\tau \text{ avec } m, n \in \mathbb{Z}\}$$

est dense dans \mathbb{R} . Soit donc z un point où la fonction f est holomorphe et $\alpha \in \mathbb{R}$, on peut alors trouver, pour tout $\epsilon > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$|\alpha - (m + n\tau)| \leq \frac{\epsilon}{|\omega_1|} \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha\omega_1 - (m\omega_1 + n\omega_2)| \leq \epsilon.$$

On a ainsi, en posant $h = \alpha \omega_1 - (m \omega_1 + n \omega_2)$, par double périodicité que

$$f(z + \alpha \omega_1) = f(z + m \omega_1 + n \omega_2 + h) = f(z + h)$$

et comme f est continue en z et que ϵ est arbitraire, on déduit, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, que

$$f(z + \alpha \omega_1) = f(z).$$

Par le principe du prolongement analytique on infère que f est constante. ■

Remarque A partir de maintenant on va donc supposer que $\tau = \omega_2/\omega_1 \notin \mathbb{R}$. Comme τ et $1/\tau$ ont des parties imaginaires de signe opposé (car $\tau \notin \mathbb{R}$), on peut supposer, quitte à intervertir les rôles de ω_1 et ω_2 , que $\text{Im } \tau > 0$. De plus quitte à remplacer la fonction f par

$$g(z) = f(\omega_1 z)$$

on peut supposer que $\omega_1 = 1$ et $\text{Im } \omega_2 > 0$. Par conséquent, pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$f(z + m + n \tau) = f(z). \quad \spadesuit \quad (13.2)$$

Théorème 13.21 (Théorème de Liouville) *Une fonction holomorphe dans tout le plan complexe doublement périodique est constante.*

Démonstration Soit (cf. Figure 13.3)

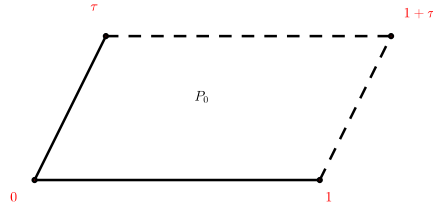


FIG. 13.3 –

$$P_0 = \{z \in \mathbb{C} : z = a + b\tau \text{ avec } 0 \leq a < 1 \text{ et } 0 \leq b < 1\}$$

(qui est appelé le *parallélogramme fondamental*). Clairement une fonction doublement périodique de périodes 1 et τ est complètement déterminée par ses valeurs dans P_0 . Or $\overline{P_0}$ est compact et donc la fonction est bornée sur tout \mathbb{C} . Par le Théorème de Liouville (cf. Théorème 9.17) on déduit que la fonction est constante. ■

13.5.2 La fonction sl

On aimerait maintenant faire un calcul *informel* pour voir un exemple de fonction elliptique (on en verra un autre plus loin) et pour cela on va commencer par faire un calcul sur les fonctions circulaires.

1) La fonction sinus.

Etape 1 : la fonction sinus sur $] -\omega, \omega[$. On a dit que

$$u = f^{-1}(x) = \arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \Rightarrow \quad x = f(u) = \sin u$$

On voit donc que

$$f^{-1} :]-1, 1[\rightarrow]-\omega, \omega[$$

est une fonction monotone, où

$$\omega = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}$$

et

$$f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x).$$

On a ainsi

$$f :]-\omega, \omega[\rightarrow]-1, 1[\quad \text{avec} \quad f(-u) = -f(u).$$

Etape 2 : extension à \mathbb{R} . On étend alors f à \mathbb{R} de la manière suivante (cf. Figure 13.4). D'abord à $]\omega, 3\omega[$ en écrivant

$$f(u) = -f(u - 2\omega)$$

puis par $4\omega = 2\pi$ périodicité, c'est à dire

$$f(u) = f(u + 4\omega).$$

On a, de la formule $f'(f^{-1}(x)) = 1/(f^{-1})'(x)$, que

$$\sin'(u) = f'(f^{-1}(x)) = \frac{1}{(f^{-1})'(x)} = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-(\sin u)^2}, \quad \text{si } u \in]-\omega, \omega[$$

puis comme ci dessus à \mathbb{R} . Et en particulier

$$\sin(4\omega) = \sin(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sin'(4\omega) = \sin'(0) = 1.$$

Etape 3 : extension à $i\mathbb{R}$. Pour l'étendre à $i\mathbb{R}$ on définit pour $u \in \mathbb{R}$

$$\sin(iu) = i \sinh(u).$$

En particulier on a

$$\sin(iu) = i \sinh(u) \quad \Rightarrow \quad i \sin'(iu) = i \sinh'(u) \quad \Rightarrow \quad \sin'(iu) = \sinh'(u).$$

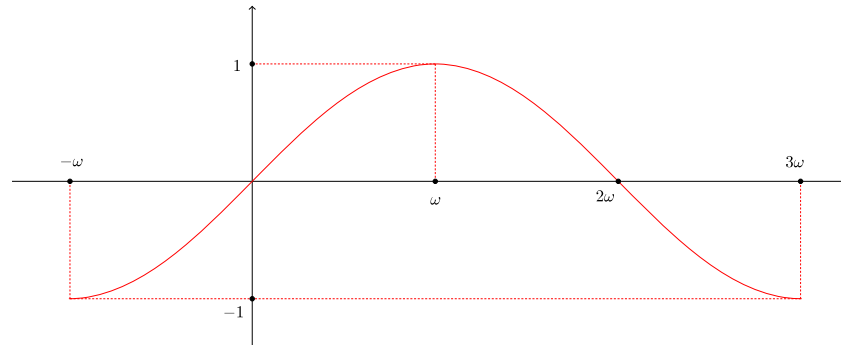


FIG. 13.4 –

Etape 4 : extension à \mathbb{C} . Pour étendre la fonction à tout \mathbb{C} on utilise la formule du sinus de la somme

$$\sin(u + v) = \sin u \sin' v + \sin v \sin' u.$$

Plus précisément

$$\begin{aligned} \sin(u + i v) &= \sin u \sin'(i v) + \sin(i v) \sin' u \\ &= \sin u \sinh' v + i \sinh v \sin' u. \end{aligned}$$

2) La fonction sl.

Etape 1 : la fonction sl sur $] -\omega, \omega[$. On a vu que

$$u = f^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \quad \Rightarrow \quad x = f(u) = \text{sl } u$$

Si on pose

$$\omega = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

on voit que

$$f^{-1} :]-1, 1[\rightarrow]-\omega, \omega[$$

est une fonction monotone et

$$f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x).$$

On a ainsi

$$f :]-\omega, \omega[\rightarrow]-1, 1[\quad \text{avec } f(-u) = -f(u).$$

Etape 2 : extension à \mathbb{R} . On étend alors $f = \text{sl}$ à \mathbb{R} de la manière suivante. D'abord à $]\omega, 3\omega[$ en écrivant

$$\text{sl}(u) = -\text{sl}(u - 2\omega)$$

puis par 4ω périodicité, c'est à dire

$$\operatorname{sl}(u) = \operatorname{sl}(u + 4\omega).$$

On a, de la formule $f'(f^{-1}(x)) = 1/(f^{-1})'(x)$, que

$$\operatorname{sl}'(u) = f'(f^{-1}(x)) = \frac{1}{(f^{-1})'(x)} = \sqrt{1-x^4} = \sqrt{1-(\operatorname{sl}(u))^4}, \quad \text{si } u \in]-\omega, \omega[$$

puis comme ci dessus à \mathbb{R} . Et en particulier

$$\operatorname{sl}(4\omega) = \operatorname{sl}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{sl}'(4\omega) = \operatorname{sl}'(0) = 1.$$

Etape 3 : extension à $i\mathbb{R}$. Pour l'étendre à $i\mathbb{R}$ on définit pour $u \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sl}(iu) = i \operatorname{sl}(u).$$

Ceci est intuitivement assez logique car, formellement,

$$f^{-1}(ix) = \int_0^{ix} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \stackrel{t=is}{=} i \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{1-(is)^4}} = i \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}} = i f^{-1}(x)$$

et donc (en posant $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u) = \operatorname{sl}(u)$)

$$ix = f(if^{-1}(x)) \Rightarrow i \operatorname{sl}(u) = \operatorname{sl}(iu).$$

En particulier on a

$$\operatorname{sl}(iu) = i \operatorname{sl}(u) \Rightarrow i \operatorname{sl}'(iu) = i \operatorname{sl}'(u) \Rightarrow \operatorname{sl}'(iu) = \operatorname{sl}'(u).$$

Etape 4 : extension à \mathbb{C} . Pour étendre la fonction à tout \mathbb{C} on utilise alors la *formule d'Euler* (cf. Proposition 13.16). On a vu que

$$f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}\left(\frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2}\right)$$

et donc ($u = f^{-1}(x)$ et $v = f^{-1}(y)$)

$$\operatorname{sl}(u+v) = \frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2} = \frac{\operatorname{sl}(u)\operatorname{sl}'(v) + \operatorname{sl}'(u)\operatorname{sl}(v)}{1 + [\operatorname{sl}(u)\operatorname{sl}(v)]^2}.$$

Ainsi il est naturel de définir la fonction sur \mathbb{C} par

$$\operatorname{sl}(u+iv) = \frac{\operatorname{sl}(u)\operatorname{sl}'(iv) + \operatorname{sl}'(u)\operatorname{sl}(iv)}{1 + [\operatorname{sl}(u)\operatorname{sl}(iv)]^2} = \frac{\operatorname{sl}(u)\operatorname{sl}'(v) + i\operatorname{sl}'(u)\operatorname{sl}(v)}{1 - [\operatorname{sl}(u)\operatorname{sl}(v)]^2}.$$

On est alors en mesure de voir la *double périodicité* de sl , plus précisément les périodes sont 4ω et $4i\omega$. La première c'est par construction mais revoyons le à nouveau

$$\operatorname{sl}(z+4\omega) = \frac{\operatorname{sl}(z)\operatorname{sl}'(4\omega) + i\operatorname{sl}'(z)\operatorname{sl}(4\omega)}{1 - [\operatorname{sl}(z)\operatorname{sl}(4\omega)]^2} = \frac{\operatorname{sl}(z).1 + i\operatorname{sl}'(z).0}{1 - [\operatorname{sl}(z).0]^2} = \operatorname{sl}(z).$$

Pour la seconde on a

$$\operatorname{sl}(z+4i\omega) = \frac{\operatorname{sl}(z)\operatorname{sl}'(4i\omega) + i\operatorname{sl}'(z)\operatorname{sl}(4i\omega)}{1 - [\operatorname{sl}(z)\operatorname{sl}(4i\omega)]^2} = \frac{\operatorname{sl}(z).1 + i\operatorname{sl}'(z).i.0}{1 - [\operatorname{sl}(z).i.0]^2} = \operatorname{sl}(z). \spadesuit$$

13.5.3 L'ordre d'une fonction elliptique

Avant de voir un autre exemple, on introduit la définition suivante.

Définition 13.22 *Le nombre total de pôles d'une fonction elliptique dans*

$$P_0 = \{z \in \mathbb{C} : z = a + b\tau \text{ avec } 0 \leq a < 1 \text{ et } 0 \leq b < 1\}$$

est appelé l'ordre de la fonction elliptique.

Remarque (i) Attention un pôle d'ordre 2 compte comme deux pôles....

(ii) P_0 est un parallélogramme semi ouvert. ♠

Proposition 13.23 *L'ordre d'une fonction elliptique est au moins 2.*

Démonstration *Etape 1.* Supposons tout d'abord qu'il n'y ait pas de pôles sur ∂P_0 . Par le Théorème des résidus on a

$$\int_{\partial P_0} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}_{z_k}(f).$$

Si on montre que l'intégrale est 0, on aura le résultat car $\sum \text{Res}_{z_k}(f) = 0$ et comme on sait par le Théorème de Liouville qu'il y a au moins une singularité, on déduit qu'il y en a au moins deux (avec la possibilité d'avoir un pôle d'ordre 2 et de résidu 0). Pour voir cela on écrit (cf. Figure 13.5)

$$\partial P_0 = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

avec

$$\gamma_1 = [0, 1] = \{\gamma_1(t) = t : t \in [0, 1]\}$$

$$\gamma_2 = [1, 1 + \tau] = \{\gamma_2(t) = 1 + t\tau : t \in [0, 1]\}$$

$$\gamma_3 = [1 + \tau, \tau] = -\{\gamma_3(t) = \tau + t : t \in [0, 1]\}$$

$$\gamma_4 = [\tau, 0] = -\{\gamma_4(t) = t\tau : t \in [0, 1]\}.$$

Or, en utilisant la périodicité,

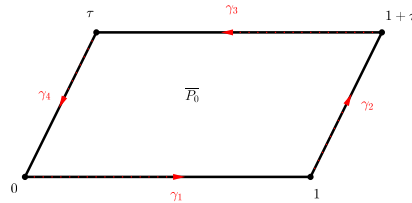


FIG. 13.5 –

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 f(\tau + t) dt = 0$$

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_4} f(z) dz = \tau \int_0^1 f(1 + t\tau) dt - \tau \int_0^1 f(t\tau) dt = 0.$$

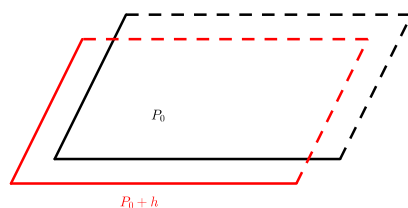


FIG. 13.6 –

Etape 2. Si la fonction f a des pôles sur ∂P_0 , alors (cf. Figure 13.6) comme ils sont isolés on a qu'il existe $h \in \mathbb{C}$ suffisamment petit (et en fait pour tout $h \neq 0$ suffisamment petit) tel que si $P = P_0 + h$, f n'a pas de pôles sur ∂P . Le raisonnement de l'étape précédente implique qu'il y a au moins deux pôles dans P et donc dans P_0 ($P_0 + h$ et P_0 portent la même information, par double périodicité). ■

13.5.4 La fonction \mathcal{P} de Weierstrass

On va maintenant revenir à la construction d'une autre fonction elliptique, celle de Weierstrass, qui est une fonction elliptique d'ordre 2. On va d'abord définir la fonction de façon intuitive, puis de façon rigoureuse. Si on définit le *treillis*

$$\Lambda = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega = m + n\tau \text{ avec } m, n \in \mathbb{Z}\}$$

il est clair que, formellement, la fonction elliptique d'ordre 2 (avec périodes 1 et τ) la plus simple possible doit être de la forme

$$\sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z + \omega)^2} = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z + m + n\tau)^2}.$$

C'est en fait l'essence de la fonction de Weierstrass, mais il faut corriger la fonction ci-dessus car la série diverge. La *fonction de Weierstrass* est donc définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{(m, n) \neq (0, 0)} \left[\frac{1}{(z + m + n\tau)^2} - \frac{1}{(m + n\tau)^2} \right] \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in \Lambda \\ \omega \neq 0}} \left[\frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]. \end{aligned}$$

Théorème 13.24 *La fonction \mathcal{P} est une fonction paire, elliptique d'ordre 2 qui a pour périodes 1 et τ . Son pôle (d'ordre 2) dans P_0 est en 0. Tous les points du treillis*

$$\Lambda = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega = m + n\tau \text{ avec } m, n \in \mathbb{Z}\}$$

sont des pôles d'ordre 2. De plus

$$[\mathcal{P}'(z)]^2 = 4 \left(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\right) \right) \left(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}\left(\frac{\tau}{2}\right) \right) \left(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}\left(\frac{\tau+1}{2}\right) \right).$$

Remarque De la formule sur la dérivée, on comprend la formule avec l'intégrale elliptique. Formellement on a en effet

$$\frac{\mathcal{P}'(z)}{\sqrt{4(\mathcal{P}(z) - \alpha)(\mathcal{P}(z) - \beta)(\mathcal{P}(z) - \gamma)}} = 1,$$

où $\alpha = \mathcal{P}(1/2)$, $\beta = \mathcal{P}(\tau/2)$, $\gamma = \mathcal{P}((\tau+1)/2)$, et donc

$$\int_0^{\mathcal{P}(u)} \frac{dt}{\sqrt{4(t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma)}} = u$$

ce qui implique

$$u = \mathcal{P}^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4(t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma)}}.$$

On peut même montrer (cf. Stein-Shakarchi [24] Corollaire 2.3 page 275) qu'il existe $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ tels que

$$4(\mathcal{P}(z) - \alpha)(\mathcal{P}(z) - \beta)(\mathcal{P}(z) - \gamma) = 4[\mathcal{P}(z)]^3 - g_2\mathcal{P}(z) - g_3. \spadesuit$$

On aura besoin du lemme suivant (cf. Stein-Shakarchi [24] Lemme 1.5 page 268).

Lemme 13.25 *Si $r > 2$ et si $\text{Im } \tau \neq 0$, alors les deux séries suivantes convergent*

$$\sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(|m| + |n|)^r} \quad \text{et} \quad \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m + n\tau)^r} = \sum_{\omega \in \Lambda^*} \frac{1}{\omega^r}.$$

où $\Lambda^* = \Lambda \setminus \{0\}$ avec

$$\Lambda = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega = m + n\tau \text{ avec } m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Démonstration (i) Si $m \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(|m| + |n|)^r} &= \frac{1}{|m|^r} + 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(|m| + n)^r} = \frac{1}{|m|^r} + 2 \sum_{k \geq |m|+1} \frac{1}{k^r} \\ &\leq \frac{1}{|m|^r} + 2 \int_{|m|}^{+\infty} \frac{dx}{x^r} = \frac{1}{|m|^r} + \frac{2}{(r-1)|m|^{r-1}}. \end{aligned}$$

On déduit donc que

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(|m|+|n|)^r} &= \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|^r} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(|m|+|n|)^r} \\ &\leq \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|^r} + \sum_{m \neq 0} \left[\frac{1}{|m|^r} + \frac{2}{(r-1)|m|^{r-1}} \right]. \end{aligned}$$

Comme $r > 2$, on a le résultat.

(ii) Pour montrer la convergence de la deuxième série il suffit de montrer qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que ($\tau = \alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$)

$$|m| + |n| \leq \gamma |m + n\tau| \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

et d'utiliser la convergence de la première série.

Quitte à changer la constante γ et le rôle de m et n on peut supposer que $|\alpha| < 1$. En effet, si $|\alpha| \geq 1$, on écrit

$$|m + n\tau| = |\tau| \left| \frac{m}{\tau} + n \right| \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + i \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

et donc, comme $|\alpha| \geq 1$ et $\beta \neq 0$,

$$\frac{|\alpha|}{\alpha^2 + \beta^2} < 1.$$

On peut donc supposer que $\tau = \alpha + i\beta$ avec $|\alpha| < 1$ et $\beta \neq 0$. On écrit alors

$$\begin{aligned} |m + n\tau| &= \left[|m + n\alpha|^2 + |n\beta|^2 \right]^{1/2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} [|m + n\alpha| + |n\beta|] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \min\{1, |\beta|\} [|m + n\alpha| + |n|] \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} |m + n\tau| &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \min\{1, |\beta|\} [|m| - |n||\alpha| + |n|] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \min\{1, |\beta|\} [|m| + (1 - |\alpha|)|n|] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \min\{1, |\beta|\} \min\{1, (1 - |\alpha|)\} [|m| + |n|] \end{aligned}$$

et c'est ce qu'il fallait démontrer. ■

On continue maintenant avec la démonstration du théorème.

Démonstration (Théorème 13.24). *Etape 1.* La fonction est bien méromorphe avec des pôles d'ordre 2 en tous les points de Λ . Pour cela il suffit

donc de voir que sur tout compact de \mathbb{C} , il y a seulement un nombre fini de singularités, qui sont de plus des pôles. Soit donc $|z| \leq R$, on écrit alors

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{\omega \in \Lambda^* \\ |\omega| \leq 2R}} \left[\frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] + \sum_{\substack{\omega \in \Lambda^* \\ |\omega| > 2R}} \left[\frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right].$$

1) Les deux premiers termes sont bien méromorphes dans $|z| \leq R$ (car c'est une somme finie qui a seulement des pôles d'ordre 2 en $(-\omega) \in \Lambda$ et $|\omega| \leq 2R$).

2) Le troisième terme est holomorphe dans $|z| \leq R$. En effet

$$\frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{-z^2}{\omega^2 (z + \omega)^2} - \frac{2z}{\omega (z + \omega)^2}$$

est holomorphe car, comme $|z| \leq R \leq |\omega|/2$,

$$|\omega + z| \geq |\omega| - |z| = \frac{1}{2} |\omega| + \left(\frac{1}{2} |\omega| - |z| \right) \geq \frac{1}{2} |\omega| > 0$$

on déduit que

$$\left| \frac{1}{\omega^2 (z + \omega)^2} \right| \leq \frac{4}{|\omega|^4} \quad \text{et} \quad \left| \frac{2z}{\omega (z + \omega)^2} \right| \leq \frac{4}{|\omega|^3}.$$

Par le lemme précédent et le Théorème de Weierstrass on déduit que

$$\sum_{\substack{\omega \in \Lambda^* \\ |\omega| > 2R}} \left[\frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] = -z^2 \sum_{\substack{\omega \in \Lambda^* \\ |\omega| > 2R}} \frac{1}{\omega^2 (z + \omega)^2} - 2z \sum_{\substack{\omega \in \Lambda^* \\ |\omega| > 2R}} \frac{1}{\omega (z + \omega)^2}$$

est holomorphe dans $|z| \leq R$.

Etape 2. La fonction \mathcal{P} est clairement paire car

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(-z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda^*} \left[\frac{1}{(-z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{-\omega \in \Lambda^*} \left[\frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] = \mathcal{P}(z). \end{aligned}$$

Etape 3. La dérivée est donnée par

$$\mathcal{P}'(z) = -2 \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z + m + n\tau)^3} = \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{-2}{(z + \omega)^3}.$$

On voit que, par le lemme précédent et le Théorème de Weierstrass, c'est une fonction méromorphe dont les pôles sont d'ordre 3 et se trouvent sur Λ . Par ailleurs on a clairement

$$\mathcal{P}'(z + 1) = \mathcal{P}'(z + \tau) = \mathcal{P}'(z).$$

C'est donc une fonction elliptique d'ordre 3.

Etape 4. En intégrant la formule précédente on trouve qu'il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{C}$ telles que

$$\mathcal{P}(z+1) = \mathcal{P}(z) + a \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(z+\tau) = \mathcal{P}(z) + b.$$

Par ailleurs comme \mathcal{P} est paire on a

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\right) = \mathcal{P}\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}\left(\frac{\tau}{2}\right) = \mathcal{P}\left(-\frac{\tau}{2}\right).$$

En combinant les deux identités on déduit que $a = b = 0$ et donc \mathcal{P} est bien doublement périodique de périodes 1 et τ .

Etape 5. Pour la formule sur la dérivée cf. Stein-Shakarchi [24] Théorème 1.7 page 271. ■

L'importance de la fonction de Weierstrass est résumée dans le théorème suivant (cf. Stein-Shakarchi [24] Théorème 1.8 page 271).

Théorème 13.26 *Toute fonction elliptique de périodes 1 et τ est une fonction rationnelle de \mathcal{P} et de \mathcal{P}' .*

13.6 La fonction hypergéométrique

On définit la fonction *hypergéométrique* (cf. aussi Chapitre 22) par la série (hypergéométrique) suivante ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$)

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} \frac{z^n}{n!}$$

pour autant que $|z| < 1$ et $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$.

On écrira souvent pour $n \in \mathbb{N}$

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$$

avec la convention que $(\alpha)_0 = 1$. Ainsi la fonction hypergéométrique s'écrit

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

1) La série clairement converge quand $|z| < 1$ par le critère de d'Alembert, en effet

$$\frac{\left| \frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}} \right| \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\left| \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n} \right| \frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|\alpha+n| |\beta+n|}{|\gamma+n| (n+1)} |z| \rightarrow |z|, \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

2) Noter que si $\alpha = \beta = \gamma = 1$, on trouve alors

$$F(1, 1, 1, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

qui est la série *géométrique*, d'où la dénomination d'hypergéométrique.

3) On a les expressions suivantes, si $|z| < 1$, (cf. Olver [20] page 161 et Stein-Shakarchi [24] page 176)

$$(1-z)^{-\alpha} = F(\alpha, 1, 1, z), \quad \log(1+z) = z F(1, 1, 2, -z), \quad e^z = \lim_{\beta \rightarrow \infty} F(1, \beta, 1, z/\beta)$$

$$\arcsin z = z F(1/2, 1/2, 3/2, z^2), \quad \operatorname{arctg} z = z F(1/2, 1, 3/2, -z^2).$$

4) Quand (cf. Stein-Shakarchi [24] page 176) $\alpha, \beta > 0, \gamma > \beta$ et $|z| < 1$, alors

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-zt)^{-\alpha} dt.$$

5) Si $n \in \mathbb{N}$, alors (cf. Olver [20] page 174)

$$P_n(z) = F(n+1, -n, 1, (1-z)/2)$$

est un polynôme de degré n en z (appelé *polynôme de Legendre*) et

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(k+1)_k}{2^k k!} z^k.$$

6) Observer que, si $|z| < 1$, c'est une solution de l'équation différentielle (appelée équation *hypergéométrique*)

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0.$$

En effet

$$u'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{et} \quad u''(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^{n-2}}{(n-2)!}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} z(1-z)u'' &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^{n-1}}{(n-2)!} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{(n-2)!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha)_{n+1} (\beta)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}} \frac{z^n}{(n-1)!} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{(n-2)!} \\ &= [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' \\ &= \gamma \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} - (\alpha + \beta + 1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{(n-1)!} \\ &= \gamma \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_{n+1} (\beta)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}} \frac{z^n}{n!} - (\alpha + \beta + 1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{(n-1)!} \end{aligned}$$

$$-\alpha \beta u = -\alpha \beta \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}.$$

Si on regarde donc les termes en z^0 , dans $z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u$, on a

$$\gamma \frac{(\alpha)_1 (\beta)_1}{(\gamma)_1} - \alpha \beta \frac{(\alpha)_0 (\beta)_0}{(\gamma)_0} = 0$$

de même le terme en z^1 donne

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha)_2 (\beta)_2}{(\gamma)_2} + \gamma \frac{(\alpha)_2 (\beta)_2}{(\gamma)_2} - (\alpha + \beta + 1) \frac{(\alpha)_1 (\beta)_1}{(\gamma)_1} - \alpha \beta \frac{(\alpha)_1 (\beta)_1}{(\gamma)_1} \\ = & \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} + \frac{\gamma\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} - (\alpha + \beta + 1) \frac{\alpha\beta}{\gamma} - \alpha\beta \frac{\alpha\beta}{\gamma} \\ = & \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} + \frac{\gamma\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} - \alpha\beta \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha)_2 (\beta)_2}{(\gamma)_2} + \gamma \frac{(\alpha)_2 (\beta)_2}{(\gamma)_2} - (\alpha + \beta + 1) \frac{(\alpha)_1 (\beta)_1}{(\gamma)_1} - \alpha \beta \frac{(\alpha)_1 (\beta)_1}{(\gamma)_1} \\ = & \alpha \beta \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma} \left[\frac{1}{\gamma+1} + \frac{\gamma}{\gamma+1} - 1 \right] = 0. \end{aligned}$$

Enfin les termes en z^n donnent

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha)_{n+1} (\beta)_{n+1}}{(n-1)! (\gamma)_{n+1}} - \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(n-2)! (\gamma)_n} + \gamma \frac{(\alpha)_{n+1} (\beta)_{n+1}}{n! (\gamma)_{n+1}} \\ & - (\alpha + \beta + 1) \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(n-1)! (\gamma)_n} - \alpha \beta \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} \\ = & \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} \left[n \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)} - n(n-1) + \gamma \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)} \right. \\ & \left. - n(\alpha + \beta + 1) - \alpha\beta \right] \\ = & 0. \end{aligned}$$

13.7 Les fonctions de Bessel

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, on définit (cf. aussi Chapitre 22)

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)! 2^{2k}} z^{2k}.$$

1) La série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ par le critère de d'Alembert car

$$\frac{k! (n+k)! 2^{2k}}{(k+1)! (n+k+1)! 2^{2k+2}} |z|^2 = \frac{|z|^2}{4(k+1)(n+k+1)} \rightarrow 0, \quad \text{si } k \rightarrow \infty.$$

Par conséquent $J_n(z)$ est une fonction holomorphe dans \mathbb{C} .

2) Noter qu'on peut réécrire la définition comme

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1) 2^{2k}} z^{2k}$$

ce qui permet de donner un sens à la fonction de Bessel même si $n \notin \mathbb{N}$.

3) On peut montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, alors (cf. Olver [20] page 55)

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos((n\theta) - z \sin \theta) d\theta.$$

4) Les fonctions de Bessel satisfont l'équation de Bessel

$$z^2 u'' + z u' + (z^2 - n^2) u = 0.$$

On va vérifier cela seulement si $n = 0$, mais le cas général est très semblable. L'équation est ainsi

$$z^2 u'' + z u' + z^2 u = z \left[(z u')' + z u \right] = 0$$

Soit alors

$$u(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} z^{2k}$$

et donc

$$z u'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} z^{2k} \quad \text{et} \quad (z u')' = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)^2 (-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} z^{2k-1}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} (z u')' + z u &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)^2 (-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} z^{2k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} z^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k+2)^2 (-1)^{k+1}}{((k+1)!)^2 2^{2k+2}} z^{2k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} z^{2k+1} \end{aligned}$$

et ainsi le terme en z^{2k+1} est

$$\frac{(2k+2)^2 (-1)^{k+1}}{((k+1)!)^2 2^{2k+2}} + \frac{(-1)^k}{(k!)^2 2^{2k}} = 0.$$

13.8 Exercices

Exercice 13.1 Soient $\operatorname{Re} z > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt.$$

Montrer que

$$\Gamma_n(z) = \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}.$$

Exercice 13.2 Soit $n \geq 1$ un entier et soit

$$T = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^k}{k n^{k-1}}.$$

(i) Soient $0 < t < n$. Montrer que

$$\log[(1 - t/n)^n] = -(t + T)$$

et en déduire l'inégalité

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}, \quad \text{si } 0 < t < n.$$

On rappelle que

$$\log(1 - x) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}, \quad \text{si } |x| < 1.$$

(ii) Soit $0 < t < n/2$. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$1 - e^{-T} \leq T \leq c \frac{t^2}{n}$$

et en déduire l'inégalité

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq c \frac{t^2}{n} e^{-t}, \quad \text{si } 0 < t < n/2.$$

Exercice 13.3 Soient $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites telles que $b_n \geq b_{n+1} > 0$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ et il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq \gamma, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Montrer que la suite $\sum_{n=1}^N a_n b_n$ converge (ceci est le critère de Dirichlet).

Suggestion. On pourra utiliser l'Etape 1 du Lemme 13.13 à savoir

$$\sum_{n=1}^N a_n b_n = \sum_{n=1}^{N-1} \left[(b_n - b_{n+1}) \sum_{i=1}^n a_i \right] + b_N \sum_{i=1}^N a_i.$$

13.9 Corrigés

Exercice 13.1 En faisant une intégration par parties, on obtient

$$\Gamma_n(z) = \frac{n}{nz} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^z dt.$$

Si on intègre de nouveau, on infère que

$$\Gamma_n(z) = \frac{n(n-1)}{n^2 z(z+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{z+1} dt.$$

On répète le procédé n fois et on trouve à la n -ème intégration on obtient

$$\Gamma_n(z) = \frac{n!}{n^n \prod_{k=0}^{n-1} (z+k)} \int_0^n t^{z+n-1} dt = \frac{n! n^z}{\prod_{k=0}^n (z+k)}. \spadesuit$$

Exercice 13.2 (i) Observer qu'on a

$$T = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^k}{k n^{k-1}} = n \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{n}\right)^k.$$

Si $0 < t < n$, on trouve alors

$$\log[(1 - t/n)^n] = n \log\left(1 - \frac{t}{n}\right) = -n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{n}\right)^k = -(t + T).$$

On déduit ainsi que

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-(t+T)} \leq e^{-t}.$$

(ii) Pour montrer l'inégalité $1 - e^{-T} \leq T$, il suffit de voir que la fonction

$$f(t) = 1 - e^{-t} - t, \quad \forall t \geq 0$$

satisfait

$$f(0) = 0, \quad f'(t) \leq 0$$

et donc $f(t) \leq 0$. D'autre part, si $t < \frac{n}{2}$ (c'est à dire $\frac{t}{n} < \frac{1}{2}$) alors

$$T = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^k}{k n^{k-1}} = \frac{t^2}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+2} \left(\frac{t}{n}\right)^k \leq \frac{t^2}{n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{-k}}{k+2} = c \frac{t^2}{n}$$

où on a posé

$$c = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{-k}}{k+2} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1.$$

En regroupant les inégalités qui précèdent et (i), nous avons finalement

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t} - e^{-(t+T)} = e^{-t} (1 - e^{-T}) \leq e^{-t} T \leq c e^{-t} \frac{t^2}{n}. \quad \spadesuit$$

Exercice 13.3 Il suffit de montrer que la suite $u_N = \sum_{n=1}^N a_n b_n$ est une suite de Cauchy. Soit $N > M$ et observons que

$$\begin{aligned} \sum_{n=M+1}^N a_n b_n &= \sum_{n=M}^{N-1} \left[(b_n - b_{n+1}) \sum_{i=1}^n a_i \right] + b_N \sum_{i=1}^N a_i - b_M \sum_{i=1}^M a_i \\ &= \sum_{n=M}^{N-1} \left[(b_n - b_{n+1}) \sum_{i=1}^n a_i \right] + b_N \sum_{i=M+1}^N a_i + (b_N - b_M) \sum_{i=1}^M a_i. \end{aligned}$$

On a ainsi immédiatement que

$$|u_N - u_M| = \left| \sum_{n=M+1}^N a_n b_n \right| \leq 2\gamma (b_M - b_N) + \gamma b_N$$

et donc $\{u_N\}$ est bien une suite de Cauchy. \spadesuit

Troisième partie

Intégrale de Lebesgue

Chapitre 14

Préliminaires

14.1 Intégrale de Riemann

Notation Soient $a < b$, $\bar{I} = [a, b]$ et

$$f : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R} \text{ bornée.}$$

(i) Σ = ensemble des partitions de \bar{I} en un nombre fini d'intervalles, c'est à dire que $\sigma \in \Sigma$, si

$$\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

Pour $\sigma \in \Sigma$ et pour $k = 1, \cdots, n$, on écrit

$$m_k = \inf \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

$$M_k = \sup \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

$$m = \inf \{f(x) : a \leq x \leq b\}$$

$$M = \sup \{f(x) : a \leq x \leq b\}.$$

Comme f est bornée on a toujours

$$-\infty < m \leq m_k \leq M_k \leq M < +\infty, \quad k = 1, \cdots, n.$$

(ii) On dénote par

$$\underline{s}_\sigma = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

$$\overline{s}_\sigma = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

et ainsi

$$m(b-a) \leq \underline{s}_\sigma \leq \overline{s}_\sigma \leq M(b-a).$$

(iii) On pose

$$\underline{s} = \sup \{ \underline{s}_\sigma : \sigma \in \Sigma \}$$

$$\overline{s} = \inf \{ \overline{s}_\sigma : \sigma \in \Sigma \}$$

et ceci implique

$$\underline{s} \leq \overline{s}. \quad \spadesuit$$

Définition 14.1 On dit que f est **R-intégrable** sur $[a, b]$ si $\underline{s} = \overline{s}$ et on pose

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{s} = \overline{s}.$$

Exemple (i) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors (cf. Exercice 14.1) f est R-intégrable.

(ii) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par intervalle et bornée (i.e. f a un nombre fini de discontinuités), alors f est R-intégrable.

(iii) Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \text{ mais } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Alors soit σ une subdivision de $[0, 1]$, on a que

$$[\underline{s}_\sigma = 0 \quad \text{et} \quad \overline{s}_\sigma = 1] \quad \Rightarrow \quad [\underline{s} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{s} = 1]$$

et donc f n'est pas R-intégrable.

(Il faut pourtant observer dans ce cas précis un phénomène de passage à la limite intéressant. Soit $\epsilon > 0$ petit, on choisit une partition quelconque de

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{x_0 = 0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$$

et on définit une suite de fonctions

$$f_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_n - \frac{\epsilon}{n^2} \leq x \leq x_n + \frac{\epsilon}{n^2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquer que les f_ϵ sont R-intégrables car continues par morceaux (sur un nombre infini de morceaux) et de plus

$$\int_0^1 f_\epsilon(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon}{n^2} = \frac{\pi^2 \epsilon}{3}.$$

Par ailleurs

$$f_\epsilon(x) \rightarrow f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \text{ mais } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Mais $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est pas R-intégrable, alors qu'elle est limite de fonctions R-intégrables.)

(iv) Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = \alpha_k, \quad \text{si } \frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

avec α_k une suite décroissante telle que $\alpha_k > 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$, alors

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{1}{k(k+1)} < \infty.$$

En effet soit $\epsilon > 0$ et soit N suffisamment grand pour que

$$\frac{\alpha_N}{N+1} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Comme f est continue par morceaux sur $[1/N, 1]$, on a que f est R-intégrable et

$$\int_{1/N}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\alpha_j}{j(j+1)}.$$

De même f étant R-intégrable, il existe une partition $\tilde{\sigma}$ de $]1/N, 1]$ telle que

$$0 \leq \overline{s}_{\tilde{\sigma}} - \underline{s}_{\tilde{\sigma}} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit

$$\sigma = \{0 = x_0 < x_1 = 1/N\} \cup \tilde{\sigma}$$

alors $m_1 = 0$ et $M_1 = \alpha_N$ ainsi que

$$\underline{s}_{\sigma} = \underline{s}_{\tilde{\sigma}} \quad \text{et} \quad \overline{s}_{\sigma} = \frac{\alpha_N}{N+1} + \overline{s}_{\tilde{\sigma}}$$

et par conséquent

$$0 \leq \overline{s}_{\sigma} - \underline{s}_{\sigma} \leq \epsilon.$$

On a donc que f est R-intégrable et

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j(j+1)}. \quad \spadesuit$$

14.2 Quelques notations et théorèmes importants

Définition 14.2 Soit $A \subset \mathbb{R}$.

(i) S'il existe G_n des ouverts tels que

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

alors A est dit un ensemble G_δ .

(ii) S'il existe F_n des fermés tels que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

alors A est dit un ensemble F_σ .

Notation Soient $A, B \subset \mathbb{R}$. On dénote par

- A^c le complémentaire dans \mathbb{R} de A
- $A \setminus B = A \cap B^c$
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. ♠

Axiome 14.3 (Axiome du choix) Soit A un ensemble d'indices et soit

$$\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

une collection non vide d'ensembles disjoints non vides (c'est à dire $E_\alpha \neq \emptyset$ et $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$) avec $E_\alpha \subset E$, alors il existe $V \subset E$ qui contient juste un élément de chacun des ensembles E_α .

Théorème 14.4 (Théorème de Heine-Borel) Soit $E \subset \mathbb{R}$ un fermé borné avec

$$E \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

où les G_α sont ouverts et A est un ensemble d'indices, alors il existe une sous collection finie telle que

$$E \subset \bigcup_{i=1}^n G_i.$$

Théorème 14.5 (Théorème de Lindelöf) Soit

$$\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

une collection d'intervalles ouverts, alors il existe une sous collection, au plus dénombrable $\{I_i, i = 1, 2, \dots\}$, telle que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha.$$

Démonstration cf. Exercice 14.3. ■

Corollaire 14.6 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert, alors Ω est l'union, au plus dénombrable, d'intervalles ouverts disjoints.

Démonstration cf. Exercice 14.4. ■

14.3 Complément

Définition 14.7 (i) On dit que $a \in \mathbb{R}$ est un **point limite** de $A \subset \mathbb{R}$, si pour tout $r > 0$ tel que

$$]a - r, a + r[\cap (A - \{a\}) \neq \emptyset.$$

(ii) On dit que $a \in \mathbb{R}$ est un **point isolé** de $A \subset \mathbb{R}$, s'il existe $r > 0$ tel que

$$]a - r, a + r[\cap A = \{a\}.$$

(iii) On dit que $A \subset \mathbb{R}$ est **parfait**, si A n'a pas de points isolés.

(iv) On dit que $A \subset \mathbb{R}$ est **nul part dense**, si \overline{A} ne contient aucun intervalle.

Remarque Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est nul part dense si et seulement si \overline{A}^c est dense. ♠

14.4 Exercices

Exercice 14.1 Montrer que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors f est intégrable au sens de Riemann.

Exercice 14.2 (i) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que

$$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c, \quad f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i)$$

$$[A \cap (B \cup C)] \cap B = A \cap B, \quad [A \cap (B \cup C)] \cap B^c = A \cap B^c \cap C$$

$$B \subset A \quad \Rightarrow \quad B = A \setminus (A \setminus B)$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [A_i \setminus B_i], \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=1}^i A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \right].$$

Exercice 14.3 Montrer le théorème de Lindelöf (Théorème 14.5).

Indication. Utiliser la densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} .

Exercice 14.4 Montrer le Corollaire 14.6.

Indication. Considérer la relation d'équivalence \sim définie sur Ω par

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad [a, b] \subset \Omega \quad \text{ou} \quad [b, a] \subset \Omega,$$

et montrer que les classes d'équivalence sont des intervalles ouverts.

14.5 Corrigés

Exercice 14.1 Comme f est continue sur un compact, on déduit que f est uniformément continue, c'est à dire que $\forall \epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Si on prend une partition σ avec $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, alors

$$M_k - m_k < \epsilon \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \bar{s}_\sigma - \underline{s}_\sigma < \epsilon(b - a).$$

Finalement

$$0 \leq \bar{s} - \underline{s} = (\bar{s} - \bar{s}_\sigma) + (\bar{s}_\sigma - \underline{s}_\sigma) + (\underline{s}_\sigma - \underline{s}) \leq (\bar{s}_\sigma - \underline{s}_\sigma) \leq \epsilon(b - a)$$

et donc f est R-intégrable. ♠

Exercice 14.2 Les huit premières assertions sont triviales. Il suffit de se rappeler (pour les cinq premières) que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors pour tout $E \subset \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in E\}.$$

Montrons l'avant dernière assertion

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i & \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}, x \in A_i, \forall j \in \mathbb{N}, x \notin B_j \\ & \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}, x \in A_i, x \notin B_i \\ & \Rightarrow \Rightarrow \exists i \in \mathbb{N}, x \in A_i \setminus B_i \\ & \Rightarrow x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} [A_i \setminus B_i]. \end{aligned}$$

Pour la dernière affirmation, il est clair que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=1}^i A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \right].$$

Montrons l'autre inclusion. Nous remarquons d'abord que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=1}^i A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \right] \supset \bigcup_{k=1}^1 A_k \setminus \bigcup_{k=1}^0 A_k = A_1 \setminus \emptyset = A_1.$$

Soit $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Si $x \in A_1$, alors par ce qui précède

$$x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=1}^i A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \right].$$

D'autre part, si $x \in [\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] \setminus A_1$, il existe alors $j \geq 2$ tel que $x \in A_j$ et $x \notin A_k$ pour tout $1 \leq k < j$. Il s'ensuit que

$$x \in A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=1}^i A_k \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} A_k \right]. \quad \spadesuit$$

Exercice 14.3 (cf. Théorème 7 page 11 de [10]). Posons

$$B = \bigcup_{\alpha \in A} I_{\alpha}.$$

Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} , pour tout $x \in B$, il existe $J_x =]a_x, b_x[$ tel que

$$a_x, b_x \in \mathbb{Q}, \quad x \in J_x \subset I_{\alpha},$$

pour un certain $\alpha \in A$. Par construction, nous avons donc

$$\bigcup_{\alpha \in A} I_{\alpha} = \bigcup_{x \in B} J_x.$$

Puisque l'ensemble $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ est dénombrable, la collection des intervalles $\{J_x\}_{x \in B}$ est au plus dénombrable. C'est à dire qu'il existe une collection $\{J_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \{J_x\}_{x \in B}$ telle que

$$\bigcup_{\alpha \in A} I_{\alpha} = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i.$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on choisit ensuite un intervalle $I_i \in \{I_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ tel que

$$I_i \supset J_i.$$

Il s'ensuit que

$$\bigcup_{\alpha \in A} I_{\alpha} = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subset \bigcup_{\alpha \in A} I_{\alpha},$$

d'où le résultat. ♠

Exercice 14.4 (cf. Théorème 9 page 12 de [10]). Il est élémentaire de voir que \sim est une relation d'équivalence. Par conséquent, Ω est l'union disjointe des classes d'équivalence de \sim . Soit $C(a)$ la classe d'équivalence contenant a et montrons d'abord qu'il s'agit d'un intervalle ouvert.

Intervalle : Il suffit de montrer que $C(a)$ est connexe. Par transitivité de \sim , il est facile de voir que

$$b \in C(a) \Rightarrow [a, b] \subset C(a) \quad \text{ou} \quad [b, a] \subset C(a).$$

Par conséquent, pour tout $b, c \in C(a)$, nous avons immédiatement $[b, c] \subset C(a)$ ou $[c, b] \subset C(a)$, et donc $C(a)$ est un intervalle.

Ouvert : Puisque Ω est ouvert, alors pour tout $b \in C(a)$, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$]b - \epsilon, b + \epsilon[\subset \Omega.$$

Par transitivité de \sim ,

$$c \in]b - \epsilon, b + \epsilon[\Rightarrow c \sim b \Rightarrow c \sim a \Rightarrow c \in C(a),$$

ce qui prouve que $C(a)$ est ouvert.

Conclusion : Ω est l'union disjointe d'intervalles ouverts $\{C(a)\}$. Par l'exercice précédent, cette union admet un recouvrement dénombrable, d'où le résultat. ♠

Chapitre 15

Mesure sur les réels

15.1 Mesure extérieure

Définition 15.1 On appelle *mesure extérieure* (de Lebesgue) d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$, et on note

$$\text{mes}^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : I_n =]a_n, b_n[, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}.$$

On notera aussi

$$\text{long}(I_n) = b_n - a_n.$$

Rappel On va utiliser constamment que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1. \quad \spadesuit$$

On a facilement le résultat suivant.

Théorème 15.2 Pour tout $A, B \subset \mathbb{R}$ les propriétés suivantes ont lieu :

- (i) $\text{mes}^*(A) \geq 0$,
- (ii) $\text{mes}^*(\emptyset) = 0$,
- (iii) $A \subset B \Rightarrow \text{mes}^*(A) \leq \text{mes}^*(B)$,
- (iv) $\text{mes}^*(\{x\}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$,
- (v) si

$$A + x = \{y + x : y \in A\}$$

alors

$$\text{mes}^*(A + x) = \text{mes}^*(A).$$

Démonstration (i), (ii), (iii) sont évidents.

(iv) Comme $x \in I_n =]x - 1/2n, x + 1/2n[$, alors

$$\text{long}(I_n) = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \text{mes}^*(\{x\}) \leq \frac{1}{n}$$

d'où le résultat.

(v) Par définition, $\forall \epsilon > 0, \exists I_n$ avec $A \subset \cup I_n$ et

$$\text{mes}^*(A) \geq \sum \text{long}(I_n) - \epsilon.$$

Mais

$$A + x \subset \cup (I_n + x),$$

ce qui implique

$$\text{mes}^*(A + x) \leq \sum \text{long}(I_n + x) = \sum \text{long}(I_n) \leq \text{mes}^*(A) + \epsilon$$

et donc

$$\text{mes}^*(A + x) \leq \text{mes}^*(A).$$

On a de même

$$\text{mes}^*(A) = \text{mes}^*(A + x - x) \leq \text{mes}^*(A + x).$$

D'où le résultat. ■

Théorème 15.3 *La mesure extérieure d'un intervalle est égale à sa longueur.*

Démonstration *Etape 1.* Supposons que $J_n =]c_n, d_n[$ soient tels que

$$]a, b[\subset [a, b] \subset \bigcup_{n=1}^N J_n$$

alors (cf. Exercice 15.1)

$$b - a \leq \sum_{n=1}^N \text{long}(J_n).$$

Etape 2. $I =]a, b[$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. Alors, par définition,

$$\text{mes}^*(I) \leq b - a.$$

Montrons l'inégalité inverse.

1) Soit $\epsilon > 0$ fixé. Par définition de la mesure extérieure, on peut trouver $I_n =]a_n, b_n[$, tels que

$$I \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{long}(I_n) - \epsilon \leq \text{mes}^*(I).$$

2) On définit

$$I'_n =]a_n - \epsilon/2^n, b_n + \epsilon/2^n[\supset I_n \quad \Rightarrow \quad \text{long}(I'_n) = \text{long}(I_n) + \frac{2\epsilon}{2^n}$$

et par conséquent

$$]a, b[\subset [a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I'_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{long}(I'_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{long}(I_n) + 2\epsilon.$$

3) Par le Théorème de Heine-Borel, on a qu'il existe un sous recouvrement fini de $[a, b]$ et donc

$$\{J_n\}_{n=1}^N \subset \{I'_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{avec} \quad]a, b[\subset [a, b] \subset \bigcup_{n=1}^N J_n.$$

On a par l'Étape 1 que

$$b - a \leq \sum_{n=1}^N \text{long}(J_n).$$

Par ailleurs comme chaque J_n est un des I'_n (disons pour simplifier $J_n = I'_n$) on a

$$\sum_{n=1}^N \text{long}(J_n) = \sum_{n=1}^N \text{long}(I'_n).$$

4) En regroupant les deux calculs précédents on trouve

$$b - a \leq \sum_{n=1}^N \text{long}(J_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{long}(I'_n)$$

et donc

$$\begin{aligned} b - a &\geq \text{mes}^*(I) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{long}(I_n) - \epsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \text{long}(I'_n) - 3\epsilon \\ &\geq \sum_{n=1}^N \text{long}(J_n) - 3\epsilon \geq b - a - 3\epsilon. \end{aligned}$$

Comme ϵ est arbitraire, on a l'assertion.

Étape 3. $I = [a, b]$, ou bien $[a, b[$ ou $]a, b]$ avec a et b fini. On a alors

$$]a, b[\subset I \subset]a - \epsilon/2, b + \epsilon/2[$$

et par l'Étape 2 et le Théorème 15.2 (iii)

$$b - a \leq \text{mes}^*(I) \leq b - a + \epsilon.$$

Comme ϵ est arbitraire on a le résultat

Étape 4. Voyons un cas d'un intervalle infini, par exemple (les autres sont traités de manière analogue)

$$I =]a, +\infty[.$$

On a clairement que

$$]a, +\infty[\supset]a, a+k[, \quad \forall k > 0$$

et donc

$$[k \leq \text{mes}^*(I) \leq +\infty, \forall k] \Rightarrow [\text{mes}^*(I) = \infty].$$

Ceci termine la démonstration. ■

Théorème 15.4 (Sous additivité)

$$\text{mes}^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{mes}^*(E_i).$$

Démonstration $\forall \epsilon > 0$ et $\forall i$, on peut trouver des intervalles $I_{i,j}$ tels que

$$E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{i,j} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \text{long}(I_{i,j}) - \frac{\epsilon}{2^i} \leq \text{mes}^*(E_i).$$

Comme

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} I_{i,j}$$

on a

$$\text{mes}^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} \text{long}(I_{i,j}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{mes}^*(E_i) + \epsilon$$

et ainsi

$$\text{mes}^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{mes}^*(E_i).$$

Ce qui est l'assertion du théorème. ■

Théorème 15.5 $\forall A \subset \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0$, il existe un ouvert $O \supset A$ tel que

$$\text{mes}^*(A) \leq \text{mes}^*(O) \leq \text{mes}^*(A) + \epsilon.$$

Démonstration Par définition, il existe $I_n =]a_n, b_n[$ tels que

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{avec} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \text{long}(I_n) - \epsilon \leq \text{mes}^*(A).$$

Posons

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

On a clairement que O est ouvert, $\text{mes}^*(A) \leq \text{mes}^*(O)$ et

$$\text{mes}^*(O) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{long}(I_n) \leq \text{mes}^*(A) + \epsilon.$$

Et la démonstration est complète. ■

Remarque Dans la définition de la mesure extérieure on peut prendre indifféremment $I_n =]a_n, b_n[, [a_n, b_n[, [a_n, b_n]$ ou $[a_n, b_n]$ ou même un mélange des différents types (cf. Exercice 15.4). ♠

15.2 Ensembles mesurables

Définition 15.6 Un ensemble E est **mesurable** (au sens de Lebesgue) si

$$\text{mes}^*(A) = \text{mes}^*(A \cap E) + \text{mes}^*(A \cap E^c), \quad \forall A \subset \mathbb{R}.$$

On dénote l'ensemble des ensembles mesurables par \mathcal{M} .

Remarque En vertu du Théorème 15.4, on a toujours que

$$\text{mes}^*(A) = \text{mes}^*((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) \leq \text{mes}^*(A \cap E) + \text{mes}^*(A \cap E^c). \quad \spadesuit$$

Voyons maintenant quelques propriétés importantes des ensembles mesurables.

Théorème 15.7 (i) $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$.

- (ii) Si $E \in \mathcal{M}$, alors $E^c \in \mathcal{M}$.
- (iii) Si $E, F \in \mathcal{M}$, alors $E \cup F \in \mathcal{M}$.
- (iv) Si $E, F \in \mathcal{M}$, alors $E \cap F \in \mathcal{M}$.
- (v) Si $E, F \in \mathcal{M}$, alors $E \setminus F \in \mathcal{M}$.
- (vi) Si $\text{mes}^*(E) = 0$, alors $E \in \mathcal{M}$.
- (vii) Si E est dénombrable, alors $\text{mes}^*(E) = 0$ et donc $E \in \mathcal{M}$.

Démonstration (i) Noter que $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$. En effet comme $A \cap \mathbb{R} = A$, $A \cap \mathbb{R}^c = \emptyset$ et $\text{mes}^*(\emptyset) = 0$, on trouve

$$\text{mes}^*(A) = \text{mes}^*(A \cap \mathbb{R}) + \text{mes}^*(A \cap \mathbb{R}^c).$$

(ii) Soit $E \in \mathcal{M}$, alors

$$\text{mes}^*(A) = \text{mes}^*(A \cap E) + \text{mes}^*(A \cap E^c)$$

ce qui implique

$$E^c \in \mathcal{M}.$$

(iii) Soient $E, F \in \mathcal{M}$, à montrer que

$$E \cup F \in \mathcal{M}.$$

1) Comme F est mesurable, on a (en remplaçant A par $A \cap E^c$)

$$\text{mes}^*(A \cap E^c) = \text{mes}^*([A \cap E^c] \cap F) + \text{mes}^*([A \cap E^c] \cap F^c).$$

2) Comme E est mesurable, on a

$$\text{mes}^*(A) = \text{mes}^*(A \cap E) + \text{mes}^*(A \cap E^c)$$

3) De même en remplaçant A par $A \cap (E \cup F)$ et en utilisant toujours la mesurabilité de E , on trouve (cf. Exercice 14.2)

$$\begin{aligned} \text{mes}^*(A \cap (E \cup F)) &= \text{mes}^*([A \cap (E \cup F)] \cap E) + \text{mes}^*([A \cap (E \cup F)] \cap E^c) \\ &= \text{mes}^*(A \cap E) + \text{mes}^*(A \cap E^c \cap F). \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\text{mes}^*(A \cap E) = \text{mes}^*(A \cap (E \cup F)) - \text{mes}^*(A \cap E^c \cap F).$$

En combinant les trois identités on trouve

$$\begin{aligned} \text{mes}^*(A) &= \text{mes}^*(A \cap (E \cup F)) - \text{mes}^*(A \cap E^c \cap F) \\ &\quad + \text{mes}^*(A \cap E^c \cap F) + \text{mes}^*(A \cap E^c \cap F^c) \\ &= \text{mes}^*(A \cap (E \cup F)) + \text{mes}^*(A \cap (E \cup F)^c) \end{aligned}$$

et la mesurabilité de $E \cup F$ est démontrée.

(iv) Soient $E, F \in \mathcal{M}$, à montrer que

$$E \cap F \in \mathcal{M}.$$

Il suffit d'observer que

$$E \cap F = (E^c \cup F^c)^c$$

et d'appliquer (ii) et (iii).

(v) Soient $E, F \in \mathcal{M}$, alors (par (ii)) $F^c \in \mathcal{M}$ et (par (iv))

$$E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{M}.$$

(vi) et (vii) cf. Exercice 15.3. ■

Voyons maintenant un exemple important.

Théorème 15.8 *Les intervalles sont mesurables.*

Démonstration *Cas 1* : $I = [a, +\infty[$. On veut montrer que si A est un ensemble quelconque, alors

$$\text{mes}^*(A) = \text{mes}^*(A \cap]-\infty, a]) + \text{mes}^*(A \cap [a, +\infty[).$$

Pour ceci posons

$$A^- = A \cap]-\infty, a[\quad \text{et} \quad A^+ = A \cap [a, +\infty[$$

et observons que par la sous additivité, on trouve, comme $A = A^+ \cup A^-$,

$$\text{mes}^*(A) \leq \text{mes}^*(A^+) + \text{mes}^*(A^-). \quad (15.1)$$

Par ailleurs pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver des intervalles I_n tels que

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{et} \quad \text{mes}^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{long}(I_n) - \epsilon.$$

Posons alors

$$I_n^- = I_n \cap]-\infty, a[\quad \text{et} \quad I_n^+ = I_n \cap [a, +\infty[.$$

On a évidemment que

$$\text{long}(I_n) = \text{long}(I_n^+) + \text{long}(I_n^-)$$

et

$$A^- \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^- \quad \text{et} \quad A^+ \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^+.$$

Par conséquent on déduit que

$$\begin{aligned} \text{mes}^*(A^+) + \text{mes}^*(A^-) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{long}(I_n^+) + \sum_{n=1}^{\infty} \text{long}(I_n^-) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{long}(I_n) \leq \text{mes}^*(A) + \epsilon. \end{aligned}$$

ϵ étant arbitraire on a le résultat de (15.1) et de l'inégalité ci-dessus.

Cas 2 : $I =]a, +\infty[,]-\infty, a[$. On procède de manière identique.

Cas 3 : $I =]a, b[$ (et de même pour tout autre type d'intervalles bornés $]a, b[$, $[a, b[$ ou $[a, b]$). On a alors, comme $] -\infty, a[$ et $[b, +\infty[$ sont mesurables et, par le Théorème 15.7, que

$$I^c =]-\infty, a] \cup [b, +\infty[\quad \text{est mesurable}$$

et donc (toujours par le Théorème 15.7) I est mesurable. ■

Notation Si un ensemble E est mesurable on note

$$\text{mes}(E) = \text{mes}^*(E). \quad \spadesuit$$

On aura besoin par la suite du lemme suivant.

Lemme 15.9 Soient $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{M}$ des ensembles disjoints. Alors pour tout ensemble A

$$\text{mes}^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^n \text{mes}^*(A \cap E_i).$$

En particulier si $A = \mathbb{R}$, alors

$$\text{mes}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{mes}(E_i).$$

Démonstration Le résultat est trivial pour $n = 1$. On procède alors par induction. Comme $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, on déduit que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i \right) \cap E_{k+1}^c = \bigcup_{i=1}^k E_i \quad \text{et} \quad \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i \right) \cap E_{k+1} = E_{k+1}.$$

Comme E_{k+1} est mesurable on a par définition que

$$\begin{aligned} & \text{mes}^* \left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i \right) \right) \\ = & \text{mes}^* \left(\left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i \right) \right] \cap E_{k+1}^c \right) + \text{mes}^* \left(\left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} E_i \right) \right] \cap E_{k+1} \right) \\ = & \text{mes}^* \left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^k E_i \right) \right) + \text{mes}^* (A \cap E_{k+1}). \end{aligned}$$

On applique l'hypothèse d'induction pour déduire le lemme. ■

On peut maintenant améliorer Théorème 15.7 (iii) et (iv).

Théorème 15.10 Si $E_i \in \mathcal{M}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, alors

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \text{et} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}.$$

En particulier les ouverts et les fermés sont mesurables.

Démonstration *Etape 1.* Pour une union finie le résultat suit immédiatement du Théorème 15.7 (iii). Ensuite on observe que comme (cf. Exercice 14.2)

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=1}^i E_k \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} E_k \right]$$

on peut supposer que les E_i sont deux à deux disjoints. Comme, par ailleurs, $\bigcup_{i=1}^n E_i$ est mesurable on a pour tout A que

$$\text{mes}^*(A) = \text{mes}^* \left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) \right) + \text{mes}^* \left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c \right).$$

D'autre part on a, trivialement,

$$\left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c \supset \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right)^c$$

et ainsi en appliquant Lemme 15.9 on déduit que

$$\begin{aligned} \text{mes}^*(A) & \geq \text{mes}^* \left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) \right) + \text{mes}^* \left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right)^c \right) \\ & = \sum_{i=1}^n \text{mes}^*(A \cap E_i) + \text{mes}^* \left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right)^c \right). \end{aligned}$$

En passant à la limite on obtient

$$\text{mes}^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \text{mes}^*(A \cap E_i) + \text{mes}^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right).$$

Appliquons alors Théorème 15.4 (deux fois) pour déduire

$$\text{mes}^*(A) \geq \text{mes}^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)\right) + \text{mes}^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right) \geq \text{mes}^*(A).$$

On a ainsi montré que $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ est mesurable.

Etape 2. Par le Corollaire du théorème de Lindelöf (Corollaire 14.6), l'Etape 1 et Théorème 15.8, on déduit immédiatement qu'un ouvert est mesurable.

Etape 3. Le résultat pour l'intersection et les fermés est démontré par complémentarité. ■

Montrons maintenant certains critères importants pour savoir si un ensemble donné est mesurable.

Théorème 15.11 *Les assertions suivantes sont équivalentes*

- (i) E est mesurable,
- (ii) $\forall \epsilon > 0, \exists O \supset E$ ouvert tel que $\text{mes}^*(O \setminus E) \leq \epsilon$,
- (iii) $\exists O = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \supset E$ où O_n est ouvert (i.e. O est un ensemble G_δ) tel que $\text{mes}^*(O \setminus E) = 0$,
- (iv) $\forall \epsilon > 0, \exists F \subset E$ fermé tel que $\text{mes}^*(E \setminus F) \leq \epsilon$,
- (v) $\exists F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset E$ où F_n est fermé (i.e. F est un ensemble F_σ) tel que $\text{mes}^*(E \setminus F) = 0$.

Démonstration $(i) \Rightarrow (ii)$.

Cas 1 : $\text{mes}(E) < \infty$. On a vu (cf. Théorème 15.5) qu'il existe un ouvert $O \supset E$ tel que

$$\text{mes}^*(E) \leq \text{mes}^*(O) \leq \text{mes}^*(E) + \epsilon.$$

Comme E est mesurable,

$$\begin{aligned} \text{mes}^*(O) &= \text{mes}^*(O \cap E) + \text{mes}^*(O \cap E^c) \\ &= \text{mes}^*(E) + \text{mes}^*(O \setminus E) \end{aligned}$$

et donc

$$\text{mes}^*(O \setminus E) = \text{mes}^*(O) - \text{mes}^*(E) \leq \epsilon$$

ce qui est le résultat souhaité.

Cas 2 : $\text{mes}(E) = \infty$. Comme $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} [n, n+1[$ on peut écrire

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

où I_n sont des intervalles (disjoints, mais ce n'est pas nécessaire dans l'argument, et) de longueur fini. Soient

$$E_n = E \cap I_n.$$

On a donc E_n est mesurable (cf. Théorème 15.7) et que $\text{mes}(E_n) < \infty$ et par le cas précédent il existe un ouvert $O_n \supset E_n$ tel que

$$\text{mes}^*(O_n \setminus E_n) \leq \frac{\epsilon}{2^n}.$$

On pose alors

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$$

et on déduit donc que (cf. Exercice 14.2)

$$O \setminus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (O_n \setminus E_n)$$

et ainsi

$$\text{mes}^*(O \setminus E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{mes}^*(O_n \setminus E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon.$$

(ii) \Rightarrow (iii). Soit $\epsilon = 1/n$ dans (ii) et soient O_n , qui sont des ouverts, tels que

$$O_n \supset E \quad \text{et} \quad \text{mes}^*(O_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}.$$

Soit

$$O = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \quad \Rightarrow \quad \text{mes}^*(O \setminus E) \leq \text{mes}^*(O_n \setminus E) \leq \frac{1}{n}.$$

(iii) \Rightarrow (i). O est mesurable, car intersection dénombrable d'ouverts (qui sont mesurables par le Théorème 15.10). De plus $O \setminus E$ a une mesure 0, donc $O \setminus E$ est mesurable (cf. Théorème 15.7). Comme

$$\begin{aligned} O \setminus (O \setminus E) &= O \cap (O \setminus E)^c = O \cap (O \cap E^c)^c \\ &= O \cap (O^c \cup E) = O \cap E = E, \end{aligned}$$

on déduit que

$$E = O \setminus (O \setminus E)$$

est mesurable.

(i) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (i). Démonstration très semblable. ■

Un autre résultat important est le suivant.

Théorème 15.12 (Additivité) Soient $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ des ensembles mesurables tels que $E_i \cap E_j = \emptyset$, si $i \neq j$, alors

$$\text{mes} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{mes}(E_i).$$

Démonstration Par le Théorème 15.4 on a

$$\text{mes} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{mes}(E_i).$$

Montrons l'inégalité inverse. Par le Lemme 15.9 avec $A = \mathbb{R}$ on obtient

$$\sum_{i=1}^n \text{mes}(E_i) = \text{mes} \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) \leq \text{mes} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right)$$

En passant à la limite, on a le résultat. ■

Théorème 15.13 Si $\text{mes}^*(E) < \infty$ alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) E est mesurable
- (ii) $\forall \epsilon > 0$, il existe une union disjointe et finie d'intervalles ouverts I_i , $i = 1, \dots, n(\epsilon)$, tels que

$$\text{mes}^* \left(E \Delta \bigcup_{i=1}^n I_i \right) \leq \epsilon$$

où

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) = (E \cap F^c) \cup (F \cap E^c).$$

Remarque On peut prendre I_i ouvert, fermé ou demi fermé. ♠

Démonstration (i) \Rightarrow (ii). Si E est mesurable et si $\epsilon > 0$, il existe un ouvert (Théorème 15.11) $O \supset E$ avec $\text{mes}(O \setminus E) < \epsilon/2$. Par ailleurs

$$\text{mes}(E) < \infty \quad \Rightarrow \quad \text{mes}(O) < \infty.$$

Par Corollaire 14.6, il existe des intervalles ouverts et disjoints I_i tels que

$$O = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i.$$

On a donc (en utilisant le Théorème 15.12)

$$\text{mes}(O) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{mes}(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \text{long}(I_i) < \infty.$$

Donc il existe n tel que

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \text{long}(I_i) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit

$$F = \bigcup_{i=1}^n I_i$$

alors

$$\begin{aligned} E \Delta F &= \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n I_i \setminus E \right) \\ &\subset \left(O \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i \right) \cup (O \setminus E) = \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} I_i \right) \cup (O \setminus E) \end{aligned}$$

ce qui implique le résultat, à savoir

$$\text{mes}(E \Delta F) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \text{mes}(I_i) + \text{mes}(O \setminus E) \leq \epsilon.$$

(ii) \Rightarrow (i). On suppose donc que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une union finie et disjointe d'intervalles I_i , $i = 1, \dots, n = n(\epsilon)$, tels que

$$\text{mes}^* \left(E \Delta \bigcup_{i=1}^n I_i \right) \leq \epsilon/3. \quad (15.2)$$

On veut montrer qu'alors E est mesurable. Par le Théorème 15.11 il suffit de montrer qu'il existe un ouvert $O \supset E$ tel que

$$\text{mes}^*(O \setminus E) \leq \epsilon. \quad (15.3)$$

Choisissons l'ouvert $O \supset E$ défini par le Théorème 15.5, il satisfait

$$\text{mes}^*(E) \leq \text{mes}(O) \leq \text{mes}^*(E) + \epsilon/3. \quad (15.4)$$

On va montrer que O vérifie (15.3). Soit

$$F = \bigcup_{i=1}^n (I_i \cap O). \quad (15.5)$$

Noter que

$$\begin{aligned} E \setminus F &= E \cap \left[\bigcup_{i=1}^n (I_i \cap O) \right]^c = E \cap \left[O \cap \left(\bigcup_{i=1}^n I_i \right) \right]^c = E \cap \left[O^c \cup \left(\bigcup_{i=1}^n I_i \right)^c \right] \\ &= (E \cap O^c) \cup \left[E \cap \left(\bigcup_{i=1}^n I_i \right)^c \right] = E \cap \left(\bigcup_{i=1}^n I_i \right)^c \end{aligned}$$

car $E \cap O^c = \emptyset$. On a donc

$$E \setminus F = E \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i. \quad (15.6)$$

D'où, par (15.5) et (15.6),

$$\begin{aligned} E\Delta F &= \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i\right) \cup (F \setminus E) \subset \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n I_i \setminus E\right) \\ &\subset E\Delta \bigcup_{i=1}^n I_i. \end{aligned}$$

On a donc, par (15.2),

$$\text{mes}^*(E\Delta F) \leq \text{mes}^*\left(E\Delta \bigcup_{i=1}^n I_i\right) \leq \epsilon/3. \quad (15.7)$$

D'autre part comme

$$\begin{aligned} E &\subset F \cup E \subset (F \cup E) \cup (F \cap F^c) = F \cup (E \cap F^c) \\ &\subset F \cup (E \cap F^c) \cup (E^c \cap F) = F \cup (E\Delta F) \end{aligned}$$

on a donc, par (15.7),

$$\text{mes}^*(E) \leq \text{mes}(F) + \text{mes}^*(E\Delta F) \leq \text{mes}(F) + \epsilon/3. \quad (15.8)$$

De plus, comme

$$O = (O \cap F) \cup (O \cap F^c), \quad O \cap F = F \quad \text{et} \quad O \cap F^c \cap E^c \subset O \cap F^c$$

on trouve

$$\begin{aligned} O \setminus E &= O \cap E^c = [(O \cap F) \cup (O \cap F^c)] \cap E^c \\ &= (O \cap F \cap E^c) \cup (O \cap F^c \cap E^c) \\ &\subset (F \cap E^c) \cup (O \cap F^c) = (F \setminus E) \cup (O \setminus F). \end{aligned}$$

On déduit donc

$$O \setminus E \subset (O \setminus F) \cup (F \setminus E) \cup (E \setminus F) = (O \setminus F) \cup (E\Delta F)$$

et ainsi par (15.7)

$$\text{mes}^*(O \setminus E) \leq \text{mes}^*(O \setminus F) + \text{mes}^*(E\Delta F) \leq \text{mes}^*(O \setminus F) + \epsilon/3.$$

Comme O (étant ouvert) et F (étant une union d'intervalles) sont mesurables et par (15.4) et (15.8), on obtient

$$\begin{aligned} \text{mes}^*(O \setminus E) &\leq \text{mes}(O \setminus F) + \epsilon/3 = \text{mes}(O) - \text{mes}(F) + \frac{\epsilon}{3} \\ &\leq \text{mes}^*(E) - \text{mes}(F) + \frac{2\epsilon}{3} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. ■

15.3 Les σ -algèbres, les Boréliens et leur relation avec les ensembles mesurables

Définition 15.14 Une classe de sous-ensemble \mathcal{A} d'un espace X est appelée une σ -algèbre si

- (i) $X \in \mathcal{A}$
- (ii) $E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}$
- (iii) $E_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$.

Théorème 15.15 La classe des ensembles mesurables \mathcal{M} est une σ -algèbre.

Démonstration En fait ceci a déjà été démontré au Théorème 15.7 et au Théorème 15.10. ■

Définition 15.16 Soit $I =]a, b[$. On considère la σ -algèbre engendrée par de tels intervalles qu'on dénote \mathcal{B} , c'est-à-dire

- (i) $\mathbb{R} \in \mathcal{B}$,
- (ii) $I \in \mathcal{B} \Rightarrow I^c \in \mathcal{B}$,
- (iii) $I_\nu \in \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{\nu=1}^{\infty} I_\nu \in \mathcal{B}$.

Les éléments de cette σ -algèbre sont appelés des **ensembles de Borel** (ou boréliens).

Théorème 15.17 $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$, i.e. tout ensemble de Borel est mesurable.

Démonstration Comme $]a, b[\in \mathcal{M}$ par le Théorème 15.8 et comme \mathcal{M} est une σ -algèbre, on déduit que $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$. ■

On peut montrer (cf. Théorèmes 15.18 et 15.31) que

$$\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Toutes les deux non inclusions nécessiteront l'axiome du choix. On va commencer par montrer que $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (le contre exemple est dû à Vitali).

Théorème 15.18 $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

On commence par le lemme suivant.

Lemme 15.19 Soit E un ensemble mesurable et soit $y \in \mathbb{R}$. Alors l'ensemble

$$E + y = \{x + y : x \in E\}$$

est mesurable et

$$\text{mes}(E + y) = \text{mes}(E).$$

Démonstration *Etape 1.* On a par le Théorème 15.2 (v) que pour tout A

$$\text{mes}^*(A + y) = \text{mes}^*(A).$$

Etape 2. Pour déduire le résultat il suffit de montrer que $E + y$ est mesurable. Comme E est mesurable on a $\forall \epsilon > 0$ qu'il existe $O \supset E$ ouvert tel que $\text{mes}(O \setminus E) \leq \epsilon$. Mais $O + y$ est ouvert et $O + y \supset E + y$. On a aussi, par l'Etape 1,

$$\text{mes}^*((O + y) \setminus (E + y)) = \text{mes}^*((O \setminus E) + y) = \text{mes}(O \setminus E) \leq \epsilon.$$

Par le Théorème 15.11, on déduit que $E + y$ est mesurable et par l'Etape 1 que

$$\text{mes}(E + y) = \text{mes}(E)$$

comme souhaité. ■

Tournons nous maintenant vers la démonstration du Théorème 15.18.

Démonstration *Etape 1.* Soient $x, y \in [0, 1]$. On définit une relation d'équivalence (évident) par

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q} \cap [-1, 1].$$

Soient $\alpha \in [0, 1]$ et

$$E_\alpha = \{x \in [0, 1] : x \sim \alpha\}.$$

Les propriétés suivantes ont trivialement lieu :

- a) $E_\alpha \neq \emptyset$,
- b) $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset \Leftrightarrow \alpha \not\sim \beta$,
- c) $\bigcup_{\alpha} E_\alpha = [0, 1]$.

Comme $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ est dénombrable on a que chaque E_α est dénombrable ; mais il y a un nombre indénombrable de E_α , car $[0, 1]$ est indénombrable.

Etape 2. Par l'axiome du choix il existe $V \subset [0, 1]$ qui contient exactement un élément x_α de chacun des E_α .

Etape 3. Soit $\mathbb{Q} \cap [-1, 1] = \mathbb{Q}_1 = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$ et soit

$$V_n = V + r_n.$$

Noter que

$$V_n \cap V_m = \emptyset \quad \text{si } n \neq m.$$

En effet s'il existe $y \in V_n \cap V_m$ alors il existe $x_\alpha, x_\beta \in V$ (et comme $x_\alpha, x_\beta \geq 0$, on déduit que $x_\alpha - x_\beta \in [-1, 1]$) et $r_n, r_m \in \mathbb{Q}_1$ tels que

$$y = x_\alpha + r_n = x_\beta + r_m \Rightarrow r_m - r_n = x_\alpha - x_\beta \in \mathbb{Q}_1 \Rightarrow x_\alpha \sim x_\beta.$$

On déduit donc que $x_\beta \in E_{x_\alpha}$ et ainsi (comme $x_\alpha, x_\beta \in V$) $x_\alpha = x_\beta$. Par conséquent $r_n = r_m$ et donc $V_n = V_m$ ce qui implique $n = m$.

Etape 4. On a aussi

$$[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (V + r_n) \subset V + [-1, 1] \subset [0, 1] + [-1, 1] = [-1, 2].$$

En effet soit $x \in [0, 1]$ ce qui implique que $x \in E_\alpha$ pour un certain α (et disons qu'on a directement choisi α comme l'unique représentant de E_α dans V , on a donc $\alpha \in V$). On infère donc que

$$x \sim \alpha \quad \Rightarrow \quad x - \alpha = r_n \quad \Rightarrow \quad x = \alpha + r_n \quad \Rightarrow \quad x \in V_n.$$

Etape 5. On a en résumé que si V est mesurable alors, par le Théorème 15.12 et le lemme précédent,

$$\text{mes} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{mes}(V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{mes}(V + r_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{mes}(V).$$

Par l'Etape 4 on a aussi

$$\text{mes}([0, 1]) = 1 \leq \text{mes} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \right) \leq \text{mes}([-1, 2]) = 3.$$

En remettant les deux choses ensemble on a obtenu

$$1 \leq \text{mes} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{mes}(V) \leq 3.$$

Mais $\sum_{n=1}^{\infty} \text{mes}(V) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \text{mes}(V) = 0$ ou ∞ . On a bien obtenu la contradiction souhaitée et donc V est non mesurable. ■

On montrera, cf. Section 15.6 (Théorème 15.31), qu'il existe un ensemble mesurable au sens de Lebesgue mais pas de Borel et donc

$$\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M}.$$

15.4 Fonctions mesurables

On va considérer dans cette section des fonctions

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

avec les conventions suivantes.

Conventions On adopte les conventions suivantes

- (i) $a + \infty = +\infty, \quad \forall a \neq -\infty$
- (ii) $a \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$
- (iii) $\infty - \infty$ non défini. ♠

Définition 15.20 Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ est dite **mesurable** au sens de Lebesgue si

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$$

est mesurable $\forall \alpha$.

Proposition 15.21 Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est mesurable
- (ii) $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ est mesurable
- (iii) $\{x : f(x) < \alpha\}$ est mesurable
- (iv) $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ est mesurable.

Démonstration (i) \Rightarrow (ii). En effet comme

$$\{x : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) > \alpha - 1/n\}$$

et que l'ensemble dans le membre de droite est mesurable, on a l'assertion.

(ii) \Rightarrow (iii). Le résultat suit du fait que

$$\{x : f(x) < \alpha\} = \{x : f(x) \geq \alpha\}^c.$$

(iii) \Rightarrow (iv). cf. plus haut (i) \Rightarrow (ii).

(iv) \Rightarrow (i). cf. (ii) \Rightarrow (iii). ■

Exemple (i) Soit

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

On a donc

$$\{x : \chi_A(x) > \alpha\} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha < 0 \\ A & \text{si } 0 \leq \alpha < 1 \\ \emptyset & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

et ainsi

$$\chi_A \text{ mesurable} \Leftrightarrow A \text{ mesurable.}$$

(ii) Une fonction semi continue inférieurement ou supérieurement (et donc en particulier une fonction continue) est mesurable, cf. Exercice 15.9. On rappelle qu'une fonction est *semi continue inférieurement* si pour toute suite $x_\nu \rightarrow x$ on a

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} [f(x_\nu)] \geq f(x).$$

De même une fonction est *semi continue supérieurement* si pour toute suite $x_\nu \rightarrow x$ on a

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} [f(x_\nu)] \leq f(x). \spadesuit$$

Proposition 15.22 Soient $a \in \mathbb{R}$, f et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables, alors $f + a$, $a f$, $f + g$, $f - g$ et $f g$ sont mesurables.

Démonstration (i) $f + a$ est mesurable. En effet

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) + a > \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha - a\}$$

est mesurable.

(ii) $a f$ est mesurable.

1) Si $a = 0$ alors $a f = 0$ et donc

$$\{x : a f(x) = 0 > \alpha\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \alpha \geq 0 \\ \mathbb{R} & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

2) Si $a > 0$, alors

$$\{x : a f(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \alpha/a\}$$

est mesurable.

3) Si $a < 0$, on procède de manière analogue.

(iii) $f + g$ est mesurable. Soit

$$E_\alpha = \{x : f(x) + g(x) > \alpha\}.$$

Si $x \in E_\alpha$, on a $\alpha - g(x) < f(x)$. Par conséquent on peut trouver $r_n \in \mathbb{Q}$ (où les r_n sont une énumération des rationnels) tels que

$$\alpha - g(x) < r_n < f(x).$$

On a donc que si $x \in E_\alpha$, alors

$$x \in \{y : f(y) > r_n\} \cap \{y : g(y) > \alpha - r_n\}$$

et ainsi

$$E_\alpha \subset F_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\{x : f(x) > r_n\} \cap \{x : g(x) > \alpha - r_n\}].$$

Réciproquement si $x \in F_\alpha$ c'est à dire qu'il existe r_n tel que $f(x) > r_n$ et $g(x) > \alpha - r_n$, alors $x \in E_\alpha$ et on a donc égalité et par conséquent, comme F_α est mesurable, on déduit que E_α est mesurable.

(iv) $f - g$ est mesurable. Si g est mesurable alors $-g$ est mesurable et donc $f - g$ est mesurable.

(v) $f g$ est mesurable. cf. Exercice 15.11. ■

Remarque Le résultat est valable si f et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ pour autant que $f + g \neq \infty - \infty$. ♠

On rappelle que

Définition 15.23 On définit

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{\mu \geq \nu} f_\mu \right\}$$

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu = \sup_{\nu \in \mathbb{N}} \left\{ \inf_{\mu \geq \nu} f_\mu \right\}.$$

Remarque $\liminf f_\nu \leq \limsup f_\nu$ (en effet $\inf_{\mu \geq \nu} f_\mu \leq \sup_{\mu \geq \nu} f_\mu$). Mais en général elles ne sont pas égales, en effet

$$f_\nu = (-1)^\nu \Rightarrow \sup_{\mu \geq \nu} \{f_\mu\} = 1, \inf_{\mu \geq \nu} \{f_\mu\} = -1. \spadesuit$$

On a alors

Théorème 15.24 Si $\{f_\nu\}$ mesurables, alors $\sup_{\nu \in \mathbb{N}} \{f_\nu\}$, $\inf_{\nu \in \mathbb{N}} \{f_\nu\}$, $\liminf_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu$ et $\limsup_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu$ sont mesurables.

Démonstration (i) Comme

$$\left\{ x : \sup_{\nu \in \mathbb{N}} f_\nu(x) > \alpha \right\} = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \{x : f_\nu(x) > \alpha\}$$

on a le résultat

(ii) L'assertion se déduit de la précédente en observant que

$$\inf_{\nu \in \mathbb{N}} (f_\nu) = -\sup_{\nu \in \mathbb{N}} (-f_\nu).$$

(iii) Comme

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu = \inf_{\nu \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{\mu \geq \nu} f_\mu \right\},$$

on obtient le résultat de (i) et (ii).

(iv) idem. ■

Définition 15.25 Si une propriété a lieu sauf sur un ensemble de mesure 0, alors on dit qu'elle a lieu **presque partout** et on note **p.p.**.

Théorème 15.26 Si $f = g$ p.p. et si f est mesurable $\Rightarrow g$ mesurable.

Démonstration Soit

$$E = \{x : f(x) \neq g(x)\}.$$

Noter que E est mesurable, car

$$\text{mes}^*(E^c) = 0 \Rightarrow E^c \in \mathcal{M} \Rightarrow E \in \mathcal{M}.$$

Définissons

$$F_\alpha = \{x : f(x) > \alpha\} \quad \text{et} \quad G_\alpha = \{x : g(x) > \alpha\}.$$

Observer que, comme $F_\alpha \in \mathcal{M}$, on a

$$G_\alpha \cap E = F_\alpha \cap E \in \mathcal{M}.$$

De plus comme $\text{mes}^*(G_\alpha \cap E^c) \leq \text{mes}^*(E^c) = 0$ on déduit que

$$G_\alpha \cap E^c \in \mathcal{M}.$$

Finalement comme

$$G_\alpha = (G_\alpha \cap E) \cup (G_\alpha \cap E^c) = (F_\alpha \cap E) \cup (G_\alpha \cap E^c)$$

On a bien que $G_\alpha \in \mathcal{M}$ et donc g est mesurable. ■

Remarque (i) f continue et φ mesurable $\Rightarrow f \circ \varphi$ mesurable (cf. Exercice 15.12).

(ii) Par contre l'assertion " f continue et φ mesurable $\Rightarrow \varphi \circ f$ mesurable" est fausse (cf. Exercice 41 page 45 de De Barra [10]). ♠

On conclut ici avec une notion que nous n'utiliserons pas.

Définition 15.27 On dit que f est **mesurable au sens de Borel** si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x : f(x) > \alpha\}$$

est un ensemble de Borel.

Remarque (i) f Borel mesurable $\Rightarrow f$ Lebesgue mesurable (on verra que l'implication inverse est, en général, fausse).

(ii) Le Théorème 15.24 est aussi valable pour les fonctions mesurables au sens de Borel.

(iii) On peut montrer que si f est mesurable, alors il existe g Borel mesurable tel que

$$f = g \quad \text{p.p.}$$

(iv) Mais attention de la remarque précédente on ne peut pas inférer que le théorème (Théorème 15.26) est vrai pour les fonctions Borel mesurables. En fait le théorème est faux pour les fonctions mesurables au sens de Borel (cf. Exercice 43 page 45 de De Barra [10]). En effet il existe f mesurable au sens de Lebesgue mais pas au sens de Borel et il existe g Borel mesurable (même $g \equiv 0$) telles que

$$f = g \quad \text{p.p.} \quad \spadesuit$$

15.5 L'ensemble de Cantor

Cette section sera discutée dans les Exercices 15.6 et 15.7. On va le construire de deux façons équivalentes.

I) On commence par définir

$$P_0 = [0, 1]$$

$$P_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$$

$$P_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$$

et ainsi de suite (à chaque étape on enlève à chacun des intervalles précédents de longueur $1/3^k$ un intervalle de longueur $1/3^{k+1}$) de manière à avoir (cf. Figure 15.1)

$$\cdots \subset P_{k+1} \subset P_k \subset \cdots \subset P_2 \subset P_1 \subset P_0.$$

L'ensemble de Cantor P est alors $P = \bigcap_{k=0}^{\infty} P_k$.

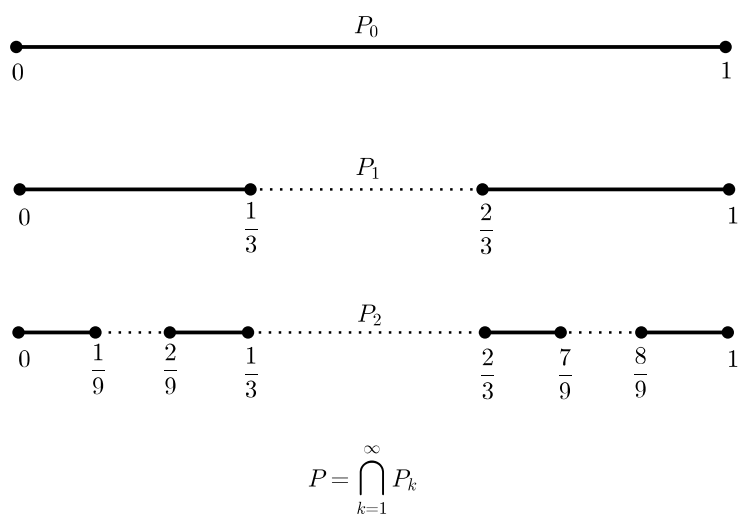


FIG. 15.1 –

II) Voici une deuxième façon de définir l'ensemble de Cantor (cf. Exercice 15.7). Pour cela on aura besoin de la construction suivante. Mais commençons par une discussion heuristique sur les développements décimaux, puis dans une base quelconque.

On peut clairement écrire un nombre $a \in [0, 1]$ de manière décimale, plus précisément,

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \quad \text{avec} \quad a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

Le développement n'est en général pas unique et si l'on veut s'assurer de l'unicité il faut faire une convention. Le problème est uniquement pour les nombres de la forme

$$\frac{p}{10^n} \quad \text{avec} \quad 1 \leq p \leq 10^n \text{ un entier.}$$

Avant de voir cette convention, voyons deux exemples.

Exemple 1 : $a = 1/2$. On peut l'écrire soit comme

$$a = 0,5 \quad \text{i.e.} \quad a_1 = 5 \text{ et } a_n = 0 \text{ si } n \geq 2$$

ou avec

$$a = 0,4999999 \dots \quad \text{i.e.} \quad a_1 = 4 \text{ et } a_n = 9 \text{ si } n \geq 2$$

car alors (se rappeler que $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} = 1/9$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{4}{10} + 9 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{4}{10} + 9 \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right] = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 2 : $a = 1$. On l'écrit comme

$$a = 0,999 \dots \quad \text{i.e.} \quad a_n = 9 \text{ si } n \geq 1.$$

En se rappelant que $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} = 1/9$, on a bien que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 9 \left[\frac{1}{9} \right] = 1.$$

Convention. Voici la convention. S'il existe un entier k tel que

$$a_{k-1} \leq 8 \quad \text{et} \quad a_n = 9 \text{ pour tous les } n \geq k$$

alors les deux développements

$$a = 0, a_1 \dots a_{k-1} a_k \dots = 0, a_1 \dots a_{k-1} 999 \dots$$

et

$$a = 0, a_1 \dots a_{k-1} a_k \dots = 0, a_1 \dots (a_{k-1} + 1) 000 \dots = 0, a_1 \dots (a_{k-1} + 1)$$

sont les mêmes. En particulier ceci est consistant avec le fait que $a = 1$ s'écrit comme $a = 0,999 \dots$ (idem pour $a = 0,5 = 0,4999999 \dots$).

On adoptera (si l'on veut l'unicité, mais sinon peu importe) la convention avec un développement infini, sauf pour 0 qui restera 0.

De même si on choisit une base quelconque, mais nous aurons besoin seulement de la base 2 et 3, on pourra écrire (cf. plus bas pour les détails sur le développement ternaire) $a \in [0, 1]$ (avec la même convention d'unicité que pour le cas décimal) de la manière suivante

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \quad \text{avec} \quad a_n \in \{0, 1\}$$

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \quad \text{avec} \quad a_n \in \{0, 1, 2\}.$$

Voyons maintenant plus en détails (cf. Exercice 15.6 pour une présentation très légèrement différente) le développement en base 3.

Développement ternaire Commençons par dénoter pour $x > 0$

$$\lfloor x \rfloor = \begin{cases} \max \{n \in \mathbb{N} : n < x\} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

c'est à dire le plus grand entier strictement plus petit que x (c'est presque la partie entière). Par exemple

$$\lfloor 1 \rfloor = 0, \quad \lfloor 4/3 \rfloor = 1.$$

Soit $a \in]0, 1]$.

Etape 1. On définit tout d'abord

$$a_1 = \lfloor 3a \rfloor.$$

Puis on définit ensuite a_k par induction de la manière suivante. On pose

$$\tilde{a}_k = \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{3^n}$$

et on définit

$$a_{k+1} = \lfloor 3^{k+1} (a - \tilde{a}_k) \rfloor.$$

Etape 2. On écrit alors n'importe quel $a \in]0, 1]$ de la manière suivante

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}.$$

Si $a = 0$ on écrit

$$a = 0,000\dots \quad \text{c'est à dire } a_n = 0 \quad \forall n. \quad \spadesuit$$

Remarque Attention de nouveau à la non unicité du développement. Il y a ambiguïté pour les points de la forme

$$\frac{p}{3^n} \quad \text{avec} \quad 1 \leq p \leq 3^n \text{ un entier.}$$

Par exemple (cf. plus bas)

$$\frac{1}{3} = 0,0222222\dots \quad \text{avec} \quad \frac{1}{3} = 0,1.$$

La construction ci-dessus privilégie la première solution. ♠

Exemple (i) Soit $a = 1/3$.

1) On trouve donc que $3a = 1$ et donc

$$a_1 = [1] = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{a}_1 = 0.$$

2) On a alors, pour $k = 1$,

$$3^{k+1}(a - \tilde{a}_k) = 3^2 a = 3 \quad \Rightarrow \quad a_2 = [3] = 2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{a}_2 = \frac{a_2}{3^2} = \frac{2}{9}.$$

3) Pour $k = 2$, on trouve

$$a_3 = \left\lfloor 3^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9} \right) \right\rfloor = 2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{a}_3 = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3}.$$

4) Et ainsi de suite

$$a_4 = \left\lfloor 3^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} - \frac{2}{3^3} \right) \right\rfloor = [3^3 - 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3] = [3] = 2.$$

On a ainsi obtenu que

$$a = 0,02222\dots$$

(ii) Soit $a = 1/7$. Alors

$$a_1 = \left\lfloor 3 \cdot \frac{1}{7} \right\rfloor = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{a}_1 = 0;$$

$$a_2 = \left\lfloor 3^2 \left(\frac{1}{7} - 0 \right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{9}{7} \right\rfloor = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{a}_2 = \frac{1}{3^2};$$

$$a_3 = \left\lfloor 3^3 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) \right\rfloor = 0;$$

$$a = 0,010\dots$$

(iii) Soit $a = 1$. Alors

$$a_1 = [3 \cdot 1] = 2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{a}_1 = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = \left\lfloor 3^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) \right\rfloor = 2$$

$$a = 0,22222\ldots \quad \spadesuit$$

Remarque (i) On va montrer

$$a_k = 0, 1, 2$$

ce qui est équivalent à montrer, que pour tout k ,

$$0 \leq a_k \leq 2.$$

On va procéder par récurrence. On a clairement

$$0 \leq a_1 \leq 2.$$

Supposons que l'on ait montré jusqu'à l'ordre k que

$$0 \leq a_k \leq 2$$

et montrons qu'alors a_{k+1} est bien défini et

$$0 \leq a_{k+1} \leq 2.$$

1) Noter qu'alors

$$0 \leq \tilde{a}_k \leq 2 \sum_{n=1}^k \frac{1}{3^n} = 2 \frac{1}{3} \frac{1-3^{-k}}{1-3^{-1}} = (1-3^{-k})$$

et donc

$$3^{k+1} (a - \tilde{a}_k) \geq 0$$

ce qui implique que a_{k+1} est bien défini et

$$a_{k+1} = \lfloor 3^{k+1} (a - \tilde{a}_k) \rfloor \geq 0,$$

ce qui nous donne la première inégalité : $a_{k+1} \geq 0$.

2) Montrons maintenant que $a_{k+1} \leq 2$. On a

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \lfloor 3^{k+1} (a - \tilde{a}_k) \rfloor = \left\lfloor 3^{k+1} \left(a - \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{3^n} \right) \right\rfloor \\ &= \left\lfloor 3^{k+1} \left(a - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{3^n} - \frac{a_k}{3^k} \right) \right\rfloor \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \left\lfloor 3^{k+1} \left(a - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{3^n} \right) - 3 a_k \right\rfloor = \left\lfloor \underbrace{3 \cdot 3^k \left(a - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{3^n} \right)}_{\leq a_k + 1} - 3 a_k \right\rfloor \\ &\leq \lfloor 3 a_k + 3 - 3 a_k \rfloor = \lfloor 3 \rfloor = 2. \end{aligned}$$

(ii) Si $0 < a \leq 1$, alors il existe un et un seul développement ternaire. En effet l'existence suit immédiatement de la construction. Pour l'unicité supposons qu'on ait

$$a = 0, a_1 a_2 \dots = 0, b_1 b_2 \dots.$$

Soit N le premier entier tel que $a_N \neq b_N$. On a alors $\tilde{a}_{N-1} = \tilde{b}_{N-1}$ mais comme

$$a_N = \lfloor 3^N (a - \tilde{a}_{N-1}) \rfloor \quad \text{et} \quad b_N = \lfloor 3^N (a - \tilde{b}_{N-1}) \rfloor$$

on déduit que

$$a_N = b_N$$

et donc l'unicité. Attention : l'unicité dépend de la convention car, par exemple,

$$\frac{2}{3} = 0,2 = 0,2000000\dots = 0,122222\dots.$$

(iii) Réciproquement si on a un développement ternaire, alors $a \in]0, 1]$. La démonstration est à peu près évidente et nous ne discutons pas les détails. ♠

Ensemble de Cantor L'ensemble de Cantor P peut aussi être écrit comme

$$P = \{a \in [0, 1] : a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots \text{ avec } a_n = 0 \text{ ou } 2\}.$$

Attention le développement ternaire n'étant pas unique, on comprend cela comme $a \in P$ si et seulement si il existe un développement ternaire (il ne faut pas lever l'ambiguïté) tel que

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots \text{ avec } a_n = 0 \text{ ou } 2.$$

Par exemple

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0,1 = 0,1000000\dots = 0,022222\dots \\ \frac{2}{3} &= 0,2 = 0,2000000\dots = 0,122222\dots \end{aligned}$$

et donc, quand il y a ambiguïté, on choisit celle qui convient, dans ce cas précis la deuxième pour que $1/3 \in P$ et la première de manière que $2/3 \in P$.

Voici en résumé les propriétés de l'ensemble (cf. Exercice 15.7).

Proposition 15.28 Soit

$$P = \bigcap_{k=0}^{\infty} P_k.$$

Les propriétés suivantes ont alors lieu.

- (i) P est compact.
- (ii) P ne contient aucun intervalle.

(iii) P peut aussi s'écrire comme

$$P = \{a \in [0, 1] : a = 0, a_1 a_2 a_3 \cdots \text{ avec } a_n = 0 \text{ ou } 2\}.$$

(iv) P est indénombrable.

(v) P est mesurable et de mesure nulle.

(vi) P est parfait.

Démonstration cf. Exercice 15.7 (nous ne discutons pas la cinquième propriété). ■

15.6 La fonction de Lebesgue et l'existence d'un mesurable non borélien

On va montrer ici que

$$\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M}.$$

On aura pour cela besoin de deux lemmes. Le premier construit la fonction de Lebesgue à partir de l'ensemble de Cantor.

Lemme 15.29 (Fonction de Lebesgue) Soit $x \in [0, 1]$ développé en base 2

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{2^n}$$

avec $\epsilon_n = 0$ ou 1 (avec la convention, à part pour 0, qu'il y a une infinité de $\epsilon_n = 1$). Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\epsilon_n}{3^n}.$$

Alors $f([0, 1]) \subset P$, f est strictement croissante (et donc injective et mesurable).

Démonstration (i) On a

$$f([0, 1]) \subset P$$

par définition de P .

(ii) f est strictement croissante. En effet soit $x < y$. On écrit le développement binaire (avec la convention ci-dessus) et donc

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \quad \text{et} \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}.$$

(Avec notre convention une infinité de a_n et de b_n sont non nuls et donc égaux à 1). Comme $x < y$ alors il existe $k \geq 0$ tel que

$$a_n = b_n \quad \text{pour tout } n \leq k$$

et

$$a_{k+1} = 0 < b_{k+1} = 1$$

(par convention si $k = 0$, ceci veut dire que $a_1 = 0 < b_1 = 1$). On a ainsi

$$f(y) - f(x) = \frac{2}{3^{k+1}} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{2(b_n - a_n)}{3^n} > 0$$

car

$$\begin{aligned} \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{2(b_n - a_n)}{3^n} &\geq -2 \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{-2}{3^{k+1}} \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{1}{3^{n-k-1}} \\ &= \frac{-2}{3^{k+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{-1}{3^{k+1}}. \end{aligned}$$

(iii) Une fonction strictement croissante est nécessairement injective. Elle est aussi nécessairement mesurable (cf. Exercice 15.10, mais c'est trivial) car

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$$

est alors soit vide, soit un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, soit $]a, +\infty[$, soit \mathbb{R} , qui sont tous mesurables. ■

Remarque Attention ici notre convention dans le développement binaire est capitale. En effet la fonction n'est pas bien définie sans notre convention. En effet si on choisit, par exemple,

$$\frac{1}{2} = 0,1 = 0,1000000\dots = 0,01111\dots$$

on trouve dans le premier cas

$$f(1/2) = \frac{2}{3} = 0,2 = 0,2000000\dots$$

alors que dans la deuxième représentation on aurait

$$f(1/2) = \frac{1}{3} = 0,0222\dots$$

Avec notre convention, c'est la deuxième qui est privilégiée. Noter que du même coup la fonction f n'est pas surjective sur le Cantor. En effet $2/3 \in P$ mais n'a pas de préimage car on a

$$\frac{2}{3} = 0,2 = 0,2000000\dots = 0,122222\dots$$

Dans le deuxième cas on n'a clairement pas de préimage et dans le premier on aurait

$$0,1 = 0,011111$$

qui a comme image

$$\frac{1}{3} = 0,0222222\dots$$

et donc pas $2/3$. ♠

On aura encore besoin du lemme suivant.

Lemme 15.30 Si f est mesurable et si $B \in \mathcal{B}$, alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$.

Remarque Le Lemme est faux si $B \in \mathcal{M}$ (ceci a rapport à la composition de fonctions mesurables, et est en fait démontré plus bas dans le théorème). ♠

Démonstration Soit

$$\mathcal{A} = \{B \subset \mathbb{R} : f^{-1}(B) \text{ est mesurable}\}.$$

Etape 1. Montrons que \mathcal{A} est une σ -algèbre. Ceci suit immédiatement du fait que (cf. Exercice 14.2)

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbb{R}) &= \mathbb{R} \\ f^{-1}(B^c) &= (f^{-1}(B))^c \\ f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) &= \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i). \end{aligned}$$

Etape 2. Montrons maintenant que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ ce qui est l'assertion du lemme. Comme \mathcal{B} et \mathcal{A} sont des σ -algèbres, le résultat suivra si on montre que les intervalles $]a, b[\in \mathcal{A}$. Ceci est équivalent, par définition, à

$$f^{-1}(]a, b[) = \{x : b > f(x) > a\} \text{ est mesurable.}$$

Mais

$$\{x : b > f(x) > a\} = \{x : f(x) > a\} \cap \{x : f(x) < b\}$$

qui sont tous les deux mesurables (par la Proposition 15.21) et donc $]a, b[\in \mathcal{A}$.

■

On peut maintenant conclure avec le théorème suivant.

Théorème 15.31 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$.

Démonstration Supposons par l'absurde que $\mathcal{B} = \mathcal{M}$.

- 1) On considère $V \subset [0, 1]$ un ensemble non mesurable (cf. Théorème 15.18).
- 2) Soit f la fonction de Lebesgue définie dans le Lemme 15.29 et soit

$$B = f(V) \subset f([0, 1]) \subset P$$

et donc B a mesure zéro (car P a mesure 0) et par conséquent (cf. Théorème 15.7) B est mesurable. Par ailleurs, comme f est injective, on a

$$V = f^{-1}(B).$$

Comme, par hypothèse absurde, $\mathcal{B} = \mathcal{M}$, on déduit du Lemme 15.30 que $V = f^{-1}(B)$ est mesurable, ce qui est la contradiction souhaitée. ■

15.7 Exercices

Exercice 15.1 Soient $J_n =]c_n, d_n[$ tels que

$$]a, b[\subset [a, b] \subset \bigcup_{n=1}^N J_n.$$

Montrer qu'alors

$$b - a \leq \sum_{n=1}^N \text{long}(J_n).$$

Indications. (i) Supposer et justifier que, sans perte de généralité, aucun J_n n'est contenu dans un autre J_m et que $J_n \cap [a, b] \neq \emptyset$.

(ii) Ordonner les c_n . En déduire un ordre pour les d_n et montrer l'inégalité

$$c_{n+1} \leq d_n, \quad \forall n = 1, \dots, N-1.$$

Exercice 15.2 Soient $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ et $\epsilon > 0$. Trouver un ouvert $O \supset A$ tel que

$$\text{mes}^*(O) \leq \epsilon.$$

Exercice 15.3 (i) Montrer que si $\text{mes}^*(E) = 0$, alors E est mesurable.

(ii) Montrer qu'un ensemble dénombrable a une mesure extérieure nulle.

(iii) En déduire qu'un ensemble dénombrable est mesurable.

Exercice 15.4 Montrer que la notion de mesure extérieure est la même si on choisit les intervalles de recouvrement ouverts, fermés ou semi-ouverts.

Exercice 15.5 Soit $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ une suite d'ensembles. On définit, respectivement, la limite inférieure et la limite supérieure de cette suite par

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{m=1}^\infty \bigcap_{n \geq m} E_n \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{m=1}^\infty \bigcup_{n \geq m} E_n.$$

Si ces deux limites sont égales on écrit simplement $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$.

(i) Se convaincre que

- $x \in \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n$ si et seulement si x appartient à tous les E_n , sauf en un nombre au plus fini,

- $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$ si et seulement si x appartient à une infinité de E_n .

(ii) Montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n.$$

(iii) Donner un exemple d'une suite d'ensembles $\{E_n\}$ telle que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n \neq \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n.$$

(iv) Montrer que si $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

et si de plus ils sont tous mesurables, alors

$$\text{mes} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes}(E_n)$$

(v) Montrer que si $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

et si de plus ils sont tous mesurables avec $\text{mes}(E_1) < \infty$, alors

$$\text{mes} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes}(E_n).$$

(vi) Montrer que si $\text{mes}(E_1) = \infty$, alors l'égalité précédente n'est en général plus vérifiée.

Exercice 15.6 (Développement ternaire) Pour tout $\{a_i\}_{i \geq 1}$ avec $a_i \in \{0, 1, 2\}$, on note $0, a_1 a_2 a_3 \dots$ le nombre

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}.$$

Considérons la construction inductive suivante : pour tout $a \in [0, 1]$, on pose

$$\begin{cases} a_1 = [3a] \\ \tilde{a}_i = \sum_{n=1}^i \frac{a_n}{3^n} & i \geq 1 \\ a_{i+1} = [3^{i+1}(a - \tilde{a}_i)] & i \geq 1. \end{cases}$$

avec

$$[x] = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N} : n < x\} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(i) Montrer que pour tout i ,

$$0 \leq a - \tilde{a}_i \leq \frac{1}{3^i}$$

et en déduire que tout $a \in [0, 1]$ s'écrit de la forme $0, a_1 a_2 \dots$ avec $a_i \in \{0, 1, 2\}$.

(ii) Montrer que pour tout $a_i \in \{0, 1, 2\}$, alors $0, a_1 a_2 \dots \in [0, 1]$.

(iii) Montrer que le développement ternaire d'un nombre n'est en général pas unique (Indication : $1 = 0.9999\dots$).

(iv) On adopte l'identification suivante : s'il existe $k \geq 2$ tel que $a_n = 2$ pour tout $n \geq k$ et $a_{k-1} < 2$ alors on identifie le développement

$$0, a_1 \cdots a_{k-1} 2 \cdots 2$$

à

$$0, a_1 \cdots (a_{k-1} + 1) 0 \cdots 0.$$

Montrer par l'absurde que, modulo cette identification, le développement ternaire d'un nombre $a \in [0, 1]$ est unique.

Exercice 15.7 (Ensemble de Cantor) Montrer la Proposition 15.28 (sauf la sixième propriété).

Exercice 15.8 (i) Trouver un ensemble mesurable E tel que $\text{mes}(E) > 0$ et tel que E ne contient aucun intervalle.

(ii) Soit E un ensemble mesurable tel que $\text{mes}(E) > 0$. Montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$, il existe un ensemble ouvert $O \supset E$ tel que

$$\text{mes}(E) \geq \alpha \text{mes}(O).$$

En déduire qu'il existe un intervalle ouvert I tel que

$$\text{mes}(E \cap I) \geq \alpha \text{mes}(I).$$

Indication. Appliquer le Théorème 15.5 à un $\epsilon > 0$ bien choisi.

On rappelle maintenant la définition suivante.

Définition 15.32 Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) f est semi-continue inférieurement en $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$,

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) - f(x) \leq \epsilon.$$

f est semi-continue inférieurement (abrégé s.c.i.) si f est semi-continue inférieurement en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) f est semi-continue supérieurement en $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$,

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq \epsilon.$$

f est semi-continue supérieurement (abrégé s.c.s.) si f est semi-continue supérieurement en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 15.9 (i) Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement, respectivement semi-continue supérieurement, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les ensembles

$$G_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}, \quad \text{respectivement} \quad F_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\}$$

sont fermés.

(ii) En déduire qu'une fonction semi-continue inférieurement ou supérieurement est mesurable.

Exercice 15.10 Montrer qu'une fonction croissante ou décroissante est mesurable.

Exercice 15.11 Soient f et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables. Montrer que les fonctions

$$f^2, \quad fg, \quad |f|$$

sont mesurables.

Exercice 15.12 Soient f continue et φ mesurable. Montrer que $f \circ \varphi$ est mesurable.

15.8 Corrigés

Exercice 15.1 (i) On peut tout d'abord supposer qu'aucun J_n ne contient un autre J_m , sinon on l'enlève car le résultat est alors a fortiori vrai. De même on peut supposer que $J_n \cap [a, b] \neq \emptyset$, sinon on l'enlève aussi et le résultat est encore vrai.

(ii) On ordonne alors les c_n de manière à avoir

$$c_1 < \cdots < c_n < c_{n+1} < \cdots < c_N.$$

(iii) Noter qu'alors nécessairement

$$d_1 < \cdots < d_n < d_{n+1} < \cdots < d_N.$$

En effet si $d_n \leq d_k$ pour $k < n$, alors

$$c_k < c_n < d_n \leq d_k$$

et donc $J_n \subset J_k$ ce que nous avons exclu.

(iv) De même on a nécessairement

$$c_{n+1} \leq d_n.$$

Sinon

$$c_n < d_n < c_{n+1} < d_{n+1}$$

et alors l'intervalle $]d_n, c_{n+1}[$ ne serait pas couvert par $\bigcup_{n=1}^N J_n$. Montrons que ceci conduit à une contradiction.

- Si

$$[a, b] \cap]d_n, c_{n+1}[\neq \emptyset$$

alors on a une contradiction avec le fait que $]a, b[$ est couvert par $\bigcup_{n=1}^N J_n$.

- Si

$$[a, b] \cap]d_n, c_{n+1}[= \emptyset$$

alors soit $a < b \leq d_n < c_{n+1} < d_{n+1}$ soit $c_n < d_n < c_{n+1} \leq a < b$ et donc soit $J_{n+1} \cap [a, b] = \emptyset$ soit $J_n \cap [a, b] = \emptyset$ ce qui a été exclu.

(v) On peut maintenant conclure

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \text{long}(J_n) &= \sum_{n=1}^N (d_n - c_n) \geq \sum_{n=1}^N (d_n - c_n) - \sum_{n=1}^{N-1} (d_n - c_{n+1}) \\ &= d_N - c_1 \geq b - a. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

Exercice 15.2 Soit $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération de $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = A$. Soit

$$O = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n - \epsilon/2^{n+1}, a_n + \epsilon/2^{n+1}[.$$

Il est évident que O est ouvert et que $O \supset A$. De plus

$$\text{mes}^*(O) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{long}([a_n - \epsilon/2^{n+1}, a_n + \epsilon/2^{n+1}[) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon/2^n = \epsilon. \quad \spadesuit$$

Exercice 15.3 (i) On rappelle que E est mesurable si et seulement si pour tout $A \subset \mathbb{R}$,

$$\text{mes}^*(A) = \text{mes}^*(A \cap E) + \text{mes}^*(A \cap E^c).$$

Par sous-additivité, nous avons directement

$$\text{mes}^*(A) = \text{mes}^*((A \cap E) \cup (A \cap E^c)) \leq \text{mes}^*(A \cap E) + \text{mes}^*(A \cap E^c).$$

Comme

$$\begin{aligned} (A \cap E) \subset E &\Rightarrow 0 \leq \text{mes}^*(A \cap E) \leq \text{mes}^*(E) = 0 \\ &\Rightarrow \text{mes}^*(A \cap E) = 0 \end{aligned}$$

et

$$(A \cap E^c) \subset A \Rightarrow \text{mes}^*(A \cap E^c) \leq \text{mes}^*(A)$$

on obtient bien

$$\text{mes}^*(A \cap E) + \text{mes}^*(A \cap E^c) \leq \text{mes}^*(A).$$

(ii) Soit $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ dénombrable, avec $x_n \in \mathbb{R}$. Par la sous-additivité de mes^* et le fait que les points sont de mesure nulle, on a donc

$$\text{mes}^*(E) = \text{mes}^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{mes}^*(\{x_n\}) = 0.$$

(iii) Immédiat en utilisant (i) et (ii). \spadesuit

Exercice 15.4 Nous allons seulement montrer l'assertion pour des intervalles du type $[a_n, b_n]$; pour les intervalles du type $]a_n, b_n]$ et $[a_n, b_n[$ la démonstration est identique. Définissons

$$\text{mes}_f^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) : I_n^f = [a_n, b_n], E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^f \right\}.$$

On va montrer que

$$\text{mes}_f^*(E) = \text{mes}^*(E), \quad \forall E \subset \mathbb{R}.$$

Soit $\{]a_n, b_n[\}_{n=1}^\infty$ un recouvrement ouvert de E ; on a alors que $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^\infty$ est un recouvrement fermé de E , d'où

$$\sum_{n=1}^\infty \text{long}(]a_n, b_n[) = \sum_{n=1}^\infty \text{long}([a_n, b_n]) \geq \text{mes}_f^*(E).$$

Ceci étant valable pour tout recouvrement ouvert $\{]a_n, b_n[\}_{n=1}^\infty$, on a bien

$$\text{mes}^*(E) \geq \text{mes}_f^*(E)$$

Soit $\epsilon > 0$ et montrons que

$$\text{mes}^*(E) \leq \text{mes}_f^*(E) + \epsilon,$$

ce qui nous donnera l'inégalité désirée. Soit un recouvrement fermé $F_n = [a_n, b_n]$. Nous définissons ensuite des intervalles ouverts

$$I_n =]a_n - \epsilon/2^{n+1}, b_n + \epsilon/2^{n+1}[\supset F_n.$$

Nous avons

$$\text{long}(I_n) = \text{long}(F_n) + \epsilon/2^n,$$

d'où

$$\sum_{n=1}^\infty \text{long}(I_n) = \epsilon + \sum_{n=1}^\infty \text{long}(F_n).$$

Puisque $\{I_n\}$ est un recouvrement ouvert de E , nous avons

$$\text{mes}^*(E) \leq \epsilon + \sum_{n=1}^\infty \text{long}(F_n).$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour n'importe quel recouvrement fermé de E , nous pouvons prendre l'infimum dans le membre de droite et obtenir

$$\text{mes}^*(E) \leq \text{mes}_f^*(E) + \epsilon. \quad \spadesuit$$

Exercice 15.5 (i) Evident.

(ii) Soit $x \in \bigcup_{m=1}^\infty \bigcap_{n \geq m} E_n$. Alors il existe $M \geq 1$ tel que

$$x \in \bigcap_{n \geq M} E_n. \quad (15.9)$$

Soit $m \geq 1$. Si $m \leq M$, alors par (15.9),

$$x \in E_M \subset \bigcup_{n \geq M} E_n \subset \bigcup_{n \geq m} E_n.$$

Si $m \geq M$, alors par (15.9),

$$x \in E_m \subset \bigcup_{n \geq m} E_n.$$

Par conséquent, $x \in \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$.

(iii) La suite d'ensemble $\{E_n\}$ définie par

$$E_n = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \emptyset & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

vérifie

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \emptyset \quad \text{alors que} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \mathbb{R}.$$

(iv) Si $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, alors pour tout $m \geq 1$

$$\bigcap_{n \geq m} E_n = E_m \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \geq m} E_n = \bigcup_{n \geq 1} E_n,$$

d'où

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

On définit $F_1 = E_1$ et $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$ pour $n > 1$. On montre facilement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E_n = \bigcup_{i=1}^n F_i$$

et donc

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Il est également clair que les ensembles F_n sont mesurables et disjoints. On obtient ainsi

$$\text{mes} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n \right) = \text{mes} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \text{mes} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{mes}(F_n)$$

et donc

$$\text{mes} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \text{mes}(F_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes} \left(\bigcup_{i=1}^n F_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes}(E_n).$$

Observer que nous ne pouvons pas écrire

$$\text{mes}(F_n) = \text{mes}(E_n) - \text{mes}(E_{n-1}),$$

car la mesure des E_n n'est a priori pas finie.

(v) Si $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, alors pour tout $m \geq 1$

$$\bigcup_{n \geq m} E_n = E_m \quad \text{et} \quad \bigcap_{n \geq m} E_n = \bigcap_{n \geq 1} E_n,$$

d'où

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Si les E_n sont mesurables, alors pour tout $n \geq 1$, nous avons

$$\text{mes}(E_1 \setminus E_n) = \text{mes}(E_1) - \text{mes}(E_1 \cap E_n) = \text{mes}(E_1) - \text{mes}(E_n).$$

On a que $E_1 \setminus E_1 \subset E_1 \setminus E_2 \subset E_1 \setminus E_3 \subset \dots$, et donc, par le point (iv) et le fait que $\text{mes}(E_1) < \infty$,

$$\begin{aligned} \text{mes}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (E_1 \setminus E_n)\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes}(E_1 \setminus E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\text{mes}(E_1) - \text{mes}(E_n)] \\ &= \text{mes}(E_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes}(E_n). \end{aligned} \quad (15.10)$$

Or,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (E_1 \setminus E_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_n) = E_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \setminus \lim_{n \rightarrow \infty} E_n.$$

Ainsi par (15.10), on obtient que

$$\text{mes}(E_1) - \text{mes}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n\right) = \text{mes}(E_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes}(E_n).$$

Pour finir, on obtient le résultat soustrayant de chaque côté de l'égalité précédente $\text{mes}(E_1)$ (cette opération est permise car $\text{mes}(E_1) < \infty$).

(vi) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $E_n =]n, \infty[$. On a clairement que $E_1 \supset E_2 \supset \dots$, $\text{mes}(E_n) = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \emptyset$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes}(E_n) = \infty \neq 0 = \text{mes}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n\right). \quad \spadesuit$$

Exercice 15.6 (i) Il y a trois choses à montrer.

- Soit $\{a_i\}$ la suite construite dans l'énoncé et montrons que pour tout $i \geq 1$

$$0 \leq (a - \tilde{a}_i) \leq \frac{1}{3^i}. \quad (15.11)$$

Nous savons que pour tout $x \geq 0$,

$$x - [x] \in [0, 1].$$

Pour $i = 1$, nous avons donc

$$a - \tilde{a}_1 = a - \frac{[3a]}{3} = \frac{1}{3}(3a - [3a]) \in [0, 1/3].$$

Pour $i \geq 2$, nous calculons

$$\begin{aligned} 3^i(a - \tilde{a}_i) &= 3^i\left(a - \tilde{a}_{i-1} - \frac{a_i}{3^i}\right) \\ &= 3^i(a - \tilde{a}_{i-1}) - [3^i(a - \tilde{a}_{i-1})] \in [0, 1] \end{aligned}$$

d'où le résultat.

- Montrons que $a_i \in \{0, 1, 2\}$. En effet, puisque $0 \leq a \leq 1$, on a que $0 \leq 3a \leq 3$ et donc $a_1 = \lfloor 3a \rfloor \in \{0, 1, 2\}$. En utilisant (15.11), on a que

$$0 \leq 3^i (a - \tilde{a}_i) \leq 1$$

et donc

$$0 \leq 3^{i+1} (a - \tilde{a}_i) \leq 3 \quad \text{d'où } a_{i+1} = \lfloor 3^{i+1} (a - \tilde{a}_i) \rfloor \in \{0, 1, 2\}.$$

- Montrons pour finir que $a = 0, a_1 a_2 \dots$. Utilisant à nouveau (15.11), il vient que

$$a - \tilde{a}_i = a - \sum_{n=1}^i \frac{a_n}{3^n} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } i \rightarrow \infty.$$

La suite $\{a_i\}$ a donc bien toutes les propriétés voulues.

(ii) Si $a_i \in \{0, 1, 2\}$, alors

$$0, a_1 a_2 \dots \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1.$$

(iii) On a $\frac{1}{3} = 0,10\dots0 = 0,02\dots2$.

(iv) Soient

$$0, a_1 a_2 \dots = 0, b_1 b_2 \dots$$

deux développements non-identiques. Il existe donc $k \geq 0$ tel que

$$a_n = b_n \text{ pour tout } n \leq k \quad \text{et} \quad a_{k+1} \neq b_{k+1}.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $a_{k+1} < b_{k+1}$. Il faut montrer que la seule possibilité est que

$$\begin{cases} b_{k+1} = a_{k+1} + 1 \\ a_m = 2 \text{ et } b_m = 0 \quad \forall m \geq k+2. \end{cases} \quad (15.12)$$

Par (i), nous savons que pour des $a_n \in \{0, 1, 2\}$,

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \leq \frac{1}{3^{k+1}} \quad \text{avec égalité si et seulement si } a_n = 2 \text{ pour tout } n \geq k+2. \quad (15.13)$$

Montrons à présent (15.12) par l'absurde :

- si $a_{k+1} = 0$ et $b_{k+1} = 2$ alors

$$0 = (0, b_1 \dots) - (0, a_1 \dots) \geq \frac{2}{3^{k+1}} - \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \geq \frac{2}{3^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}} > 0,$$

où nous avons utilisé (15.13) pour la seconde inégalité ;

- si $a_{k+1} + 1 = b_{k+1}$ et qu'il existe $m \geq k+2$ tel que $a_m \neq 2$ ou $b_m \neq 0$ alors

$$0 = (0, b_1 \dots) - (0, a_1 \dots) = \frac{1}{3^{k+1}} - \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{3^n} > \frac{1}{3^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}} = 0,$$

où nous avons utilisé (15.13) pour la seconde inégalité. ♠

Exercice 15.7 (i) Comme chaque P_k est fermé, on a que $P = \bigcap_{k=0}^{\infty} P_k$ est fermé et donc compact puisque borné par $[0, 1]$.

(ii) Chaque P_k contient 2^k intervalles fermés de longueur $(1/3)^k$. Comme $P = \bigcap_{k=0}^{\infty} P_k$, il s'ensuit directement que P ne peut pas contenir d'intervalle. En effet s'il existait un intervalle $I \subset P$ avec $\text{long}(I) > 0$, il existerait alors k assez grand pour que

$$\text{long}(I) > \frac{1}{3^k}$$

et donc en particulier I ne peut pas être inclus dans P_k . Contradiction.

(iii) Posons

$$A = \left\{ a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} : a_n \in \{0, 2\} \right\},$$

et montrons que

$$A = P.$$

(\subset) Soit $a = 0, a_1 a_2 \dots \in A$ et montrons que $a \in P_k$ pour tout $k \geq 1$. Posons

$$\tilde{a}_k = \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{3^n}.$$

Par le point (i) de l'Exercice 15.6, nous savons que

$$0 \leq a - \tilde{a}_k \leq \frac{1}{3^k}, \quad \forall k \geq 1,$$

d'où

$$a \in [\tilde{a}_k, \tilde{a}_k + 1/3^k].$$

Nous allons montrer par induction que cet intervalle appartient à P_k .

- Pour $k = 1$, par définition de A , on a soit $\tilde{a}_1 = 0$, soit $\tilde{a}_1 = 2/3$. Puisque

$$P_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1],$$

alors on a bien

$$[\tilde{a}_1, \tilde{a}_1 + 1/3] \subset P_1.$$

- Supposons que

$$[\tilde{a}_k, \tilde{a}_k + 1/3^k] \subset P_k$$

pour un certain $k \geq 1$ et montrons cette inclusion pour $k+1$. Par construction, l'intervalle $[\tilde{a}_k, \tilde{a}_k + 1/3^k] \subset P_k$ engendre deux intervalles de P_{k+1} :

$$[\tilde{a}_k, \tilde{a}_k + 1/3^{k+1}] \cup [\tilde{a}_k + 2/3^{k+1}, \tilde{a}_k + 1/3^k] \subset P_{k+1}.$$

Puisque

$$\tilde{a}_{k+1} = \tilde{a}_k + \frac{a_{k+1}}{3^{k+1}}$$

alors, par définition de A , on a soit $\tilde{a}_{k+1} = \tilde{a}_k$, soit $\tilde{a}_{k+1} = \tilde{a}_k + 2/3^{k+1}$, d'où

$$[\tilde{a}_{k+1}, \tilde{a}_{k+1} + 1/3^{k+1}] \subset P_{k+1}.$$

(\supset) Soit $a \in P$. On définit alors la suite $\{a_i\}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_1 = 0 & \text{si } a \in [0, 1/3] \\ a_1 = 2 & \text{si } a \in [2/3, 1] \end{cases}$$

et ainsi de suite a_k valant 0 si a se trouve dans le premier tiers de l'intervalle de P_{k-1} dans lequel se trouve a et 2 si a se trouve dans le troisième tiers de ce même intervalle. Par définition même de la suite a_i on a que

$$0 \leq a - \sum_{n=1}^k \frac{a_n}{3^n} \leq \frac{1}{3^k};$$

il s'ensuit directement que $a = 0, a_1 a_2 \dots \in A$.

(iv) On utilise la méthode classique dite de la "diagonale de Cantor". On sait par (iii) que tout élément $a \in P$ peut s'écrire

$$a = 0, a_1 a_2 a_3 \dots \quad \text{avec } a_i = 0 \text{ ou } 2.$$

On remarque aussi que cette représentation est unique en utilisant la dernière partie de l'Exercice 15.6. Supposons par l'absurde que P soit dénombrable et soit $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots$ une énumération de P . Chaque $a^{(i)}$ s'écrit donc $a^{(i)} = 0, a_1^{(i)} a_2^{(i)} \dots$. Pour tout $i > 0$, on définit le nombre $\bar{a} = 0, \bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots$ par

$$\bar{a}_i = 2 - a_i^{(i)}$$

Ce nombre \bar{a} appartient à P et diffère de tous les $a^{(n)}$, ce qui est contradictoire.

(v) On commence par remarquer que P est mesurable puisque chaque P_k l'est. Ensuite, puisque P_k est composé de 2^k intervalles disjoints de longueur $(1/3)^k$, on a que

$$\text{mes}(P_k) = (2/3)^k \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } k \rightarrow \infty.$$

Utilisant l'Exercice 15.5 (iv), on a que

$$\text{mes}(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{mes}(P_k) = 0. \quad \spadesuit$$

Exercice 15.8 (i) Soit $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Il est clair que E est mesurable et que $\text{mes}(E) = \infty$. Puisque que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il s'ensuit directement que E ne peut pas contenir d'intervalles.

(ii) Soient $0 < \alpha < 1$ et $E \subset \mathbb{R}$ tel que $\text{mes}(E) > 0$. Soit

$$\epsilon = \text{mes}(E) \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) > 0.$$

Par le Théorème 15.5, il existe un ouvert $O \supset E$ tel que

$$\text{mes}(O) \leq \text{mes}(E) + \epsilon = \text{mes}(E) + \text{mes}(E) \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) = \frac{\text{mes}(E)}{\alpha},$$

d'où

$$\text{mes}(E) \geq \alpha \text{mes}(O). \quad (15.14)$$

Par le Corollaire 14.6, on sait que O se décompose en une famille $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts disjoints. Nous allons montrer que l'un de ces intervalles vérifie l'assertion. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas ; on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{mes}(E \cap I_n) < \alpha \text{mes}(I_n). \quad (15.15)$$

Utilisant le fait que les I_n sont disjoints et que leur union vaut O , on obtient

$$\text{mes}(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{mes}(E \cap I_n) < \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha \text{mes}(I_n) = \alpha \text{mes}(O),$$

ce qui contredit (15.14). ♠

Exercice 15.9 (i) Montrons que si f est s.c.i., alors G_α est fermé (la démonstration est identique pour f s.c.s.) Soit une suite $\{x_n\} \subset G_\alpha$ telle que $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$ et soit $\epsilon > 0$. Comme f est s.c.i. en x , il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y) + \epsilon.$$

Par convergence de $\{x_n\}$ vers x , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |x - x_n| \leq \delta,$$

d'où

$$f(x) \leq f(x_n) + \epsilon \leq \alpha + \epsilon$$

pour n suffisamment grand. Cette inégalité étant vraie pour tout $\epsilon > 0$, on a donc

$$f(x) \leq \alpha,$$

c'est à dire $x \in G_\alpha$, ce qui prouve que G_α est fermé.

(ii) Comme G_α est fermé, il est mesurable. Par la Proposition 15.21, ceci implique que f est mesurable. ♠

Exercice 15.10 Si une fonction f est décroissante (respectivement mesurable), alors $-f$ est croissante (respectivement mesurable). Il suffit donc de montrer que si f est croissante alors f est mesurable, c'est à dire pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$$E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$$

est mesurable. On peut supposer sans perte de généralité que $E_\alpha \neq \emptyset$, car l'ensemble vide est mesurable. Soient $x, y \in E_\alpha$, $x < y$. Comme f est croissante, on a trivialement

$$[x, y] \subset E_\alpha,$$

ce qui implique que E_α est connexe et ainsi un intervalle, donc E_α est mesurable.

En fait, on peut montrer que E_α est nécessairement égal à l'un des quatre ensembles mesurables suivants :

$$[a, \infty[, \quad]a, \infty[, \quad \emptyset, \quad \mathbb{R},$$

pour un certain $a \in \mathbb{R}$. ♠

Exercice 15.11 (i) Si $\alpha \leq 0$, on a

$$\{x : f^2(x) > \alpha\} = \mathbb{R}$$

qui est mesurable. Alors que si $\alpha > 0$, on trouve

$$\{x : f^2(x) > \alpha\} = \{x : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x : f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$$

qui est aussi mesurable.

(ii) Comme

$$fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$$

est mesurable par (i) et par la Proposition 15.22.

(iii) On a

$$|f| = \max(f, -f)$$

est mesurable par la Proposition 15.22 et le Théorème 15.24. ♠

Exercice 15.12 Il faut montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$(f \circ \varphi)^{-1}([\alpha, \infty]) = \varphi^{-1}(f^{-1}([\alpha, \infty]))$$

est mesurable. Puisque f est continue, alors $O = f^{-1}([\alpha, \infty])$ est ouvert, donc borélien. Par le Lemme 15.30, puisque φ est mesurable, alors $\varphi^{-1}(O)$ est mesurable. ♠

Chapitre 16

L'intégrale de Lebesgue

16.1 Intégrale des fonctions non négatives

Définition 16.1 On dit que $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une **fonction simple** s'il existe $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ distincts et si

$$A_i = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = a_i\}$$

alors

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}(x)$$

où

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Remarque φ est mesurable si et seulement si les A_i sont mesurables. ♠

Définition 16.2 (i) Si φ est une fonction mesurable simple alors

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \text{mes}(A_i).$$

(ii) Si f est mesurable et $f \geq 0$ alors

$$\int f = \sup \left\{ \int \varphi : 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ mesurable simple} \right\}$$

(iii) Si $E \subset \mathbb{R}$ est mesurable et $f \geq 0$ est mesurable, alors

$$\int_E f = \int f \chi_E.$$

Remarque Quand ce sera nécessaire, on notera $R \int_a^b f$ pour l'intégrale de Riemann. ♠

Proposition 16.3 Si $\varphi \geq 0$ est mesurable et simple alors les assertions suivantes ont lieu.

- (i) Les définitions (i) et (ii) ci-dessus coïncident.
- (ii) Pour tout E mesurable

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \text{mes}(A_i \cap E).$$

- (iii) Pour tout $a > 0$

$$\int a \varphi = a \int \varphi.$$

- (iv) Soient E_i des ensembles mesurables deux à deux disjoints et

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Alors

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \varphi.$$

Démonstration Cf. Exercices 16.1 et 16.2. ■

Proposition 16.4 (i) Si $f \geq 0$ est mesurable, alors

$$f = 0 \text{ p.p.} \Leftrightarrow \int f = 0.$$

- (ii) Si $0 \leq f \leq g$ sont mesurables sur un ensemble E mesurable, alors

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

En particulier si $E = \mathbb{R}$, alors

$$\int f \leq \int g.$$

- (iii) Si $a \geq 0$ et $f \geq 0$ est mesurable, alors

$$a \int f = \int a f.$$

- (iv) Si $E \subset F$ sont mesurables et $f \geq 0$ est mesurable, alors

$$\int_E f \leq \int_F f.$$

- (v) Si $\text{mes}(E) = 0$ et $f \geq 0$ est mesurable, alors

$$\int_E f = 0.$$

Démonstration (i) (\Rightarrow) Soit $f = 0$ p.p.. Si φ est simple et mesurable $0 \leq \varphi \leq f$, alors $\varphi = 0$ p.p.. Soient

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = a_1 = 0\}$$

$$A_i = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = a_i > 0\}, \quad i = 2, \dots, n.$$

On a donc que

$$\text{mes}(A_i) = 0, \quad i = 2, \dots, n$$

et par conséquent

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \text{mes}(A_i) = a_1 \text{mes}(A_1) + \sum_{i=2}^n a_i \text{mes}(A_i) = 0.$$

De ceci on déduit immédiatement que

$$\int f = \sup \left\{ \int \varphi : 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ mesurable simple} \right\} = 0.$$

(\Leftarrow) Supposons maintenant que $\int f = 0$. Si on pose

$$E_n = \{x : f(x) \geq 1/n\}$$

alors

$$\int f \geq \int \frac{1}{n} \chi_{E_n} \geq 0$$

(car $\frac{1}{n} \chi_{E_n}$ est une fonction simple $\leq f$) et on a ainsi

$$0 = \int f \geq \frac{1}{n} \text{mes}(E_n) \Rightarrow \text{mes}(E_n) = 0.$$

Mais

$$\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \geq 1/n\}$$

ce qui implique

$$\text{mes}\{x : f(x) > 0\} = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ p.p.}$$

(ii) - (v) Cf. Exercice 16.3. ■

Théorème 16.5 (Théorème de la convergence monotone) Soient $f_\nu \geq 0$ une suite de fonctions mesurables $f_\nu(x) \nearrow f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (ce qui veut dire que pour tout x fixé $f_\nu(x) \leq f_{\nu+1}(x)$ et $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = f(x)$), alors

$$\int f = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu.$$

Démonstration *Etape 1.* Comme la suite $\int f_\nu$ est croissante et $\int f_\nu \leq \int f$, on a sûrement

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu \leq \int f.$$

Etape 2. Montrons l'inégalité inverse. Soit $0 \leq \varphi \leq f$ une fonction simple et mesurable. On se fixe $\alpha \in]0, 1[$ et on définit $E_0 = \emptyset$ et

$$E_\nu = \{x \in \mathbb{R} : f_\nu(x) \geq \alpha \varphi(x)\}.$$

Noter que

$$E_\nu \subset E_{\nu+1} \quad \text{et} \quad E_\nu = \bigcup_{k=1}^{\nu} (E_k \setminus E_{k-1}).$$

On déduit par ailleurs que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} E_\nu = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \setminus E_{k-1}).$$

En effet si $x \in \mathbb{R}$ et comme $\alpha < 1$, on a que pour ν suffisamment grand

$$f(x) \geq f_\nu(x) \geq \alpha f(x) \geq \alpha \varphi(x) \quad \Rightarrow \quad x \in E_\nu.$$

On trouve donc, par la Proposition 16.3 (iv) (les $(E_k \setminus E_{k-1})$ étant deux à deux disjoints), que

$$\int f_\nu \geq \int_{E_\nu} f_\nu \geq \alpha \int_{E_\nu} \varphi = \alpha \int_{\bigcup_{k=1}^{\nu} (E_k \setminus E_{k-1})} \varphi = \alpha \sum_{k=1}^{\nu} \int_{E_k \setminus E_{k-1}} \varphi.$$

En passant à la limite on a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu \geq \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k \setminus E_{k-1}} \varphi.$$

Utilisant, à nouveau, la Proposition 16.3 (iv) et le fait que $E_k \setminus E_{k-1}$ sont deux à deux disjoints et leur union est \mathbb{R} , on déduit que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu \geq \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k \setminus E_{k-1}} \varphi = \alpha \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \setminus E_{k-1})} \varphi = \alpha \int \varphi.$$

En laissant $\alpha \rightarrow 1$ on obtient

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu \geq \int \varphi$$

et ceci quel que soit $0 \leq \varphi \leq f$ une fonction simple. On a ainsi bien démontré que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu \geq \int f.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Théorème 16.6 (Lemme de Fatou) Soient $f_\nu \geq 0$ une suite de fonctions mesurables, alors

$$\int \liminf_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu.$$

Démonstration On pose

$$g_\nu(x) = \inf_{j \geq \nu} \{f_j(x)\}$$

et on observe que $g_\nu(x) \leq g_{\nu+1}(x)$ et

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu(x) = \liminf_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = f(x).$$

Par ailleurs comme $g_\nu(x) \leq f_\nu(x)$ et $\int g_\nu$ est une suite croissante on a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int g_\nu = \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int g_\nu \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu. \quad (16.1)$$

On applique alors le Théorème de la convergence monotone (Théorème 16.5) à la suite g_ν et on déduit que

$$\int \liminf_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu = \int \lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int g_\nu.$$

En combinant l'identité ci-dessus et (16.1) on trouve

$$\int \liminf_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int g_\nu \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu$$

qui est le résultat souhaité. ■

Théorème 16.7 Soit $f \geq 0$ une fonction mesurable, alors il existe une suite φ_ν de fonctions simples et mesurables telles que $\varphi_\nu(x) \nearrow f(x)$.

Démonstration On divise la démonstration en quatre étapes.

Etape 1. On construit la suite de fonctions φ_ν de la manière suivante. Soient $\nu \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} F_\nu &= \{x : \nu < f(x)\} \\ E_{\nu,k} &= \left\{x : \frac{k-1}{2^\nu} < f(x) \leq \frac{k}{2^\nu}\right\}, \quad k = 1, 2, \dots, \nu 2^\nu \\ G &= \{x : f(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Observer que

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= F_\nu \cup \left[\bigcup_{k=1}^{\nu 2^\nu} E_{\nu,k} \right] \cup G, \quad \forall \nu \\ E_{\nu,k} \cap E_{\nu,l} &= \emptyset, \quad \forall k \neq l \text{ et } \forall \nu. \end{aligned}$$

et

$$F_\nu \cap E_{\nu,k} = E_{\nu,k} \cap G = F_\nu \cap G = \emptyset, \quad \forall k = 1, 2, \dots, \nu 2^\nu \text{ et } \forall \nu.$$

On définit alors

$$\varphi_\nu = \sum_{k=1}^{\nu 2^\nu} \frac{k-1}{2^\nu} \chi_{E_{\nu,k}} + \nu \chi_{F_\nu}.$$

On va montrer, dans les étapes suivantes, que la suite $\{\varphi_\nu\}$ a toutes les propriétés voulues.

Etape 2. Comme f est mesurable et positive on a clairement que $0 \leq \varphi_\nu \leq f$ sont mesurables et simples.

Etape 3. Montrons maintenant que $\{\varphi_\nu\}$ est une suite monotone, c'est à dire

$$\varphi_\nu(x) \leq \varphi_{\nu+1}(x).$$

Comme

$$\mathbb{R} = F_\nu \cup \left[\bigcup_{k=1}^{\nu 2^\nu} E_{\nu,k} \right] \cup G, \quad \forall \nu$$

on doit considérer quatre cas

$$x \in F_{\nu+1} \quad \Leftrightarrow \quad \nu + 1 < f(x)$$

ou

$$x \in F_\nu \setminus F_{\nu+1} \quad \Leftrightarrow \quad \nu < f(x) \leq \nu + 1$$

ou, pour un certain $k = 1, 2, \dots, \nu 2^\nu$,

$$x \in E_{\nu,k} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{k-1}{2^\nu} < f(x) \leq \frac{k}{2^\nu} \leq \nu$$

ou

$$x \in G \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0.$$

Cas 1 : $x \in F_{\nu+1}$. On a ainsi que $x \in F_\nu$ et $\varphi_\nu(x) = \nu$ et $\varphi_{\nu+1}(x) = \nu + 1$ et donc le résultat suit.

Cas 2 : $x \in F_\nu \setminus F_{\nu+1}$. Ceci implique que

$$\varphi_\nu(x) = \nu$$

et de plus

$$\nu < f(x) \leq \nu + 1.$$

On peut réécrire cela comme

$$\nu = \frac{(\nu 2^{\nu+1} + 1) - 1}{2^{\nu+1}} < f(x) \leq \frac{(\nu + 1) 2^{\nu+1}}{2^{\nu+1}} = \nu + 1.$$

Et par conséquent $x \in E_{\nu+1,k}$ pour un certain entier

$$(\nu 2^{\nu+1} + 1) \leq k \leq (\nu + 1) 2^{\nu+1}$$

c'est à dire

$$\varphi_{\nu+1}(x) = \frac{k-1}{2^{\nu+1}}$$

et ainsi

$$\varphi_{\nu}(x) = \nu = \frac{(\nu 2^{\nu+1} + 1) - 1}{2^{\nu+1}} \leq \frac{k-1}{2^{\nu+1}} = \varphi_{\nu+1}(x).$$

Cas 3 : $x \in E_{\nu,k}$ pour un certain $k = 1, 2, \dots, \nu 2^{\nu}$. C'est à dire

$$\frac{k-1}{2^{\nu}} < f(x) \leq \frac{k}{2^{\nu}}$$

et donc

$$\varphi_{\nu}(x) = \frac{k-1}{2^{\nu}}.$$

Soit alors $l = 2k - 1$, ceci implique en particulier que

$$1 \leq l \leq \nu 2^{\nu+1} - 1 \leq (\nu + 1) 2^{\nu+1}$$

et ainsi

$$\frac{l-1}{2^{\nu+1}} = \frac{k-1}{2^{\nu}} < f(x) \leq \frac{k}{2^{\nu}} = \frac{l+1}{2^{\nu+1}}$$

et donc

$$\varphi_{\nu}(x) = \frac{k-1}{2^{\nu}} = \frac{l-1}{2^{\nu+1}} \leq \varphi_{\nu+1}(x).$$

Le résultat est donc aussi vrai dans ce cas.

Cas 4 : $x \in G$. C'est à dire que $f(x) = 0$. On a alors

$$\varphi_{\nu}(x) = \varphi_{\nu+1}(x) = 0$$

et dans ce cas on a aussi l'assertion.

Etape 4. Montrons enfin que

$$\varphi_{\nu}(x) \rightarrow f(x).$$

Cas 1. Si $f(x) = 0$, alors $\varphi_{\nu}(x) = 0$ et on a donc convergence trivialement.

Cas 2. Si $0 < f(x) < \infty$, alors

$$x \in F_{\nu}^c, \quad \forall \nu \geq \nu_0(x)$$

et donc (comme $E_{\nu,k} \cap F_{\nu} = \emptyset$, on déduit, comme $f(x) \neq 0$, que $x \in E_{\nu,k}$ pour un certain $k = 1, 2, \dots, \nu 2^{\nu}$)

$$0 \leq f(x) - \varphi_{\nu}(x) = |f(x) - \varphi_{\nu}(x)| \leq \frac{1}{2^{\nu}}$$

et ainsi

$$\varphi_{\nu}(x) \rightarrow f(x).$$

Cas 3. Si $f(x) = \infty$, alors

$$x \in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} F_{\nu}$$

et comme $\varphi_{\nu}(x) = \nu$ si $x \in F_{\nu}$, on déduit que

$$\varphi_{\nu}(x) \rightarrow f(x).$$

Ceci termine la démonstration. ■

Corollaire 16.8 Soient f et φ_{ν} comme dans le théorème, alors

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int \varphi_{\nu} = \int f.$$

Démonstration Cf. Théorèmes 16.5 et 16.7. ■

Proposition 16.9 Si $f, g \geq 0$ sont mesurables, alors

$$\int (f + g) = \int f + \int g.$$

Démonstration Cf. Exercice 16.4. ■

Proposition 16.10 Si $f_{\nu} \geq 0$ et mesurables, alors

$$\int \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int f_{\nu}.$$

Démonstration Cf. Exercice 16.4. ■

16.2 L'intégrale générale

Notation

$$f^{+}(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{et} \quad f^{-}(x) = \max\{-f(x), 0\}. \quad \spadesuit$$

Proposition 16.11 Les propriétés suivantes ont lieu.

- (i) $f = f^{+} - f^{-}$.
- (ii) $|f| = f^{+} + f^{-}$.
- (iii) f est mesurable $\Leftrightarrow f^{+}$ et f^{-} sont mesurables.

Démonstration Evidente. ■

Définition 16.12 (i) Soit f mesurable alors on dit que f est **intégrable**, et on notera par la suite $f \in L^1(\mathbb{R})$, si

$$\int |f| < \infty.$$

Dans ce cas l'intégrale est définie comme

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

(ii) Si f est mesurable et E est mesurable, on dit que f est intégrable sur E si $\chi_E f$ est intégrable (on notera plus tard $f \in L^1(E)$) et on note

$$\int_E f = \int \chi_E f.$$

(iii) Si f est mesurable et une des $\int f^+$ ou $\int f^-$ est finie, on note quand même

$$\int f = \int f^+ - \int f^-.$$

Remarque On remarque que

$$\int |f| < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int f^+ < \infty \quad \text{et} \quad \int f^- < \infty.$$

Proposition 16.13 Si f et g sont intégrables et si $a \in \mathbb{R}$, alors

$$\int a f = a \int f$$

$$\int (f + g) = \int f + \int g$$

$$f = 0 \text{ p.p.} \quad \Rightarrow \quad \int f = 0$$

$$f \leq g \text{ p.p.} \quad \Rightarrow \quad \int f \leq \int g.$$

De plus si A et B sont mesurables et si $A \cap B = \emptyset$, alors

$$\int_A f + \int_B f = \int_{A \cup B} f.$$

Démonstration Elementaire comme dans Exercices 16.2, 16.3 et 16.4. ■

Théorème 16.14 (Théorème de la convergence dominée) Soient $g \geq 0$ une fonction intégrable et f_ν une suite de fonctions mesurables telles que $|f_\nu| \leq g$ p.p. et

$$f(x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) \quad \text{p.p.}$$

alors f est intégrable et

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu = \int f.$$

Démonstration *Etape 1.* Comme $|f_\nu| \leq g$, on a immédiatement que

$$|f| \leq g \quad \text{p.p.}$$

Par la Proposition 16.4, on a

$$\int |f| \leq \int g \quad \text{et} \quad \int |f_\nu| \leq \int g.$$

Comme g est intégrable et positive on déduit que f et f_ν sont intégrables.

Etape 2. Par ailleurs $g + f_\nu \geq 0$ et mesurable et, par le Lemme de Fatou,

$$\begin{aligned} \int g + \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu &= \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int (g + f_\nu) \geq \int \liminf_{\nu \rightarrow \infty} (g + f_\nu) \\ &= \int g + \int \liminf_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu = \int g + \int \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu. \end{aligned}$$

Mais comme $\int g < \infty$ on a donc

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu \geq \int \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu = \int f.$$

De même $g - f_\nu \geq 0$ et mesurable et, par le Lemme de Fatou,

$$\int g - \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu = \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int (g - f_\nu) \geq \int \liminf_{\nu \rightarrow \infty} (g - f_\nu) = \int g - \int f$$

ce qui implique

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu \leq \int f.$$

La combinaison de tous ces résultats donne le théorème. ■

16.3 Relation entre les intégrales de Riemann et de Lebesgue

Voici deux théorèmes qui relient l'intégrale de Riemann à celle de Lebesgue.

Théorème 16.15 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée et R -intégrable, alors elle est (Lebesgue) intégrable et

$$R \int_a^b f = \int_a^b f.$$

Remarque Attention si le domaine est non borné ou la fonction est non bornée, le résultat peut être faux. Ceci provient du fait que pour qu'une fonction soit Lebesgue intégrable on requiert que

$$\int f^+ dx < \infty \quad \text{et} \quad \int f^- dx < \infty. \quad \spadesuit$$

Le deuxième théorème important qui caractérise l'intégrabilité au sens de Riemann est le suivant.

Théorème 16.16 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée alors

$$f \text{ est } R\text{-intégrable} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est continue p.p.}$$

Exemple Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1], \end{cases}$$

alors f est discontinue partout et n'est pas R -intégrable. \spadesuit

Démonstration (Théorème 16.15).

Etape 1. Si f est une fonction en escalier (bornée) sur $[a, b]$, ce qui veut dire qu'elle est constante sur des intervalles I_i , alors f est intégrable au sens de Riemann et de Lebesgue et

$$R \int_a^b f = \int_a^b f = \sum a_i \text{ mes}(I_i) \quad \text{où} \quad \text{mes}(I_i) = \text{long}(I_i).$$

Etape 2 : Rappel. (i) On rappelle que Σ = ensemble des partitions de $\bar{I} = [a, b]$ en un nombre fini d'intervalles, c'est à dire que $\sigma \in \Sigma$, si

$$\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}.$$

Pour $\sigma \in \Sigma$ et pour $k = 1, \dots, n$, on écrit

$$m_k = \inf \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

$$M_k = \sup \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

$$m = \inf \{f(x) : a \leq x \leq b\}$$

$$M = \sup \{f(x) : a \leq x \leq b\}.$$

Comme f est bornée on a toujours

$$-\infty < m \leq m_k \leq M_k \leq M < +\infty, \quad k = 1, \dots, n.$$

(ii) On dénote par

$$\underline{s}_\sigma = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1})$$

$$\overline{s}_\sigma = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1})$$

et ainsi

$$m(b-a) \leq \underline{s}_\sigma \leq \overline{s}_\sigma \leq M(b-a).$$

(iii) On pose

$$\underline{s} = \sup \{ \underline{s}_\sigma : \sigma \in \Sigma \}$$

$$\overline{s} = \inf \{ \overline{s}_\sigma : \sigma \in \Sigma \}$$

et ceci implique

$$\underline{s} \leq \overline{s}.$$

(iv) L'intégrale de Riemann est alors donnée par

$$\int_a^b f(x) dx = \underline{s} = \overline{s}.$$

Etape 3 : Vérification du théorème. Soit σ_n une suite de partitions telle que

$$0 < \overline{s}_{\sigma_n} - \underline{s}_{\sigma_n} < \frac{1}{n}. \quad (16.2)$$

Soit α_n la fonction en escalier telle que

$$\alpha_n(x) = M_k \quad \text{si } x_{k-1} < x \leq x_k$$

et β_n la fonction en escalier telle que

$$\beta_n(x) = m_k \quad \text{si } x_{k-1} < x \leq x_k$$

alors

$$\alpha_n \geq f \geq \beta_n.$$

Soient (les fonctions sont clairement mesurables)

$$\alpha = \inf_n \alpha_n \quad \text{et} \quad \beta = \sup_n \beta_n.$$

Noter que

$$\{x : \alpha(x) - \beta(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x : \alpha(x) - \beta(x) > 1/k\}.$$

Mais si $\alpha(x) - \beta(x) > 1/k$, alors, comme $\alpha_n - \beta_n > \alpha - \beta$, on déduit que

$$\alpha_n(x) - \beta_n(x) > 1/k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ceci implique que si

$$\lambda = \text{mes} \{x : \alpha(x) - \beta(x) > 1/k\},$$

alors,

$$\text{mes} \{x : \alpha_n(x) - \beta_n(x) > 1/k\} \geq \lambda$$

et, grâce à (16.2),

$$\frac{1}{n} \geq \int_a^b (\alpha_n - \beta_n) \geq \frac{\lambda}{k} \quad \forall n \text{ (} k \text{ fixé)} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.$$

On a ainsi que

$$\alpha(x) - \beta(x) \leq \frac{1}{k} \quad \forall k \text{ p.p.} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta \text{ p.p.}$$

Comme $\alpha \geq f \geq \beta$, α et β sont mesurables et $\alpha = \beta$ p.p., on déduit que

$$\alpha = \beta = f \text{ p.p.} \quad \Rightarrow \quad f \text{ est mesurable.}$$

On a donc que f est mesurable et bornée, et donc f est Lebesgue intégrable et de plus

$$R \int \beta_n = \int \beta_n \leq \int f \leq \int \alpha_n = R \int \alpha_n$$

en par conséquent en laissant $n \rightarrow \infty$ on a

$$R \int f = \int f.$$

Ceci termine la démonstration. ■

On conclut la section avec la démonstration du Théorème 16.16.

Démonstration (i) Montrons

$$f \text{ R-intégrable} \quad \Rightarrow \quad f \text{ continue p.p.}$$

On garde les mêmes notations que dans le théorème précédent. Soit σ_n telle que

$$0 \leq \overline{s}_{\sigma_n} - \underline{s}_{\sigma_n} < \frac{1}{n}.$$

On a vu que

$$\text{mes} \{x : \alpha(x) \neq \beta(x)\} = 0.$$

1) Soit x un point d'une partition σ_n . Mais l'ensemble des points de toutes les partitions σ_n est dénombrable (chacune des σ_n a un nombre fini de points qui la partitionne et on avait une suite, indexée par n , de telles partitions) et est donc un ensemble de mesure nulle.

2) Il reste donc à démontrer que f est continue en x pour autant que x ne soit pas un point de la partition σ_n . Comme f est R-intégrable, on a

$$\alpha(x) = f(x) = \beta(x).$$

On va montrer le résultat par l'absurde. Si f n'est pas continue en x , il existe alors $\epsilon > 0$ et $x_k \rightarrow x$ tels que

$$|f(x_k) - f(x)| > \epsilon$$

ce qui implique la contradiction souhaitée, à savoir

$$\alpha(x) > \beta(x) + \epsilon.$$

(ii) Montrons la réciproque, à savoir :

$$f \text{ continue p.p.} \Rightarrow f \text{ R-intégrable.}$$

Soit σ_n une suite de partitions de $[a, b]$ tel que σ_{n+1} contienne les points de σ_n et le plus grand intervalle de σ_n a une longueur qui tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, alors

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \quad \text{et} \quad \beta_{n+1} \geq \beta_n$$

et donc

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n.$$

Si f est continue en x , alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\sup_{]x-\delta, x+\delta[} f - \inf_{]x-\delta, x+\delta[} f < \epsilon.$$

Prenons n suffisamment grand pour que $]x - \delta, x + \delta[$ contienne un intervalle de σ_n , on déduit alors que

$$\alpha_n(x) - \beta_n(x) < \epsilon.$$

Mais ϵ est arbitraire ce qui implique que

$$\alpha(x) = \beta(x).$$

Donc $\alpha = \beta$ p.p. Par le théorème de la convergence dominée (se rappeler aussi que $\alpha \geq f \geq \beta$) on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \alpha_n = \int \alpha = \int \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \beta_n$$

ce qui implique que f est R-intégrable. ■

16.4 Approximation par des fonctions lisses

On "rappelle" la définition du support.

Définition 16.17 (Support d'une fonction) (i) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Le support de f est défini comme

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Noter que le support d'une fonction est toujours fermé. On dit que f est à support compact dans Ω si

$$\text{supp}(f) \subset \Omega \quad \text{et} \quad \text{supp}(f) \text{ est compact.}$$

(ii) On dit que $f \in C_0(a, b)$, si la fonction est continue sur $]a, b[$ et son support est compact dans $]a, b[$. Plus généralement on écrira $f \in C_0^k(a, b)$, $1 \leq k \leq \infty$ un entier, si la fonction est C^k sur $]a, b[$ et son support est compact dans $]a, b[$.

Exemple (i) Soit $f(x) = \sin x$, alors

$$\text{supp}(f) = \mathbb{R}.$$

(ii) Soit

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left\{\frac{1}{x^2 - 1}\right\} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et

$$\text{supp}(f) = \{x : |x| \leq 1\}. \quad \spadesuit$$

On commence par les deux lemmes suivants.

Lemme 16.18 Soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $f \in L^1(a, b)$ (c'est à dire $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur $]a, b[$). Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g \in C_0(a, b)$ telle que

$$\int_a^b |f - g| \leq \epsilon.$$

Démonstration On va montrer par étapes successives (Étapes 1 et 2) qu'on peut se réduire au cas où $f \equiv 1$ et que ceci est alors trivial (cf. Étape 3).

Étape 1. (i) En écrivant $f = f^+ - f^-$ on peut se restreindre au cas où $f \geq 0$. En effet on approche f^+ par g^+ et f^- par g^- de manière que

$$\int_a^b |f^+ - g^+| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{et} \quad \int_a^b |f^- - g^-| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On a en posant

$$g = g^+ - g^-$$

que

$$\int_a^b |f - g| \leq \int_a^b |f^+ - g^+| + \int_a^b |f^- - g^-| \leq \epsilon.$$

(ii) De même comme alors

$$\int_a^b f = \sup \left\{ \int_a^b \varphi : 0 \leq \varphi \leq f, \varphi \text{ mesurable simple} \right\},$$

il suffit de prouver le résultat pour une fonction simple. En effet pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver φ simple et mesurable telle que

$$\int_a^b \varphi \leq \int_a^b f \leq \frac{\epsilon}{2} + \int_a^b \varphi.$$

Par ailleurs si on a le lemme pour les fonctions simples, à savoir qu'il existe $g \in C_0(a, b)$ telle que

$$\int_a^b |\varphi - g| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f - g| &\leq \int_a^b |f - \varphi| + \int_a^b |\varphi - g| \\ &\leq \int_a^b f - \int_a^b \varphi + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Donc à partir de maintenant on va supposer que

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}(x)$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0$ tous différents.

(iii) Enfin en travaillant sur chacun des ensembles A_i séparément, on peut même supposer qu'il n'y en a qu'un seul et donc (sans perte de généralité on suppose même que $\alpha = 1$)

$$f(x) = \chi_A(x).$$

En effet on trouve $g_i \in C_0(a, b)$ tel que

$$\alpha_i \int_a^b |\chi_{A_i} - g_i| \leq \frac{\epsilon}{n}.$$

Puis on pose

$$g = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i$$

et on trouve

$$\int_a^b |f - g| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_a^b |\chi_{A_i} - g_i| \leq \epsilon.$$

Etape 2. Cette étape consiste à montrer qu'il suffit de prouver le lemme dans le cas où $A =]a, b[$.

(i) Montrons d'abord qu'on peut se restreindre au cas où A est une union finie d'intervalles. En effet comme A est mesurable on a, par le Théorème 15.13,

que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une union disjointe et finie d'intervalles I_i , $i = 1, \dots, n(\epsilon)$, tels que si $B = \bigcup_{i=1}^n I_i$ alors

$$\text{mes}(A \Delta B) \leq \epsilon/2.$$

Soit alors

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

qui est une *fonction en escalier*. On a clairement que

$$\int |\chi_A - \chi_B| = \int_{A \Delta B} dx = \text{mes}(A \Delta B) \leq \epsilon/2.$$

Si on réussit à approcher χ_B par une fonction $g \in C_0(a, b)$, telle que

$$\int |\chi_B - g| \leq \epsilon/2$$

on aura le résultat souhaité. Donc il suffit de considérer le cas où $A = B$ est une union d'intervalles.

(ii) En travaillant sur chacun des intervalles séparément (comme dans l'Etape 1 (iii)) on a réduit la discussion au cas où $A =]a, b[$ et $f \equiv 1$.

Etape 3. Comme $A =]a, b[$ et $f \equiv 1$, on peut construire g de la manière suivante

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]a, a + \epsilon/4] \\ \frac{x - (a + \epsilon/4)}{\epsilon/4} & \text{si } x \in]a + \epsilon/4, a + \epsilon/2] \\ 1 & \text{si } x \in]a + \epsilon/2, b - \epsilon/2] \\ \frac{(b - \epsilon/4) - x}{\epsilon/4} & \text{si } x \in]b - \epsilon/2, b - \epsilon/4] \\ 0 & \text{si } x \in]b - \epsilon/4, b[\end{cases}$$

Ainsi $g \in C_0(a, b)$ et de plus

$$|f(x) - g(x)| = (1 - g(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]a + \epsilon/2, b - \epsilon/2[\\ \leq 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc

$$\int_a^b |f - g| \leq \epsilon$$

comme souhaité. ■

Définition 16.19 (Suite régularisante) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$[\varphi \geq 0], \quad [\varphi(x) = 0 \text{ si } |x| > 1] \quad \text{et} \quad \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi = 1 \right].$$

On appelle suite régularisante la suite $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\varphi_\nu(x) = \nu \varphi(\nu x).$$

Une telle suite est, par exemple, donnée par

$$\varphi(x) = \begin{cases} c \exp \left\{ \frac{1}{x^2 - 1} \right\} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où c est choisie de manière à avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi = 1$.

Lemme 16.20 Soit $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ une suite régularisante. Soient $f \in C_0(a, b)$ et

$$f_\nu(x) = (\varphi_\nu * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\nu(x - y) f(y) dy.$$

Alors, pour ν suffisamment grand, $f_\nu \in C_0^\infty(a, b)$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\nu(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

et

$$f_\nu \rightarrow f \quad \text{uniformément.}$$

En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g \in C_0^\infty(a, b)$ telle que

$$\int_a^b |f - g| \leq \epsilon.$$

Démonstration Cf. Exercice 16.7. ■

A l'aide de ces deux lemmes on a le résultat principal.

Théorème 16.21 Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f \in L^1(a, b)$ (c'est à dire $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur $]a, b[$). Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g \in C_0^\infty(a, b)$ telle que

$$\int_a^b |f - g| \leq \epsilon.$$

Démonstration Cas 1 : $-\infty < a < b < +\infty$. La combinaison des deux lemmes donne immédiatement le résultat.

Cas 2 : $]a, b[= \mathbb{R}$ (idem pour $]a, +\infty[$ et $]-\infty, b[$). Pour ν un entier on pose

$$\chi_\nu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-\nu, \nu[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on définit

$$f_\nu(x) = \chi_\nu(x) f(x).$$

On a clairement que

$$|f_\nu| \leq |f| \quad \text{et} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = f(x).$$

On déduit donc, par le théorème de la convergence dominée que, pour ν suffisamment grand,

$$\int |f_\nu - f| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Par le Cas 1 on peut trouver, comme $f_\nu \in L^1(-\nu, \nu)$,

$$g \in C_0^\infty(-\nu, \nu) \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$$

telle que

$$\int |f_\nu - g| = \int_{-\nu}^{\nu} |f_\nu - g| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

En combinant les deux inégalités, on a le résultat. ■

16.5 Les espaces L^p

Définition 16.22 Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $p > 0$ (on considérera essentiellement seulement le cas $p \geq 1$). On dénote, pour $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ mesurable,

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

et on note (avec la convention que si $f = g$ p.p. alors $f = g$)

$$L^p(a, b) = \{f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable telle que } \|f\|_{L^p} < +\infty\}.$$

Remarque (i) Par la suite on ne distinguera pas deux éléments qui sont égaux presque partout. En effet si $f = g$ p.p. alors

$$\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}.$$

Et par conséquent si on veut que $\|\cdot\|_{L^p}$ soit une norme, il faut adopter cette convention.

(ii) Noter que dire qu'une fonction est dans L^1 c'est équivalent à dire qu'elle est intégrable. ♠

Définition 16.23 Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, alors on dénote par

$$\|f\|_{L^\infty} = \supess\{|f|\} = \inf\{\alpha \geq 0 : |f(x)| \leq \alpha \text{ p.p.}\}$$

et on note, avec les mêmes conventions que précédemment,

$$L^\infty(a, b) = \{f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable telle que } \|f\|_{L^\infty} < \infty\}.$$

Proposition 16.24 (i) $L^p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$, est un espace vectoriel sur les réels.

(ii) Si $-\infty < a < b < +\infty$ et si $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$, alors

$$L^\infty(a, b) \subset L^q(a, b) \subset L^2(a, b) \subset L^p(a, b) \subset L^1(a, b).$$

(iii) Si $-\infty < a < b < +\infty$ et si $f \in L^\infty(a, b)$, alors

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}.$$

Démonstration Cf. Exercice 16.11. ■

Théorème 16.25 (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1(0, 2\pi)$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = 0.$$

Démonstration Par le Théorème 16.21 on a pour tout $\epsilon > 0$ qu'il existe $g_\epsilon \in C_0^\infty(0, 2\pi)$ telle que

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - g_\epsilon(x)| dx \leq \epsilon$$

et donc

$$\int_0^{2\pi} |f(x) \cos(nx) - g_\epsilon(x) \cos(nx)| dx \leq \epsilon.$$

Par ailleurs, en intégrant par parties, on a

$$\int_0^{2\pi} g_\epsilon(x) \cos(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n} g_\epsilon(x) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} g'_\epsilon(x) \sin(nx) dx.$$

En laissant $n \rightarrow \infty$ (mais ϵ fixé) on trouve que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} g_\epsilon(x) \cos(nx) dx = 0.$$

Par conséquent comme

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \right| &\leq \left| \int_0^{2\pi} g_\epsilon(x) \cos(nx) dx \right| \\ &\quad + \int_0^{2\pi} |f(x) \cos(nx) - g_\epsilon(x) \cos(nx)| dx \end{aligned}$$

on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \right| \leq \epsilon$$

Comme ϵ est arbitraire on a le résultat pour le cosinus (idem pour le sinus). ■

Définition 16.26 Soit $1 \leq p \leq \infty$. On appelle **exposant conjugué** de p le réel $1 \leq p' \leq \infty$ défini par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p' = \frac{p}{p-1}$$

avec la convention que si $p = 1$ ou ∞ , alors $p' = \infty$ ou 1 (noter que si $p = 2$, alors $p' = 2$).

Théorème 16.27 (Inégalité de Hölder) Si $f \in L^p(a, b)$ et $g \in L^{p'}(a, b)$, alors $fg \in L^1(a, b)$ et

$$\int_a^b fg \leq \int_a^b |fg| \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^{p'} \right)^{1/p'},$$

ou en d'autres termes

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Démonstration *Etape 1.* Commençons par une inégalité sur les réels. Si $X > 0$, $Y > 0$ et $1 < p < \infty$ (cf. Exercice 16.10)

$$X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{X}{p} + \frac{Y}{p'}.$$

Etape 2. Si $\|f\|_{L^p} = 0$ ou $\|g\|_{L^{p'}} = 0$, l'inégalité est triviale car alors $f = 0$ ou $g = 0$ p.p. et donc $fg = 0$ p.p. et ainsi $\|fg\|_{L^1} = 0$.

(i) Supposons donc que $\|f\|_{L^p} > 0$ et $\|g\|_{L^{p'}} > 0$ et commençons par supposer que $1 < p < \infty$. Posons

$$X = \left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^p}} \right)^p \quad \text{et} \quad Y = \left(\frac{|g|}{\|g\|_{L^{p'}}} \right)^{p'}.$$

On déduit (cf. Etape 1) que

$$\frac{|fg|}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|f|}{\|f\|_{L^p}} \right)^p + \frac{1}{p'} \left(\frac{|g|}{\|g\|_{L^{p'}}} \right)^{p'}$$

et donc

$$\frac{\int_a^b |fg|}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}} \leq \frac{1}{p} \frac{\int_a^b |f|^p}{\|f\|_{L^p}^p} + \frac{1}{p'} \frac{\int_a^b |g|^{p'}}{\|g\|_{L^{p'}}^{p'}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

et ainsi

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

(ii) Discutons maintenant le cas $p = 1$ ou ∞ (sans perte de généralité supposons $p = 1$ et donc $p' = \infty$). On a tout de suite le résultat car

$$|fg| = |f| |g| \leq |f| \|g\|_{L^\infty} \quad \text{p.p.}$$

et donc

$$\int_a^b |f g| = \|f g\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^\infty} \int_a^b |f| = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty} .$$

Ceci termine la démonstration. ■

Théorème 16.28 (Inégalité de Minkowski) Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f, g \in L^p(a, b)$, alors

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} .$$

Démonstration Les cas $p = 1$ et ∞ sont triviaux et nous discutons donc seulement le cas $1 < p < \infty$. Comme L^p est un espace vectoriel (cf. Proposition 16.24 démontrée dans l'Exercice 16.11), on a que $f + g \in L^p$. On suppose que $\|f + g\|_{L^p} \neq 0$, sinon l'inégalité est triviale. Si f et $g \in L^p$, alors

$$|f + g|^{p-1} \in L^{p'}$$

car (se rappeler que $p' = p/(p-1)$)

$$\begin{aligned} \left\| |f + g|^{p-1} \right\|_{L^{p'}} &= \left(\int_a^b |f + g|^{(p-1)p'} \right)^{1/p'} = \left(\int_a^b |f + g|^p \right)^{1/p'} \\ &= \left(\int_a^b |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p} \frac{p}{p'}} = \|f + g\|_{L^p}^{p-1} . \end{aligned}$$

On déduit, par l'inégalité de Hölder, que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p}^p &= \int_a^b |f + g|^p \leq \int_a^b |f| \cdot |f + g|^{p-1} + \int_a^b |g| \cdot |f + g|^{p-1} \\ &\leq \|f\|_{L^p} \left\| (f + g)^{p-1} \right\|_{L^{p'}} + \|g\|_{L^p} \left\| (f + g)^{p-1} \right\|_{L^{p'}} . \end{aligned}$$

Mais, par les calculs ci-dessus, on trouve

$$\|f + g\|_{L^p}^p \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \|f + g\|_{L^p}^{p-1}$$

et finalement

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

ce qui est le résultat souhaité. ■

On a aussi un résultat d'approximation par des fonctions lisses (cf. Théorème 16.21 pour le cas $p = 1$).

Théorème 16.29 Soient $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(a, b)$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g \in C_0^\infty(a, b)$ telle que

$$\|f - g\|_{L^p} \leq \epsilon .$$

Remarque Par ailleurs il faut insister sur le fait que ce résultat est faux pour $p = \infty$, car alors f serait aussi continue. ♠

Démonstration La démonstration du Théorème 16.21 peut être facilement adaptée au présent contexte. On va toutefois procéder un peu différemment.

Etape 1. On rappelle que pour $x, y \geq 0$ on a

$$(x + y)^p \leq 2^{p-1} (x^p + y^p).$$

Etape 2. On peut, sans perte de généralité, supposer que l'intervalle $[a, b]$ est borné. Pour cela on procède comme dans la démonstration du Théorème 16.21.

Etape 3. Montrons qu'on peut, sans perte de généralité, supposer que la fonction f est positive et bornée.

(i) Commençons par montrer que $f \geq 0$. On applique le théorème à f^+ et à f^- et on trouve $g^+, g^- \in C_0^\infty(a, b)$ de manière que

$$\int_a^b |f^+ - g^+|^p \leq \frac{\epsilon^p}{2^p} \quad \text{et} \quad \int_a^b |f^- - g^-|^p \leq \frac{\epsilon^p}{2^p}.$$

On pose ensuite $g = g^+ - g^- \in C_0^\infty(a, b)$ et on obtient

$$\int_a^b |f - g|^p \leq 2^{p-1} \int_a^b |f^+ - g^+|^p + 2^{p-1} \int_a^b |f^- - g^-|^p \leq \epsilon^p$$

et donc le résultat.

(ii) Montrons maintenant qu'on peut supposer, en outre, que f est bornée. Pour cela on pose

$$f_\nu(x) = \min[f(x), \nu].$$

On a clairement que

$$0 \leq (f_\nu)^p \leq f^p \quad \text{et} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = f(x).$$

On déduit donc, par le théorème de la convergence dominée que, pour ν suffisamment grand,

$$\int_a^b |f_\nu - f|^p \leq \frac{\epsilon^p}{2^p}.$$

En appliquant le théorème à f_ν on trouve $g \in C_0^\infty(a, b)$ tel que

$$\int_a^b |f_\nu - g|^p \leq \frac{\epsilon^p}{2^p}.$$

En combinant les deux inégalités on a le résultat.

Etape 4. On suppose donc dès maintenant que $f \geq 0$ et est bornée. On applique alors Théorème 16.21 à f est on trouve, pour tout $\delta > 0$, $g \in C_0^\infty(a, b)$ tel que

$$\|f - g\|_{L^1} = \int_a^b |f - g| \leq \delta.$$

Montrons que, sans perte de généralité, on peut supposer que

$$0 \leq g \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

(i) Commençons par montrer que g peut être prise positive. Pour cela on pose

$$g_1(x) = \max[g(x), 0].$$

Comme $f \geq 0$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_a^b |f - g_1| &= \int_{g \geq 0} |f - g_1| + \int_{g < 0} f \leq \int_{g \geq 0} |f - g| + \int_{g < 0} (f - g) \\ &\leq \int_{g \geq 0} |f - g| + \int_{g < 0} |f - g| = \int_a^b |f - g| \leq \delta. \end{aligned}$$

(ii) On peut donc supposer que $g \geq 0$. Montrons que l'on peut prendre $g \leq \|f\|_{L^\infty}$. Posons

$$g_2(x) = \min[g(x), \|f\|_{L^\infty}].$$

On déduit que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f - g_2| &= \int_{g > \|f\|_{L^\infty}} |f - g_2| + \int_{g \leq \|f\|_{L^\infty}} |f - g_2| \\ &= \int_{g > \|f\|_{L^\infty}} (\|f\|_{L^\infty} - f) + \int_{g \leq \|f\|_{L^\infty}} |f - g| \\ &\leq \int_{g > \|f\|_{L^\infty}} (g - f) + \int_{g \leq \|f\|_{L^\infty}} |f - g| \\ &\leq \int_{g > \|f\|_{L^\infty}} |f - g| + \int_{g \leq \|f\|_{L^\infty}} |f - g| = \int_a^b |f - g| \leq \delta. \end{aligned}$$

Etape 5. Montrons maintenant le théorème pour $f \geq 0$ et bornée et pour g comme dans l'étape 4. On trouve alors que

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{L^p} &= \left(\int |f - g|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int |f - g| \|f - g\|_{L^\infty}^{p-1} \right)^{1/p} \\ &\leq \|f - g\|_{L^1}^{1/p} \|f - g\|_{L^\infty}^{1-1/p} \leq \|f - g\|_{L^1}^{1/p} (2\|f\|_{L^\infty})^{1-1/p} \\ &\leq \delta^{1/p} (2\|f\|_{L^\infty})^{1-1/p}. \end{aligned}$$

On choisit alors δ suffisamment petit pour que

$$\delta^{1/p} (2\|f\|_{L^\infty})^{1-1/p} \leq \epsilon.$$

Ceci termine la démonstration. ■

Définition 16.30 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **convexe** si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$.

Théorème 16.31 (Inégalité de Jensen) Soient $-\infty < a < b < +\infty$, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $f \in L^1(a, b)$, alors

$$\varphi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(x)) dx.$$

Exemple Choisir $\varphi(x) = |x|^p$ avec $1 \leq p < \infty$. L'inégalité donne alors

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f \right|^p \leq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b |f| \right|^p \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |f|^p.$$

En particulier

$$\left| \int_a^b f \right|^2 \leq \left| \int_a^b |f| \right|^2 \leq (b-a) \int_a^b |f|^2$$

c'est à dire

$$\|f\|_{L^1}^2 \leq (b-a) \|f\|_{L^2}^2. \quad \spadesuit$$

Démonstration On va faire la démonstration seulement dans le cas où φ est C^1 . On sait que φ est convexe si et seulement si

$$\varphi(t) \geq \varphi(s) + \varphi'(s)(t-s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

Si on pose

$$s = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \neq \infty \quad \text{et} \quad t = f(x)$$

on a

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(s) + \varphi'(s)(f(x) - s).$$

Par ailleurs on a vu (cf. Section 15.4 et Exercice 15.12) que si φ est continue et f est mesurable alors $\varphi \circ f$ est mesurable (ici on a que φ est continue car on a supposé que $\varphi \in C^1$, mais on aurait la continuité sans cela car une fonction convexe est nécessairement continue). En intégrant on obtient que

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(f(x)) dx &\geq (b-a) \varphi(s) + \varphi'(s) \left[\int_a^b f(x) dx - s(b-a) \right] \\ &= (b-a) \varphi(s) + \varphi'(s) [s(b-a) - s(b-a)] \\ &= (b-a) \varphi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right). \end{aligned}$$

Le théorème est ainsi démontré. ■

Définition 16.32 On dit qu'un espace vectoriel normé X est **complet**, si toute suite de Cauchy converge, c'est à dire que si

$$\lim_{\nu, \mu \rightarrow \infty} \|f_\nu - f_\mu\|_X \rightarrow 0,$$

alors il existe $f \in X$ telle que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|f_\nu - f\|_X = 0.$$

Théorème 16.33 Si $1 \leq p \leq \infty$, alors $L^p(a, b)$ est complet. De plus si

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|f_\nu - f\|_{L^p} = 0$$

alors il existe une sous-suite f_{ν_i} telle que

$$\lim_{\nu_i \rightarrow \infty} f_{\nu_i} = f \quad p.p.$$

Remarque (i) Pour que $\|\cdot\|_{L^p}$ soit une norme, il faut vérifier que, pour tout $t \geq 0$,

$$\|t f\|_{L^p} = t \|f\|_{L^p}, \quad \|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

(la première propriété est triviale et la deuxième c'est l'inégalité de Minkowski) et

$$\|f\|_{L^p} = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

et c'est pour ceci qu'on a besoin de la convention que si $f = g$ p.p. alors $f = g$.

(ii) On a donc que si $1 \leq p \leq \infty$, alors $L^p(a, b)$ est un espace de *Banach*.

(iii) Si on considère l'espace $L^2(a, b)$, alors c'est un espace de *Hilbert* si on le munit du produit scalaire

$$\langle f; g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

(iv) Si $1 \leq p < \infty$, alors $L^p(a, b)$ est séparable (notion vue au cours de topologie), mais $L^\infty(a, b)$ n'est pas séparable. ♠

Démonstration Cas 1 : $1 \leq p < \infty$.

Etape 1. Soit $\{f_\nu\}$ une suite de Cauchy, alors il existe $N(i)$ tel que

$$\|f_\nu - f_\mu\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^i}, \quad \nu, \mu \geq N(i).$$

Soient $\nu_1 \geq N(1)$, $\nu_2 \geq N(2)$, \dots on peut donc choisir par induction une suite croissante de ν_i telle que

$$\|f_{\nu_{i+1}} - f_{\nu_i}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^i}.$$

Etape 2. Définissons

$$g_k(x) = \sum_{i=1}^k |f_{\nu_{i+1}}(x) - f_{\nu_i}(x)| \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{\nu_{i+1}}(x) - f_{\nu_i}(x)|.$$

On a clairement les deux affirmations suivantes.

(i) L'inégalité de Minkowski donne tout de suite que

$$\|g_k\|_{L^p} \leq \sum_{i=1}^k \|f_{\nu_{i+1}} - f_{\nu_i}\|_{L^p} \leq \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} \leq 1.$$

(ii) La suite $(g_k)^p \geq 0$ est une suite de fonctions mesurables et telle que $(g_k(x))^p \nearrow (g(x))^p$ (il se peut, évidemment que $g(x) = \infty$) et donc par le théorème de la convergence monotone

$$\|g\|_{L^p}^p = \int_a^b (g)^p = \int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} (g_k)^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b g_k^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_{L^p}^p \leq 1.$$

Et donc g est finie p.p..

Etape 3. On a donc que

$$f_{\nu_k}(x) = f_{\nu_1}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{\nu_{i+1}}(x) - f_{\nu_i}(x))$$

converge absolument et p.p. vers

$$f(x) = f_{\nu_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{\nu_{i+1}}(x) - f_{\nu_i}(x))$$

pour tous les x où le membre de droite a un sens et ailleurs arbitrairement (qui est un ensemble de mesure nulle). En effet, pour presque tous les x , on a

$$|f(x) - f_{\nu_k}(x)| \leq \sum_{i=k}^{\infty} |f_{\nu_{i+1}}(x) - f_{\nu_i}(x)| = g(x) - g_{k-1}(x) \rightarrow 0, \quad \text{si } k \rightarrow \infty.$$

De plus on a, par construction,

$$f = \lim_{i \rightarrow \infty} f_{\nu_i} \quad \text{p.p.}$$

Etape 4. Il reste donc à montrer que :

1) $f \in L^p$ (noter que la fonction f n'est définie qu'à un ensemble de mesure nulle près, mais cela est compatible avec la définition des espaces L^p);

2) toute la suite $f_{\nu} \rightarrow f$ dans L^p .

On va montrer les deux affirmations en même temps. Donnée $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon)$ tel que

$$\|f_{\nu} - f_{\mu}\|_{L^p} \leq \epsilon, \quad \nu, \mu \geq N(\epsilon).$$

Par le lemme de Fatou on a

$$\|f - f_{\mu}\|_{L^p}^p = \int_a^b |f - f_{\mu}|^p \leq \liminf_{\nu_i \rightarrow \infty} \int_a^b |f_{\nu_i} - f_{\mu}|^p \leq \epsilon^p$$

ce qui implique que $f - f_\mu \in L^p$ et comme $f_\mu \in L^p$ on a que

$$f = f - f_\mu + f_\mu \in L^p$$

et de plus $\|f - f_\mu\|_{L^p} \leq \epsilon \quad \forall \mu > N(\epsilon)$, ce qui est le résultat souhaité.

Cas 2 : $p = \infty$.

Etape 1. On utilise le fait que

$$\text{mes}\{x : |f(x)| > \|f\|_{L^\infty}\} = 0.$$

Soient

$$A_{\nu,\mu} = \{x : |f_\nu(x) - f_\mu(x)| > \|f_\nu - f_\mu\|_{L^\infty}\}, \quad \nu \neq \mu$$

$$B_\nu = \{x : |f_\nu(x)| > \|f_\nu\|_{L^\infty}\}.$$

Donc si

$$E = \left[\bigcup_{\nu \neq \mu} A_{\nu,\mu} \right] \cup \left[\bigcup_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \right],$$

alors

$$\text{mes}(E) = 0.$$

Comme $\{f_\nu(x)\}$ est une suite de Cauchy (au sens de \mathbb{R}) $\forall x \in E^c$ on a que la suite converge vers un élément $f(x)$, c'est à dire

$$f_\nu(x) \rightarrow f(x), \quad \forall x \in E^c.$$

En définissant arbitrairement la fonction f sur E , on a bien défini une fonction mesurable f .

Etape 2. Il faut encore montrer que :

1) $f \in L^\infty$ (noter que la fonction f n'est définie qu'à un ensemble de mesure nulle près, mais cela est compatible avec la définition des espaces L^∞);

2) et $f_\nu \rightarrow f$ dans L^∞ (et donc ici $f_\nu \rightarrow f$ p.p., sans avoir à passer à une sous suite).

Montrons les deux assertions simultanément. Donnée $\epsilon > 0$, on peut trouver $N(\epsilon)$ tel que

$$\|f_\nu - f_\mu\|_{L^\infty} \leq \epsilon, \quad \forall \nu, \mu > N(\epsilon).$$

Par conséquent si $x \in E^c$ et si $\nu, \mu > N(\epsilon)$

$$|f_\nu(x) - f_\mu(x)| \leq \|f_\nu - f_\mu\|_{L^\infty} \leq \epsilon$$

(noter que $N(\epsilon)$ est indépendant de x). On a donc, pour tout $x \in E^c$,

$$|f(x) - f_\mu(x)| = \lim_{\nu \rightarrow \infty} |f_\nu(x) - f_\mu(x)| \leq \epsilon, \quad \forall \mu > N(\epsilon)$$

et donc

$$|f| \leq |f - f_\mu| + |f_\mu| \leq |f_\mu| + \epsilon \quad \text{p.p.}$$

On a donc $f \in L^\infty$ et de plus, comme $|f - f_\mu| \leq \epsilon$ p.p., on a

$$\|f - f_\mu\|_{L^\infty} \leq \epsilon$$

comme souhaité. ■

16.6 Intégrales multiples

Les notions définies dans les sections précédentes (mesurabilité, intégrabilité, espaces L^p ...) se généralisent facilement à \mathbb{R}^n , les cubes remplaçant les intervalles mais nous ne rentrerons pas dans les détails. Nous énoncerons, sans démonstration (cf. [25], pages 76 et 80), deux résultats importants qui permettent de permuter les intégrales.

Théorème 16.34 (Théorème de Tonelli) *Si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$, est mesurable, alors, pour presque tous les $y \in \mathbb{R}^m$,*

$$x \rightarrow |f(x, y)| \quad \text{est mesurable sur } \mathbb{R}^n$$

$$y \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dx \quad \text{est mesurable sur } \mathbb{R}^m$$

(et idem en intervertissant les rôles de x et de y). Si de plus

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dx \right) dy < \infty$$

alors $f \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} |f(x, y)| dx dy < \infty.$$

Théorème 16.35 (Théorème de Fubini) *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, alors, pour presque tous les $y \in \mathbb{R}^m$,*

$$x \rightarrow f(x, y) \quad \text{est intégrable sur } \mathbb{R}^n$$

$$y \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx \quad \text{est intégrable sur } \mathbb{R}^m$$

(et idem en intervertissant les rôles de x et de y). De plus

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^m} dy \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy.$$

16.7 Exercices

Exercice 16.1 (i) Soient φ, ψ deux fonctions simples et mesurables. Montrer que

$$\psi \leq \varphi \quad \Rightarrow \quad \int \psi \leq \int \varphi,$$

où l'intégrale est ici celle définie pour les fonctions simples.

(ii) Montrer que pour les fonctions simples, les deux définitions d'intégrales données au cours coïncident (celle pour les fonctions simples et celle pour les fonctions non négatives).

Exercice 16.2 Soit φ une fonction simple et mesurable. Montrer les assertions suivantes.

(i) Pour tout E mesurable

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \text{mes}(A_i \cap E).$$

(ii) Pour tout $a > 0$

$$\int a \varphi = a \int \varphi.$$

(iii) Soient E_i des ensembles mesurables deux à deux disjoints et

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Alors

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} \varphi.$$

Exercice 16.3 (i) Si $0 \leq f \leq g$ sont mesurables sur un ensemble mesurable E , alors

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

En particulier si $E = \mathbb{R}$, alors

$$\int f \leq \int g.$$

(ii) Si $a \geq 0$ et $f \geq 0$ est mesurable, alors

$$a \int f = \int a f.$$

(iii) Si $E \subset F$ sont mesurables et $f \geq 0$ est mesurable, alors

$$\int_E f \leq \int_F f.$$

(iv) Si $\text{mes}(E) = 0$ et $f \geq 0$ est mesurable, alors

$$\int_E f = 0.$$

Exercice 16.4 (i) Montrer que si $f, g \geq 0$ sont mesurables, alors

$$\int (f + g) = \int f + \int g.$$

(ii) Montrer que si $f_\nu \geq 0$ sont mesurables, alors

$$\int \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int f_\nu.$$

Exercice 16.5 Donner un exemple où l'inégalité est stricte dans le Lemme de Fatou (cf. aussi Exercice 16.6).

Exercice 16.6 Soit u_ν une suite de fonctions mesurables telles que $|u_\nu| \leq f$ où $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(i) Montrer que

$$\int \liminf_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int u_\nu \leq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \int u_\nu \leq \int \limsup_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu.$$

(ii) On dénote la fonction caractéristique d'un ensemble A par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer les quatre intégrales de la question précédente pour la suite u_ν définie par

$$u_\nu(x) = \begin{cases} \chi_{[0,1]}(x) & \nu \text{ pair} \\ \chi_{]1,3]}(x) & \nu \text{ impair.} \end{cases}$$

Exercice 16.7 Soient $f \in C_0(a, b)$, $\{\varphi_\nu\}$ une suite régularisante (cf. Définition 16.19) et

$$f_\nu(x) = (\varphi_\nu * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\nu(x-y) f(y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(i) Montrer que $f_\nu \in C^\infty(a, b)$ pour tout $\nu \geq 1$ et que $f_\nu \in C_0^\infty(a, b)$ pour tout ν assez grand.

Indication : utiliser le fait que $\text{supp}(f) \subset]a, b[$ est équivalent à dire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in]-\infty, a + \epsilon[\cup]b - \epsilon, \infty[.$$

(ii) Pour tout $\nu \geq 1$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\nu| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f|.$$

(iii) Montrer que $f_\nu \rightarrow f$ uniformément. En déduire un résultat de densité entre espaces de fonctions.

Exercice 16.8 Soit $f \in L^1(a, b)$, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ensemble mesurable $E \subset]a, b[$

$$\text{mes } E \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \int_E |f(x)| dx \leq \epsilon.$$

Indication : Considérer la suite $f_\nu(x) = \min\{|f(x)|, \nu\}$.

Exercice 16.9 Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) f est convexe.
- (ii) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y).$$

- (iii) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(f'(y) - f'(x))(y - x) \geq 0.$$

Si, de plus, $f \in C^2(\mathbb{R})$, alors (i)-(iii) sont équivalents à

- (iv) $f'' \geq 0$.

Indication. $\int_x^y f'(t) dt = f(y) - f(x)$.

Exercice 16.10 (Inégalité de Young) (i) Montrer que la fonction

$$\log : \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

est concave.

- (ii) Montrer que si $a > 0$, $b > 0$ et $1 < p < \infty$, alors

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{p'}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Exercice 16.11 (i) Montrer que $L^p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$ est un espace vectoriel sur les réels.

(ii) Si $-\infty < a < b < +\infty$ et si $1 \leq p < q \leq \infty$ alors $L^q(a, b) \subset L^p(a, b)$. Plus précisément, trouver une constante $K = K(a, b, p, q)$ telle que

$$\|f\|_{L^p} \leq K \|f\|_{L^q}.$$

- (iii) Si $-\infty < a < b < +\infty$ et si $f \in L^\infty(a, b)$, alors $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

Indication. Montrer les inégalités

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}$$

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} \geq \|f\|_{L^\infty} - \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$

en utilisant le point (ii) et en considérant l'ensemble

$$A_\epsilon = \{x \in (a, b) : |f(x)| \geq \|f\|_{L^\infty} - \epsilon\}.$$

Exercice 16.12 Soient $1 \leq p, q < +\infty$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, $f \in L^p(a, b)$, $g \in L^q(a, b)$ et

$$r = \frac{pq}{p+q} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

(i) Montrer que si $r \geq 1$, alors $fg \in L^r(a, b)$ et

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

(ii) Montrer que si $r < 1$ (par exemple $p = 2$ et $q = 1$), alors, en général, $fg \notin L^1(a, b)$.

Exercice 16.13 Soient $E \subset \mathbb{R}$ mesurable, $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On pose

$$F = aE + b.$$

(i) Montrer que F est mesurable et

$$\text{mes}(F) = |a| \text{mes}(E).$$

Indication. Commencer par montrer que $\text{mes}^*(aE) = |a| \text{mes}^*(E)$ pour tout $E \subset \mathbb{R}$.

(ii) Soient $f \in L^1(F)$ et

$$g(x) = f(ax + b), \quad x \in E.$$

Montrez que $g \in L^1(E)$ et que

$$|a| \int_E g = \int_F f.$$

Exercice 16.14 Pour tout $\nu > 0$, on définit

$$h(\nu) = \max \{k \in \mathbb{N} : 2^k \leq \nu\}$$

$$I_\nu = \left\{ \frac{\nu - 2^{h(\nu)}}{2^{h(\nu)}} \right\} + [0, 1/2^{h(\nu)}] = \left[\frac{\nu - 2^{h(\nu)}}{2^{h(\nu)}}, \frac{\nu + 1 - 2^{h(\nu)}}{2^{h(\nu)}} \right]$$

et $f_\nu = \chi_{I_\nu}$. Explicitement

$$\begin{aligned} f_1 &= \chi_{[0,1]}, & f_2 &= \chi_{[0,1/2]}, & f_3 &= \chi_{[1/2,1]}, & f_4 &= \chi_{[0,1/4]}, \\ f_5 &= \chi_{[1/4,2/4]}, & f_6 &= \chi_{[2/4,3/4]}, & f_7 &= \chi_{[3/4,1]}, & f_8 &= \chi_{[0,1/8]}, \dots \end{aligned}$$

- (i) Montrer que f_ν converge dans $L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$.
- (ii) Montrer que f_ν ne converge (ponctuellement) nulle part sur $[0, 1]$.
- (iii) Trouver une sous-suite de f_ν qui converge presque partout sur $[0, 1]$.

Exercice 16.15 Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Montrer que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\epsilon) - f(x)|^p dx = 0$$

Indication : Montrer cela d'abord pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ puis par approximation en utilisant le Théorème 16.29.

Exercice 16.16 (i) Soit A un ensemble mesurable avec $\text{mes}(A) < \infty$. Montrer que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{mes}((A + \epsilon) \setminus A) = 0.$$

Indication. Utiliser l'Exercice 16.15.

(ii) Le résultat du point précédent est-il encore vrai pour A un ensemble quelconque ? Plus précisément pour $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble tel que $\text{mes}^*(A) < \infty$ a-t-on encore nécessairement

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{mes}^*((A + \epsilon) \setminus A) = 0 ?$$

Exercice 16.17 Soient

$$X = \{u \in C^1([-1, 1]) : u(-1) = -1 \text{ et } u(1) = 1\}$$

$$I(u) = \int_{-1}^1 |u'(x)|^4 dx.$$

Montrer, à l'aide de l'inégalité de Jensen, que $\bar{u}(x) = x$ satisfait à l'inégalité

$$I(\bar{u}) \leq I(u), \quad \forall u \in X.$$

Exercice 16.18 Soient $1 < p < +\infty$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $u, u_\nu \in L^p(a, b)$.

(i) On rappelle que

$$u_\nu \rightarrow u \quad \text{dans } L^p$$

veut dire que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|u_\nu - u\|_{L^p} = 0.$$

Montrer que si $u_\nu \rightarrow u$ dans L^p , alors

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|u_\nu\|_{L^p} = \|u\|_{L^p}.$$

(ii) On dit que u_ν converge faiblement vers u dans L^p et on note

$$u_\nu \xrightarrow{f} u \quad \text{dans } L^p$$

si (on rappelle que $p' = p/(p-1)$ est l'exposant conjugué de p)

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b (u_\nu - u)v = 0 \quad \text{pour tout } v \in L^{p'}(a, b).$$

Montrer, à l'aide de l'inégalité de Hölder, que

$$u_\nu \rightarrow u \text{ dans } L^p \quad \Rightarrow \quad u_\nu \xrightarrow{f} u \text{ dans } L^p.$$

(iii) Montrer que si $u \in L^p(a, b)$, alors $|u|^{p-2}u \in L^{p'}(a, b)$. En déduire que si $u_\nu \xrightarrow{f} u$ dans L^p , alors

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b (u_\nu - u) |u|^{p-2} u = 0.$$

(iv) On rappelle que, comme la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = |x|^p$ est convexe, on a, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, que

$$h(y) = |y|^p \geq h(x) + h'(x)(y - x) = |x|^p + p|x|^{p-2}x(y - x).$$

Déduire, de l'observation précédente et de la question (iii), que si $u_\nu \xrightarrow{f} u$ dans L^p , alors

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \|u_\nu\|_{L^p} \geq \|u\|_{L^p}.$$

(v) Soient $a = 0$, $b = 2\pi$ et $u_\nu(x) = \sin(\nu x)$. Montrer, à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue, que $u_\nu \xrightarrow{f} 0$ dans L^p .

Exercice 16.19 Soient $u \in L^1(0, 1)$ et $f \in C^1(\mathbb{R})$ satisfaisant

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_0^1 f(tu(x)) dx.$$

Montrer, à l'aide du théorème de la convergence dominée, que F est dérivable en $t = 0$ et calculer sa dérivée en ce point.

Exercice 16.20 Soient $1 < p < \infty$ et $u, v \in L^p(0, 1)$.

(i) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Hölder, que

$$|u|^{p-1}v \in L^1(0, 1).$$

(ii) Soient $t \in \mathbb{R}$ et

$$F(t) = \int_0^1 |u(x) + tv(x)|^p dx.$$

Montrer, à l'aide de la question précédente et du théorème de la convergence dominée, que F est dérivable en 0 et que

$$F'(0) = p \int_0^1 |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx.$$

Suggestion. On pourra utiliser le fait qu'il existe $\gamma > 0$ tel que

$$||x + ty|^p - |x|^p| \leq \gamma \left(|x|^{p-1} + |y|^{p-1} \right) |t| |y| \quad (16.3)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in [-1, 1]$.

Exercice 16.21 Soient $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $\gamma_1 > 0$ tels que

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leq \gamma_1 \left(|\xi|^2 + |\eta|^2 \right) |\xi - \eta|, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$

(i) Montrer qu'il existe une constante $\gamma_2 > 0$ telle que

$$|f(\xi)| \leq \gamma_2 \left(1 + |\xi|^3 \right), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

En déduire que si $u \in L^3(a, b)$, alors $f(u) \in L^1(a, b)$.

(ii) Soient $u, v \in L^3(a, b)$. Montrer que $u^2 v \in L^1(a, b)$.

(iii) Soient $u, v \in L^3(a, b)$ et, pour $|\epsilon| \leq 1$, on pose

$$\Phi(\epsilon) = \int_a^b f(u(x) + \epsilon v(x)) dx.$$

Montrer, à l'aide des questions précédentes et du théorème de la convergence dominée, que Φ est dérivable en 0 et calculer $\Phi'(0)$.

Exercice 16.22 Soit $u \in L^2(0, 1)$ satisfaisant

$$\int_0^1 u(x) \psi(x) dx = 0, \quad \forall \psi \in C_0^\infty(0, 1).$$

Montrer que $u = 0$ pour presque tous les $x \in]0, 1[$.

Suggestions. Montrer que pour toute fonction $\psi \in C_0^\infty(0, 1)$

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_0^1 u(u - \psi).$$

Approcher u par une fonction $\psi \in C_0^\infty(0, 1)$ dans la norme L^2 et conclure.

Exercice 16.23 (i) Montrer que si $n \geq 1$ est un entier et $x \in]0, 1]$, alors

$$0 \leq \frac{nx \sin x}{1 + (nx)^3} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

(ii) Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx \sin x}{1 + (nx)^3} dx.$$

Exercice 16.24 Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

Exercice 16.25 Calculer, en fonction de $\alpha \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n\alpha}^{+\infty} \frac{y e^{-y^2}}{1 + \frac{y^2}{n^2}} dy.$$

Exercice 16.26 Soit f_n et f des fonctions mesurables sur $]0, 1[$. On dit que f_n converge en mesure vers f et on note $f_n \xrightarrow{m} f$ si pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\text{mes} \{x \in]0, 1[: |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}] = 0$$

- (i) Montrer que si $f_n \xrightarrow{m} f$ et $f_n \xrightarrow{m} g$, alors $f = g$ p.p.
- (ii) Montrer, par contradiction, que si $f_n \rightarrow f$ dans $L^1(0, 1)$, alors $f_n \xrightarrow{m} f$.

Exercice 16.27 Démontrer la généralisation suivante du lemme de Riemann-Lebesgue. Soit $u \in C^1(\mathbb{R})$ une fonction 2π -périodique, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in L^1(0, 2\pi)$. Montrer (voir aussi Exercice 17.19) que

$$\int_0^{2\pi} f(x) u'(nx) dx \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Exercice 16.28 Soit $f \in L^1(0, 1)$. Pour $x \in [0, 1]$ on définit

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer, à l'aide du théorème de la convergence dominée, que F est continue sur $[0, 1]$.

Exercice 16.29 Soient $p > 1$ et $f_n, f \in L^p(0, 1)$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p(0,1)} = 0.$$

- (i) Soit $1 \leq q < p$. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Hölder, que

$$\|f\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}.$$

- (ii) Montrer que si $1 \leq q < p$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^q(0,1)} = 0.$$

- (iii) Montrer que si $p < r$ et $|f_n|, |f| \leq c$ p.p. alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^r(0,1)} = 0.$$

Exercice 16.30 Soient $u_1, \dots, u_n \in L^1(0, 1)$. Montrer à l'aide de l'inégalité de Hölder et par induction que

$$\int_0^1 (|u_1| \cdots |u_n|)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_0^1 |u_1| \cdots \int_0^1 |u_n| \right)^{\frac{1}{n}}$$

c'est à dire

$$\int_0^1 \left(\prod_{s=1}^n |u_s| \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{s=1}^n \int_0^1 |u_s| \right)^{\frac{1}{n}} = \prod_{s=1}^n \left(\int_0^1 |u_s| \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Suggestion. Observer que si $u \in L^1(0, 1)$, alors $|u|^{\frac{1}{n}} \in L^n(0, 1)$.

Exercice 16.31 Soient $1 < p < q < r < \infty$.

(i) Montrer que

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in L^q(\mathbb{R})$$

et

$$f \in L^\infty(\mathbb{R}) \not\Rightarrow f \in L^q(\mathbb{R})$$

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \not\Rightarrow f \in L^q(\mathbb{R}).$$

(ii) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Hölder, que

$$f \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^r(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in L^q(\mathbb{R}).$$

Exercice 16.32 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive et mesurable et

$$h_k(x) = |x|^k f(x), \quad k = 0, \dots, n.$$

(i) Montrer que si $h_0, h_n \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$h_k \in L^1(\mathbb{R}), \quad k = 1, \dots, (n-1).$$

(ii) Montrer qu'en général

$$h_k \in L^1(\mathbb{R}), \quad \forall k \geq 1$$

n'implique pas $h_0 \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 16.33 Soit $f \in L^1(-1, 1)$. On définit

$$V(f) = \sup \left\{ \int_{-1}^1 f(x) \varphi'(x) dx : \varphi \in C_0^1(-1, 1) \text{ tel que } \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1 \right\}$$

et

$$BV(-1, 1) = \{f \in L^1(-1, 1) \text{ tel que } V(f) < \infty\}.$$

(i) Montrer que la fonction

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases}$$

appartient à $BV(-1, 1)$.

(ii) Montrer que $C^1([-1, 1]) \subsetneq BV(-1, 1)$.

Exercice 16.34 Soient $-\infty < a < b < +\infty$, $u \in L^\infty(a, b)$ (avec $\|u\|_{L^\infty} \neq 0$) et $n \in \mathbb{N}$.

(i) Montrer que

$$\int_a^b |u|^n \leq \left(\int_a^b |u|^{n+1} \right)^{\frac{n}{n+1}} (b-a)^{\frac{1}{n+1}}$$

et en conclure que

$$\frac{\left(\int_a^b |u|^n \right)^{\frac{1}{n}}}{(b-a)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{\int_a^b |u|^{n+1}}{\int_a^b |u|^n}.$$

(ii) Montrer que

$$\frac{\int_a^b |u|^{n+1}}{\int_a^b |u|^n} \leq \|u\|_{L^\infty}.$$

(iii) En se rappelant que $\lim_{n \rightarrow \infty} [\|u\|_{L^n}] = \|u\|_{L^\infty}$, déduire des deux questions précédentes que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\int_a^b |u|^{n+1}}{\int_a^b |u|^n} \right] = \|u\|_{L^\infty}.$$

Exercice 16.35 Soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $u \in C^1([a, b])$ avec $u(a) = 0$.

(i) Montrer, en écrivant $u(x) = \int_a^x u'(t) dt$, que, pour tout $x \in [a, b]$,

$$|u(x)| \leq \|u'\|_{L^1(a,b)}.$$

(ii) A l'aide de la question (i) et de l'inégalité de Hölder, montrer l'inégalité de Poincaré, à savoir que, si $1 \leq p \leq +\infty$, alors

$$\|u\|_{L^p(a,b)} \leq (b-a) \|u'\|_{L^p(a,b)}.$$

On traitera les cas $p = 1$, $p = +\infty$ et $1 < p < +\infty$ séparément.

Exercice 16.36 Soient $\gamma > 0$ et $u_\nu \in L^1(\mathbb{R})$ tels que $\|u_\nu\|_{L^1} \leq \gamma$ et

$$u_\nu \rightarrow u \text{ p.p. } \quad \text{quand } \nu \rightarrow \infty.$$

- (i) Montrer que $u \in L^1(\mathbb{R})$ et que $\|u\|_{L^1} \leq \gamma$.
 (ii) Montrer, à l'aide du théorème de la convergence dominée et de la question précédente, que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} [\|(|u_\nu| - |u| - |u_\nu - u|)\|_{L^1}] = 0.$$

16.8 Corrigés

Exercice 16.1 (i) Posons

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}, \quad \psi = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j}.$$

Puisque les A_i sont deux à deux disjoints et recouvrent \mathbb{R} et de même pour les B_j , on a que, pour tout i et j ,

$$\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m \chi_{A_i \cap B_j} \quad \text{et} \quad \chi_{B_j} = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Puisque $\psi \leq \varphi$ on a donc que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_j \chi_{A_i \cap B_j} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \chi_{A_i \cap B_j}.$$

On en déduit directement que

$$b_j \leq a_i \quad \text{pour tout } i, j \text{ tels que } A_i \cap B_j \neq \emptyset.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int \psi &= \sum_{j=1}^m b_j \text{mes}(B_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_j \text{mes}(A_i \cap B_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \text{mes}(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^n a_i \text{mes}(A_i) = \int \varphi. \end{aligned}$$

(ii) Soit $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$. On doit montrer que

$$\sup \left\{ \int \psi : \psi \text{ simple et } \psi \leq \varphi \right\} = \sum_{i=1}^n a_i \text{mes}(A_i).$$

(\geq) Puisque φ est simple et $\varphi \leq \varphi$, on a donc

$$\sup \left\{ \int \psi : \psi \text{ simple et } \psi \leq \varphi \right\} \geq \int \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \text{mes}(A_i).$$

(\leq) Soit ψ une fonction simple telle que $\psi \leq \varphi$. Par le point (i), on a

$$\int \psi \leq \int \varphi.$$

En passant au sup sur les ψ , nous avons directement

$$\sup \left\{ \int \psi : \psi \text{ simple et } \psi \leq \varphi \right\} \leq \sum_{i=1}^n a_i \text{mes}(A_i). \quad \spadesuit$$

Exercice 16.2 Les points (i) et (ii) sont élémentaires. Montrons (iii). Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, on a

$$A \cap E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A \cap E_j,$$

où l'union est disjointe, puisque les E_j sont par hypothèse deux à deux disjoints. Par additivité de la mesure, ceci implique

$$\text{mes}(A \cap E) = \sum_{j=1}^{\infty} \text{mes}(A \cap E_j).$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n \text{mes}(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\infty} \text{mes}(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \text{mes}(A_i \cap E_j). \quad (16.4)$$

Dans la dernière égalité, la permutation des sommes est justifiée par le fait que l'une des deux est finie. Pour conclure, nous utilisons le point (i) et l'égalité (16.4)

$$\int_E \varphi = \sum_{i=1}^n a_i \text{mes}(A_i \cap E) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_i \text{mes}(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} \varphi. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.3 (i) Pour toute fonction φ simple et mesurable telle que $0 \leq \varphi \leq f \leq g$, on a par définition

$$\int_E \varphi \leq \int_E g.$$

En passant au suprémum sur tous les $\varphi \leq f$ simples et mesurables, on a bien

$$\int_E f \leq \int_E g.$$

(ii) Le résultat est trivial si $a = 0$. Si $a > 0$, alors pour tout $\varphi \leq f$ simple et mesurable, on a $a\varphi \leq af$. Alors par l'Exercice 16.2,

$$\begin{aligned} a \int f &= a \sup_{\varphi} \left\{ \int \varphi : \varphi \leq f \right\} = \sup_{\varphi} \left\{ a \int \varphi : \varphi \leq f \right\} \\ &= \sup_{\varphi} \left\{ \int a\varphi : a\varphi \leq af \right\} = \sup_{\psi} \left\{ \int \psi : \psi \leq af \right\} \\ &= \int af. \end{aligned}$$

(iii) Si $E \subset F$, alors $\chi_E \leq \chi_F$, d'où par le point (i),

$$\int_E f = \int f \chi_E \leq \int f \chi_F = \int_F f.$$

(iv) Si $\text{mes}(E) = 0$, alors $\chi_E = 0$ presque partout, de même pour $f \chi_E$. Par la Proposition 16.4 (i) montrée au cours, ceci implique

$$\int_E f = \int f \chi_E = 0. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.4 (i) On doit montrer que pour tout f, g mesurables non négatives on a

$$\int (f + g) = \int f + \int g \quad (16.5)$$

Nous procédons en deux étapes

Etape 1. On commence d'abord par montrer (16.5) pour des fonctions simples, mesurables et non négatives φ et ψ . Il existe donc A_1, \dots, A_n et B_1, \dots, B_m des ensembles mesurables ainsi que $a_1, \dots, a_n \geq 0$ et $b_1, \dots, b_m \geq 0$ tels que

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \quad \text{et} \quad \psi = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j}.$$

Il s'ensuit directement que

$$\varphi + \psi = \sum_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m} (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Utilisant le fait que les A_i et B_j sont des partitions de \mathbb{R} , alors

$$\text{mes}(A_i) = \sum_{j=1}^m \text{mes}(A_i \cap B_j), \quad \text{mes}(B_j) = \sum_{i=1}^n \text{mes}(A_i \cap B_j)$$

et donc

$$\begin{aligned} \int (\varphi + \psi) &= \sum_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m} (a_i + b_j) \text{mes}(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m} a_i \text{mes}(A_i \cap B_j) + \sum_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m} b_j \text{mes}(A_i \cap B_j) \end{aligned}$$

et finalement

$$\int (\varphi + \psi) = \sum_{i=1}^n a_i \text{mes}(A_i) + \sum_{j=1}^m b_j \text{mes}(B_j) = \int \varphi + \int \psi.$$

Etape 2. Pour finir on montre (16.5) pour des fonctions f, g mesurables non négatives. Utilisant le Théorème 16.7 on sait qu'il existe $\{\varphi_\nu\}, \{\psi_\nu\}$ deux suites de fonctions mesurables simples non négatives telles que

$$\varphi_\nu \nearrow f \text{ et } \psi_\nu \nearrow g.$$

On a alors que $\varphi_\nu + \psi_\nu \nearrow f + g$. Utilisant le point précédent et le théorème de la convergence monotone, on obtient que

$$\int (f + g) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \int (\varphi_\nu + \psi_\nu) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \int \varphi_\nu + \lim_{\nu \rightarrow 0} \int \psi_\nu = \int f + \int g;$$

d'où le résultat.

(ii) Puisque $f_\nu \geq 0$, alors

$$\sum_{\nu=1}^n f_\nu \nearrow \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu.$$

Par le théorème de la convergence monotone et le point (i), on a directement

$$\int \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \sum_{\nu=1}^n f_\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n \int f_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int f_\nu. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.5 Soit

$$f_\nu(x) = \begin{cases} \chi_{[0,1]}(x) & \nu \text{ pair} \\ \chi_{]1,2[}(x) & \nu \text{ impair.} \end{cases}$$

avec $\nu \geq 1$. On a alors

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

mais

$$\int f_\nu = 1, \quad \forall \nu \geq 1,$$

d'où

$$0 = \int \liminf_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu < \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int f_\nu = 1. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.6 (i) Comme $f - u_\nu \geq 0$ on peut appliquer le lemme de Fatou à $v_\nu = f - u_\nu$ et on trouve

$$\int f - \int \limsup_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu = \int \liminf_{\nu \rightarrow \infty} v_\nu \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int v_\nu \leq \int f - \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \int u_\nu$$

et donc, en se rappelant que $\int |f| < \infty$,

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \int u_\nu \leq \int \limsup_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu.$$

De même comme $f + u_\nu \geq 0$ on peut appliquer le lemme de Fatou à $v_\nu = f + u_\nu$ et on trouve

$$\int f + \int \liminf_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu = \int \liminf_{\nu \rightarrow \infty} v_\nu \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int v_\nu \leq \int f + \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int u_\nu$$

et donc, en se rappelant que $\int |f| < \infty$,

$$\int \liminf_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int u_\nu.$$

Comme trivialement $\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int u_\nu \leq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \int u_\nu$, on a bien obtenu le résultat.

(ii) On a $\liminf_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu(x) = 0$ et $\limsup_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu(x) = \chi_{[0,3]}(x)$. Par conséquent on trouve que

$$0 = \int \liminf_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu < \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int u_\nu = 1 < \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \int u_\nu = 2 < \int \limsup_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu = 3. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.7 (i) Par définition d'une suite régularisante, on remarque d'abord que pour tout $\nu \geq 1$,

$$\text{supp}(\varphi) \subset [-1, 1] \quad \Rightarrow \quad \text{supp}(\varphi_\nu) \subset [-1/\nu, 1/\nu].$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le support de la fonction $y \rightarrow \phi_\nu(x - y)$ est inclus dans l'intervalle $[x - 1/\nu, x + 1/\nu]$, et donc on peut écrire

$$f_\nu(x) = \int_{x - \frac{1}{\nu}}^{x + \frac{1}{\nu}} \varphi_\nu(x - y) f(y) dy. \quad (16.6)$$

Puisque $\varphi_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, alors on peut dériver à l'intérieur de l'intégrale et on obtient

$$f_\nu^{(k)}(x) = \int_{x - \frac{1}{\nu}}^{x + \frac{1}{\nu}} \varphi_\nu^{(k)}(x - y) f(y) dy, \quad \forall k \geq 1,$$

d'où $f_\nu \in C^\infty(\mathbb{R})$ pour tout $\nu \geq 1$.

Montrons que le support de f_ν est compact dans $]a, b[$ dès que ν est suffisamment grand. Il est évident que $f \in C_0(a, b)$ si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in]-\infty, a + \epsilon[\cap]b - \epsilon, +\infty[. \quad (16.7)$$

Nous allons montrer que

$$f_\nu(x) = 0, \quad \forall x \in]-\infty, a + \frac{\epsilon}{2}[\cap]b - \frac{\epsilon}{2}, +\infty[\quad (16.8)$$

pour tout ν suffisamment grand pour que $1/\nu < \epsilon/2$, ce qui est équivalent à $f_\nu \in C_0^\infty(a, b)$. Soit $x < a + \epsilon/2$. Alors pour tout $y \in [x - 1/\nu, x + 1/\nu]$, nous avons

$$y \leq x + \frac{1}{\nu} < a + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = a + \epsilon,$$

d'où, par (16.6) et (16.7), $f_\nu(x) = 0$. De même, $f_\nu(x) = 0$ si $x > b - \epsilon/2$, ce qui montre (16.8).

Remarque. On peut également montrer l'exercice en prouvant et en utilisant la formule plus générale

$$\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g).$$

(ii) Pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $\nu \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\nu(x-y) dx = \nu \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\nu(x-y)) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) dz = 1,$$

où on a effectué le changement de variable $z = \nu(x-y)$. Par conséquent, en permutant l'ordre d'intégration,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\nu(x)| dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\nu(x-y) |f(y)| dy \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\nu(x-y) dx \right] dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| dy. \end{aligned}$$

(iii) Nous allons montrer que pour tout $\epsilon > 0$, alors

$$|f_\nu(x) - f(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in [a, b],$$

dès que ν est suffisamment grand. Comme f est continue sur un compact, elle est uniformément continue et donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que

$$|y| \leq \delta \Rightarrow |f(x-y) - f(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

Soit $\nu > 1/\delta$. En utilisant $\int \varphi = \int \varphi_\nu = 1$ et le fait que

$$\text{supp}(\varphi_\nu) \subset [-1/\nu, 1/\nu],$$

on trouve

$$\begin{aligned} |f_\nu(x) - f(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y) - f(x)| \varphi_\nu(y) dy \\ &= \int_{-1/\nu}^{1/\nu} |f(x-y) - f(x)| \varphi_\nu(y) dy \\ &\leq \epsilon \int_{-1/\nu}^{1/\nu} \varphi_\nu(y) dy = \epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, toute fonction C_0 peut être uniformément approchée par une suite de fonctions C_0^∞ , c'est à dire l'espace C_0^∞ est dense dans C_0 . ♠

Exercice 16.8 Pour $\nu \in \mathbb{N}$ on pose

$$f_\nu(x) = \min\{|f(x)|, \nu\}.$$

Le théorème de la convergence monotone (ou le théorème de convergence dominée) implique que, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver ν suffisamment grand pour que

$$\int_{\Omega} (|f(x)| - f_\nu(x)) dx \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Choisissons alors $\delta = \epsilon/2\nu$. On a donc que, pour $\text{mes } E \leq \delta$,

$$\int_E |f(x)| dx = \int_E f_\nu(x) dx + \int_E (|f(x)| - f_\nu(x)) dx \leq \nu \text{mes } E + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.9 (i) \Rightarrow (ii) Si $x = y$, l'inégalité est triviale. Soient $x \neq y$ et $0 < \lambda < 1$. Par convexité de f on a

$$\frac{1}{\lambda} [f(y + \lambda(x - y)) - f(y)] \leq f(x) - f(y). \quad (16.9)$$

Puisque

$$f'(y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(y + \lambda(x - y)) - f(y)}{\lambda(x - y)},$$

alors, par (16.9), on trouve

$$f'(y)(x - y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} [f(y + \lambda(x - y)) - f(y)] \leq f(x) - f(y).$$

(ii) \Rightarrow (i) Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a par hypothèse que

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) + (1 - \lambda)f'(\lambda x + (1 - \lambda)y)(x - y) \\ f(y) &\geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - \lambda f'(\lambda x + (1 - \lambda)y)(x - y). \end{aligned}$$

Multipliant la première inégalité par λ et la deuxième par $1 - \lambda$, puis sommant les résultats obtenus, on obtient que

$$f(\lambda x + 1 - \lambda y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y);$$

et donc f est convexe.

(ii) \Rightarrow (iii) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(y) + f'(y)(x - y) \\ f(y) &\geq f(x) + f'(x)(y - x). \end{aligned}$$

En combinant ces deux inégalités, on obtient directement (iii).

(iii) \Rightarrow (ii) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On suppose que $x \geq y$ (l'autre cas est en tout point semblable). Par hypothèse nous avons

$$[f'(t) - f'(y)](t - y) \geq 0 \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

et donc

$$f'(t) - f'(y) \geq 0 \quad \text{pour tout } t \geq y.$$

En intégrant on obtient

$$0 \leq \int_y^x (f'(t) - f'(y)) dt = f(x) - f(y) - (x - y) f'(y),$$

d'où le résultat.

(iii) \Rightarrow (iv) Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $y = x + h$ avec $h \neq 0$, on a immédiatement

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \geq 0.$$

En passant à la limite on déduit le résultat, à savoir

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \geq 0.$$

(iv) \Rightarrow (iii) Soient $x \leq y$ (l'autre cas est en tout point semblable). On a directement que

$$0 \leq \int_x^y f''(t) dt = f'(y) - f'(x)$$

d'où

$$(f'(y) - f'(x))(y - x) \geq 0. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.10 (i) Une fonction f est concave si et seulement si $-f$ est convexe. Par l'exercice précédent, si $f \in C^2$, alors f est concave si et seulement si $f'' \leq 0$. La concavité du log découle donc directement de

$$\log''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad \forall x > 0.$$

(ii) Soient $a, b > 0$ et $1/p + 1/p' = 1$, avec $1 < p < \infty$. Comme la fonction log est concave, il vient que

$$\log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}\right) \geq \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{p'} \log b^{p'} = \log(ab)$$

et donc, par croissance et injectivité de log sur \mathbb{R}_+^* , on conclut

$$\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \geq ab. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.11 (i) Soient $f, g \in L^p(a, b)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Utilisant le fait que (par convexité de la fonction $x \rightarrow x^p$), pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|x + y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p)$$

il est trivial de voir que

$$\lambda f + \mu g \in L^p(a, b)$$

ce qui implique directement que $L^p(a, b)$ est un espace vectoriel.

(ii) Soit $f \in L^q(a, b)$. Supposons pour commencer que $q < \infty$. Il vient, par l'inégalité de Hölder, que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f|^p &= \int_a^b |f|^p |1| \leq \left(\int_a^b (|f|^p)^{q/p} \right)^{p/q} \left(\int_a^b |1| \right)^{1-p/q} \\ &= (\|f\|_{L^q})^p (b-a)^{1-p/q}. \end{aligned}$$

On obtient donc finalement que

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^q} (b-a)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Supposons à présent que $q = \infty$. Dans ce cas

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b \|f\|_{L^\infty}^p \right)^{1/p} = (b-a)^{1/p} \|f\|_{L^\infty}. \quad (16.10)$$

(iii) Utilisant (16.10), il vient immédiatement que

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

D'autre part, par définition de $\|f\|_{L^\infty}$, on a que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$A_\epsilon = \{x \in]a, b[: |f(x)| \geq \|f\|_{L^\infty} - \epsilon\}$$

est de mesure non nulle. Il vient alors

$$\int_a^b |f|^p \geq \int_{A_\epsilon} |f|^p \geq \text{mes}(A_\epsilon) (\|f\|_{L^\infty} - \epsilon)^p$$

et donc

$$\|f\|_{L^p} \geq \text{mes}(A_\epsilon)^{1/p} (\|f\|_{L^\infty} - \epsilon).$$

On obtient par conséquent

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} \geq (\|f\|_{L^\infty} - \epsilon).$$

Puisque ϵ est arbitraire, on a finalement que

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p} \geq \|f\|_{L^\infty}$$

d'où le résultat. ♠

Exercice 16.12 (i) En effet si on pose

$$\alpha = \frac{p+q}{q} \quad \text{et} \quad \alpha' = \frac{p+q}{p}$$

on a que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1.$$

On peut alors appliquer l'inégalité de Hölder et on a

$$\begin{aligned} \|f g\|_{L^r}^r &= \int_a^b |f g|^{\frac{p q}{p+q}} = \int_a^b |f|^{\frac{p q}{p+q}} |g|^{\frac{p q}{p+q}} \leq \left(\int_a^b |f|^{\frac{p q \alpha}{p+q}} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_a^b |g|^{\frac{p q \alpha'}{p+q}} \right)^{\frac{1}{\alpha'}} \\ &= \left(\int_a^b |f|^p \right)^{\frac{q}{q+p}} \left(\int_a^b |g|^q \right)^{\frac{p}{q+p}} = \|f\|_{L^p}^{\frac{p q}{q+p}} \|g\|_{L^q}^{\frac{p q}{q+p}} = \|f\|_{L^p}^r \|g\|_{L^q}^r \end{aligned}$$

et ainsi le résultat.

(ii) Comme $0 < r < 1$, on choisit $0 < \epsilon < 1 - r$. Puis on observe que si $a = 0$, $b = 1$

$$f(x) = x^{\frac{\epsilon-1}{p}} \quad \text{et} \quad g(x) = x^{\frac{\epsilon-1}{q}}$$

alors $f \in L^p(0, 1)$ et $g \in L^q(0, 1)$. Toutefois

$$[f g](x) = x^{\frac{\epsilon-1}{r}} \quad \Rightarrow \quad f g \notin L^1(0, 1). \quad \spadesuit$$

Exercice 16.13 (i) Par divers résultats du cours (invariance de la mesure par translation), on peut supposer sans perte de généralité que $b = 0$.

Etape 1. On montre d'abord que, pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}$, $a \neq 0$ on a

$$\text{mes}^*(aE) = |a| \text{mes}^*(E).$$

Supposons pour commencer que $a > 0$. On a

$$\begin{aligned} \text{mes}^*(aE) &= \inf \left\{ \sum_n (b_n - a_n) : aE \subset \bigcup_n]a_n, b_n[\right\} \\ &= a \inf \left\{ \sum_n \left(\frac{b_n}{a} - \frac{a_n}{a} \right) : E \subset \bigcup_n \left] \frac{a_n}{a}, \frac{b_n}{a} \right[\right\} = a \text{mes}^*(E). \end{aligned}$$

Pour finir si $a < 0$, il vient

$$\begin{aligned} \text{mes}^*(aE) &= \inf \left\{ \sum_n (b_n - a_n) : aE \subset \bigcup_n]a_n, b_n[\right\} \\ &= |a| \inf \left\{ \sum_n \left(\frac{a_n}{a} - \frac{b_n}{a} \right) : E \subset \bigcup_n \left] \frac{b_n}{a}, \frac{a_n}{a} \right[\right\} = |a| \text{mes}^*(E). \end{aligned}$$

Etape 2. Montrons maintenant que

$$E \subset \mathbb{R} \text{ mesurable, } a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad aE \text{ mesurable.}$$

Soit $\epsilon > 0$. Puisque E est mesurable, il existe un ouvert $O \supset E$ tel que

$$\text{mes}^*(O \setminus E) \leq \frac{\epsilon}{|a|}.$$

Posons $O' = aO$. Alors par l'Etape 1 on trouve

$$\text{mes}^*(O' \setminus aE) = \text{mes}^*(a(O \setminus E)) = |a| \text{mes}^*(O \setminus E) \leq \epsilon,$$

ce qui montre que aE est mesurable, et donc

$$\text{mes}(aE) = |a| \text{mes}(E).$$

(ii) On commence par montrer le résultat lorsque f est mesurable simple et non négative. Il s'ensuit que g est mesurable simple et non négative. Il existe donc $c_1, \dots, c_n \geq 0$ et $A_1, \dots, A_n \subset E$ des ensembles mesurables tels que $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$ avec

$$g = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}.$$

De plus, il est élémentaire de voir que f vaut

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{aA_i + b}.$$

Par le point (i) on a que

$$\text{mes}(aA_i + b) = |a| \text{mes}(A_i)$$

on obtient que

$$\int_F f = \sum_{i=1}^n c_i |a| \text{mes}(A_i) = |a| \int_E g \quad (16.11)$$

d'où le résultat.

Lorsque f est arbitraire, on écrit $f = f^+ - f^-$. Utilisant le Théorème 16.7, on sait qu'il existe $\phi_\nu^+ \nearrow f^+$ et $\phi_\nu^- \nearrow f^-$ deux suites de fonctions simples non négatives. En invoquant l'égalité (16.11) et le théorème de la convergence monotone, on obtient directement le résultat recherché. ♠

Exercice 16.14 (i) Si $1 \leq p < \infty$, on a

$$\|f_\nu\|_{L^p} = \text{mes}(I_\nu)^{1/p} = \frac{1}{2^{h(\nu)/p}} \rightarrow 0$$

et donc

$$f_\nu \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^p(0, 1).$$

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la collection d'intervalles $\{I_{2^n}, I_{2^{n+1}}, \dots, I_{2^{n+1}-1}\}$ forme une partition de $[0, 1]$. Il en découle immédiatement que, pour tout $x \in [0, 1]$ et $k \in \mathbb{N}$, il existe $\nu_k^0, \nu_k^1 > k$ tels que

$$x \notin I_{\nu_k^0} \quad \text{et} \quad x \in I_{\nu_k^1}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, il existe deux sous-suite de $\{f_\nu\}$, notées $\{f_k^0\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{f_k^1\}_{k \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k^0(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k^1(x) = 1$$

d'où

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x) \text{ n'existe pas.}$$

(iii) Considérons la sous-suite

$$\tilde{f}_k = f_{2^k} = \chi_{[0, 2^{-k}]}, \quad k \geq 0.$$

Alors pour tout $x > 0$, il existe $k \geq 1$ tel que $x > 2^{-k}$, d'où

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_k(x) = 0.$$

Si $x = 0$, alors on a trivialement

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_k(0) = 1$$

et donc

$$\tilde{f}_k \rightarrow 0 \quad \text{presque partout sur } [0, 1]. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.15 Soit $\gamma_p > 0$ tel que

$$(x + y + z)^p \leq \gamma_p (x^p + y^p + z^p), \quad \forall x, y, z \geq 0.$$

Fixons $\tau > 0$. Par le Théorème 16.29, il existe $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x) - f(x)|^p dx \leq \frac{\tau}{3\gamma_p}$$

et donc, pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}$, on a aussi

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x + \epsilon) - f(x + \epsilon)|^p dx \leq \frac{\tau}{3\gamma_p}.$$

Soit $[a, b]$ tel que $\text{supp}(g) \subset [a, b]$. Comme g est uniformément continue, on peut trouver $0 < \delta = \delta(\tau) < 1$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\epsilon| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x + \epsilon) - g(x)| \leq \left(\frac{\tau}{3\gamma_p(b - a + 2)} \right)^{1/p}$$

ce qui implique

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x + \epsilon) - g(x)|^p dx = \int_{a-1}^{b+1} |g(x + \epsilon) - g(x)|^p dx \leq \frac{\tau}{3\gamma_p}.$$

Combinant les trois estimations on a que, pour $|\epsilon| \leq \delta$,

$$\begin{aligned} u_\epsilon &= \int_{\mathbb{R}} |f(x+\epsilon) - f(x)|^p dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x+\epsilon) - g(x+\epsilon) + g(x+\epsilon) - g(x) + g(x) - f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

De ceci on déduit que

$$\begin{aligned} u_\epsilon &\leq \gamma_p \left[\int_{\mathbb{R}} |f(x+\epsilon) - g(x+\epsilon)|^p dx + \int_{\mathbb{R}} |g(x+\epsilon) - g(x)|^p dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} |g(x) - f(x)|^p dx \right] \end{aligned}$$

et donc

$$u_\epsilon \leq \tau.$$

Puisque τ est arbitraire, nous avons le résultat. ♠

Exercice 16.16 (i) Soit $f = \chi_A$. Puisque $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a par l'exercice précédent que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int |\chi_A(x-\epsilon) - \chi_A(x)| dx = 0.$$

Comme

$$|\chi_A(x-\epsilon) - \chi_A(x)| = \chi_{[(A+\epsilon) \setminus A] \cup [A \setminus (A+\epsilon)]}(x)$$

il s'ensuit que

$$\int |\chi_A(x-\epsilon) - \chi_A(x)| dx = \text{mes}([(A+\epsilon) \setminus A] \cup [A \setminus (A+\epsilon)]).$$

Remarquant que

$$\text{mes}((A+\epsilon) \setminus A) \leq \text{mes}([(A+\epsilon) \setminus A] \cup [A \setminus (A+\epsilon)])$$

on obtient immédiatement le résultat.

(ii) Le résultat est faux pour A quelconque. En effet soit $A \subset [-1, 2]$ l'ensemble non mesurable construit dans le cours (cf. Théorème 15.18). Cet ensemble a en particulier la propriété suivante

$$(A+\epsilon) \cap A = \emptyset \quad \text{pour tout } \epsilon \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \setminus \{0\}.$$

Il s'ensuit directement que, pour $\epsilon \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \setminus \{0\}$,

$$\text{mes}^*((A+\epsilon) \setminus A) = \text{mes}^*(A+\epsilon) = \text{mes}^*(A).$$

Remarquant que $\text{mes}^*(A) > 0$ (sinon A serait mesurable), il vient donc que

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \setminus \{0\}}} \text{mes}^*((A+\epsilon) \setminus A) = \text{mes}^*(A) \neq 0,$$

d'où le résultat. ♠

Exercice 16.17 Par l'inégalité de Jensen, on a

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 |u'|^4 \geq \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u' \right)^4 = 1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |\overline{u}'|^4. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.18 (i) Par l'inégalité du triangle on a

$$\|u\|_{L^p} - \|u_\nu - u\|_{L^p} \leq \|u_\nu\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|u_\nu - u\|_{L^p}$$

et le résultat suit immédiatement.

(ii) On obtient de l'inégalité de Hölder que, pour tout $v \in L^{p'}$,

$$\left| \int_a^b (u_\nu - u) v \right| \leq \|u_\nu - u\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}}$$

d'où le résultat.

(iii) On trouve

$$\left\| |u|^{p-2} u \right\|_{L^{p'}}^{p'} = \int_a^b |u|^p = \|u\|_{L^p}^p$$

et donc, par définition de la convergence faible (avec $v = |u|^{p-2} u$) on trouve

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b (u_\nu - u) |u|^{p-2} u = 0.$$

(iv) On a, par convexité de $h(x) = |x|^p$, que

$$\int_a^b |u_\nu|^p \geq \int_a^b |u|^p + p \int_a^b |u|^{p-2} u (u_\nu - u)$$

et donc

$$\|u_\nu\|_{L^p}^p \geq \|u\|_{L^p}^p + p \int_a^b |u|^{p-2} u (u_\nu - u).$$

En combinant l'inégalité ci-dessus et la question (iii) on obtient

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} \|u_\nu\|_{L^p}^p \geq \|u\|_{L^p}^p + p \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_a^b |u|^{p-2} u (u_\nu - u) = \|u\|_{L^p}^p.$$

(iv) Le résultat est une conséquence directe du lemme de Riemann-Lebesgue qui dit que si $f \in L^1(0, 2\pi)$ et si $u_\nu(x) = \sin(\nu x)$, alors

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} u_\nu f = 0.$$

Comme $u_\nu \in L^p(0, 2\pi)$ et $v \in L^{p'}(0, 2\pi) \subset L^1(0, 2\pi)$, on infère que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} u_\nu v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_\nu \xrightarrow{f} 0 \text{ dans } L^p. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.19 (i) Soit $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et soit la fonction $\tilde{f}_h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\tilde{f}_h(x) = \frac{f(hu(x)) - f(0) - hf'(0)u(x)}{h}.$$

On a que $\tilde{f}_h \rightarrow 0$ p.p. dans $]0, 1[$. En effet, comme f est dérivable en 0, la fonction

$$g(h) = f(hu(x))$$

est dérivable en $h = 0$ pour presque tout $x \in]0, 1[$; et le résultat suit.

(ii) Comme f est globalement lipschitzienne, on a

$$|f(hu(x)) - f(0)| \leq |h| |u(x)|$$

et donc, pour presque tout $x \in]0, 1[$,

$$|\tilde{f}_h(x)| \leq [1 + |f'(0)|] |u(x)|.$$

(iii) On a que

$$F'(0) = f'(0) \int_0^1 u(x) dx.$$

En effet posons

$$L = f'(0) \int_0^1 u(x) dx$$

et remarquons que

$$\frac{F(h) - F(0) - hL}{h} = \int_0^1 \frac{f(hu(x)) - f(0) - hf'(0)u(x)}{h} dx = \int_0^1 \tilde{f}_h(x) dx.$$

On applique alors, grâce aux deux premières questions, le théorème de la convergence dominée et on obtient l'assertion. \spadesuit

Exercice 16.20 (i) Par l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned} \| |u|^{p-1} v \|_{L^1} &= \int_0^1 |u|^{p-1} |v| \leq \left(\int_0^1 (|u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^1 |v|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_0^1 |u|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_0^1 |v|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L^p}^{p-1} \|v\|_{L^p}. \end{aligned}$$

(ii) On pose, pour $t \in [-1, 1]$,

$$f_t(x) = \frac{|u(x) + tv(x)|^p - |u(x)|^p}{t}$$

de manière que

$$\frac{F(t) - F(0)}{t} = \int_0^1 f_t(x) dx$$

On observe ensuite, à l'aide de l'inégalité (16.3), que

$$|f_t(x)| \leq \gamma \left(|u(x)|^{p-1} |v(x)| + |v(x)|^p \right) = g(x).$$

Par la première question $g \in L^1(0, 1)$. Comme

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_t(x) = p |u(x)|^{p-2} u(x) v(x)$$

on peut appliquer le théorème de la convergence dominée et trouver

$$F'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = p \int_0^1 |u(x)|^{p-2} u(x) v(x) dx. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.21 (i) Par hypothèse $|f(\xi) - f(0)| \leq \gamma_1 |\xi|^3$ et donc, si $\gamma_2 = \max\{|f(0)|, \gamma_1\}$, on obtient

$$|f(\xi)| \leq |f(0)| + \gamma_1 |\xi|^3 \leq \gamma_2 (1 + |\xi|^3).$$

On infère alors que

$$\int_a^b |f(u(x))| dx \leq \gamma_2 (b-a) + \gamma_2 \int_a^b |u(x)|^3 dx < \infty.$$

(ii) Par l'inégalité de Hölder on trouve

$$\|u^2 v\|_{L^1} = \int_a^b |u^2 v| \leq \left(\int_a^b (u^2)^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_a^b |v|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = \|u\|_{L^3}^{2/3} \|v\|_{L^3} < \infty.$$

(iii) On commence par observer que, si $|\epsilon| \leq 1$ et comme $|\xi + \epsilon \eta|^2 \leq 2(|\xi|^2 + |\epsilon|^2 |\eta|^2)$, alors, pour tous $\xi, \eta \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{f(\xi + \epsilon \eta) - f(\xi)}{\epsilon} \right| \leq \gamma_1 \left(|\xi + \epsilon \eta|^2 + |\eta|^2 \right) |\eta| \leq 2\gamma_1 \left(|\xi|^2 + |\eta|^2 \right) |\eta|.$$

Par conséquent, pour tout $|\epsilon| \leq 1$ et pour presque tout $x \in]a, b[$, on obtient que

$$\left| \frac{f(u(x) + \epsilon v(x)) - f(u(x))}{\epsilon} \right| \leq G(x) = 2\gamma_1 \left(|u(x)|^2 + |v(x)|^2 \right) |v(x)|.$$

Par la question précédente on infère que $G \in L^1(a, b)$. Comme

$$\frac{f(u(x) + \epsilon v(x)) - f(u(x))}{\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} f'(u(x)) v(x) \quad \text{p.p. } x \in]a, b[$$

on déduit par le théorème de la convergence dominée que

$$\Phi'(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\Phi(\epsilon) - \Phi(0)}{\epsilon} \right] = \int_a^b f'(u(x)) v(x) dx. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.22 (i) Soit $\psi \in C_0^\infty(0, 1)$ telle que

$$\|u - \psi\|_{L^2} \leq \epsilon.$$

(ii) Par hypothèse on a

$$\int_0^1 u(x) \psi(x) dx = 0$$

et donc

$$\|u\|_{L^2}^2 = \int_0^1 u^2 dx = \int_0^1 u(u - \psi) dx.$$

(iii) Par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2} \|u - \psi\|_{L^2} \leq \epsilon \|u\|_{L^2}.$$

Comme $\epsilon > 0$ est arbitraire, on déduit $\|u\|_{L^2} = 0$ et donc $u = 0$ p.p. \spadesuit

Exercice 16.23 (i) On a clairement que l'inégalité est vraie car, pour $n \geq 1$,

$$n^3 x^3 - n x^{3/2} + 1 \geq 0.$$

(ii) On a aussi que si $x \in [0, 1]$ est fixé, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n x \sin x}{1 + (n x)^3} = 0.$$

Comme $g(x) = x^{-1/2}$ est intégrable, on peut appliquer le théorème de la convergence dominée pour obtenir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n x \sin x}{1 + (n x)^3} dx = 0. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.24 On pose

$$0 \leq f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \quad \text{et} \quad f(x) = e^{-x}$$

et on observe que, pour tout $x \geq 0$,

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

(i) Comme, pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq f_n(x) \leq f(x)$$

et que $f \in L^1(0, +\infty)$, on peut appliquer le théorème de la convergence dominée et on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

(ii) On peut aussi appliquer le théorème de la convergence monotone, car

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$$

et on a immédiatement le résultat. On a bien que $f_n \leq f_{n+1}$ car

$$\frac{d}{dn} f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} e^{-2x} > 0. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.25 On écrit

$$\int_{n\alpha}^{+\infty} \frac{y e^{-y^2}}{1 + \frac{y^2}{n^2}} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{]n\alpha, +\infty[}(y) \frac{y e^{-y^2}}{1 + \frac{y^2}{n^2}} dy$$

où

$$\chi_{]a, b[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a, b[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que

$$\left| \chi_{]n\alpha, +\infty[}(y) \frac{y e^{-y^2}}{1 + \frac{y^2}{n^2}} \right| = \chi_{]n\alpha, +\infty[}(y) \frac{|y| e^{-y^2}}{1 + \frac{y^2}{n^2}} \leq g(y) = |y| e^{-y^2}$$

et que $g \in L^1(\mathbb{R})$. Par ailleurs

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\chi_{]n\alpha, +\infty[}(y) \frac{y e^{-y^2}}{1 + \frac{y^2}{n^2}} \right] = \begin{cases} \chi_{]0, +\infty[}(y) y e^{-y^2} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$$

On trouve donc, en invoquant le théorème de la convergence dominée, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n\alpha}^{+\infty} \frac{y e^{-y^2}}{1 + \frac{y^2}{n^2}} dy = \begin{cases} \int_0^{+\infty} y e^{-y^2} dy = \frac{1}{2} & \text{si } \alpha = 0 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0. \end{cases} \quad \spadesuit$$

Exercice 16.26 (i). Comme

$$|f - g| \leq |f - f_n| + |f_n - g|$$

on a que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\{x : |f(x) - g(x)| > \epsilon\} \subset \{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon/2\} \cup \{x : |f_n(x) - g(x)| > \epsilon/2\}.$$

En passant à la limite on trouve

$$\text{mes}\{x \in]0, 1[: |f(x) - g(x)| > \epsilon\} = 0$$

ce qui est le résultat souhaité.

(ii) Par contradiction supposons qu'il existe une sous suite infinie $\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ et des constantes $c, \epsilon > 0$ tels que

$$\text{mes} \{x \in]0, 1[: |f_{n_i}(x) - f(x)| > \epsilon\} \geq c.$$

Par conséquent

$$\int_0^1 |f_{n_i}(x) - f(x)| dx \geq \int_{\{x: |f_{n_i}(x) - f(x)| > \epsilon\}} |f_{n_i}(x) - f(x)| dx \geq c\epsilon > 0.$$

D'où la contradiction. ♠

Exercice 16.27 *Etape 1.* Par densité on a pour tout $\epsilon > 0$ qu'il existe $g \in C_0^\infty(0, 2\pi)$ telle que

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)| dx \leq \epsilon$$

et donc, si $|u'| \leq M$,

$$\int_0^{2\pi} |f(x) u'(nx) - g(x) u'(nx)| dx \leq M\epsilon.$$

Etape 2. Par ailleurs, en intégrant par parties, on a

$$\int_0^{2\pi} g(x) u'(nx) dx = \frac{u(nx)}{n} g(x) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} g'(x) u(nx) dx.$$

En laissant $n \rightarrow \infty$, on trouve que (car $|g'(x)u(nx)| \leq M|g'(x)|$ et $g(0) = g(2\pi) = 0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} g(x) u'(nx) dx = 0.$$

Etape 3. Par conséquent comme

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(x) u'(nx) dx \right| &\leq \left| \int_0^{2\pi} g(x) u'(nx) dx \right| \\ &\quad + \int_0^{2\pi} |f(x) u'(nx) - g(x) u'(nx)| dx \end{aligned}$$

on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^{2\pi} f(x) u'(nx) dx \right| \leq M\epsilon$$

Comme ϵ est arbitraire on a le résultat. ♠

Exercice 16.28 Soient $x \in [0, 1]$ et $h_n \rightarrow 0$ tels que $x + h_n \in [0, 1]$. On a que

$$F(x + h_n) - F(x) = \int_x^{x+h_n} f(t) dt = \int_0^1 \chi_{[x, x+h_n]}(t) f(t) dt$$

où $\chi_{[x, x+h_n]}$ est la fonction caractéristique de $[x, x+h_n]$. Appelons

$$f_n(t) = \chi_{[x, x+h_n]}(t) f(t).$$

Observer que $|f_n| \leq |f|$ et que $f_n \rightarrow 0$ p.p.. Le théorème de la convergence dominée implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [F(x+h_n) - F(x)] = 0. \quad \spadesuit$$

Exercice 16.29 (i) Notons

$$\alpha = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad \alpha' = \frac{\alpha}{\alpha - 1} = \frac{p}{p - q}$$

On a, par l'inégalité de Hölder, que

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |f|^q \right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_0^1 |f|^q \cdot 1 \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\left(\int_0^1 (|f|^q)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_0^1 1^{\alpha'} \right)^{\frac{1}{\alpha'}} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

(ii) Par la question précédente on trouve que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^q(0,1)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^p(0,1)} = 0.$$

(iii) Comme $|f_n|, |f| \leq c$, on a que

$$\int_0^1 |f_n - f|^r = \int_0^1 |f_n - f|^p |f_n - f|^{r-p} \leq (2c)^{r-p} \int_0^1 |f_n - f|^p.$$

Comme par hypothèse $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$ on a le résultat. \spadesuit

Exercice 16.30 Le résultat est trivialement vrai si $n = 1$. Supposons le montré pour $n - 1$ et montrons le pour n . L'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 (|u_1| \cdots |u_n|)^{\frac{1}{n}} &= \int_0^1 |u_1|^{\frac{1}{n}} (|u_2| \cdots |u_n|)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \left(\int_0^1 (|u_1|^{\frac{1}{n}})^n \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^1 (|u_2| \cdots |u_n|)^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &= \left(\int_0^1 |u_1| \right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^1 (|u_2| \cdots |u_n|)^{\frac{1}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse d'induction on obtient

$$\int_0^1 (|u_1| \cdots |u_n|)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_0^1 |u_1| \right)^{\frac{1}{n}} \left(\left(\int_0^1 |u_2| \cdots \int_0^1 |u_n| \right)^{\frac{1}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}}$$

ce qui est exactement ce que nous devions démontrer. ♠

Exercice 16.31 (i) On note que

$$\|f\|_{L^q}^q = \int_{\mathbb{R}} |f|^q = \int_{\mathbb{R}} |f| |f|^{q-1} \leq \|f\|_{L^\infty}^{q-1} \int_{\mathbb{R}} |f| = \|f\|_{L^\infty}^{q-1} \|f\|_{L^1}$$

et donc la première affirmation est vraie.

- Par ailleurs la fonction $f \equiv 1 \in L^\infty(\mathbb{R})$ mais clairement $f \notin L^q(\mathbb{R})$.
- La fonction

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{-\frac{1}{q}} & \text{si } |x| \leq 1 \text{ et } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

est telle que $f \in L^1(\mathbb{R})$ mais $f \notin L^q(\mathbb{R})$. En effet

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^q = 2 \int_0^1 \frac{dx}{|x|} = \infty$$

alors, comme $1 < q$, que

$$\int_{\mathbb{R}} |f| = 2 \int_0^1 |f| = 2 \int_0^1 |x|^{-\frac{1}{q}} dx = 2 \left[\frac{|x|^{1-\frac{1}{q}}}{1-\frac{1}{q}} \right]_0^1 = \frac{2}{1-\frac{1}{q}} < \infty.$$

(ii) Ecrivons ($\alpha \in]0, 1[$ sera déterminé ci-après)

$$|f|^q = |f|^{\alpha q} |f|^{(1-\alpha)q}$$

et appliquons l'inégalité de Hölder avec un exposant β à déterminer. On obtient ($\beta' = \beta/(\beta-1)$)

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^q = \int_{\mathbb{R}} |f|^{\alpha q} |f|^{(1-\alpha)q} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{\alpha \beta q} \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{\alpha \beta' q} \right)^{\frac{1}{\beta'}}$$

et donc on choisit $\alpha \in]0, 1[$ et $\beta > 1$ de manière que

$$\alpha \beta q = p \quad \text{et} \quad \alpha \beta' q = \alpha \frac{\beta}{\beta-1} q = r.$$

On trouve

$$\alpha = \frac{p}{q} \frac{r-q}{r-p} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{r-p}{r-q}$$

et donc

$$\|f\|_{L^q}^q \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p \right)^{\frac{r-q}{r-p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^r \right)^{\frac{q-p}{r-p}} = \|f\|_{L^p}^p \frac{r-q}{r-p} \|f\|_{L^r}^q \frac{q-p}{r-p}$$

ce qui nous donne le résultat souhaité. ♠

Exercice 16.32 (i) On a facilement que

$$\begin{aligned}\|h_k\|_{L^1} &= \int_{|x|\leq 1} |x|^k |f(x)| dx + \int_{|x|>1} |x|^k |f(x)| dx \\ &\leq \int_{|x|\leq 1} |f(x)| dx + \int_{|x|>1} |x|^n |f(x)| dx \\ &\leq \|h_0\|_{L^1} + \|h_n\|_{L^1} < \infty.\end{aligned}$$

(ii) Choisir

$$h_0(x) = f(x) = \begin{cases} |x|^{-1} & \text{si } |x| \leq 1 \text{ et } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

ce qui implique, pour tout $k \geq 1$,

$$h_k(x) = \begin{cases} |x|^{k-1} & \text{si } |x| \leq 1 \text{ et } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

et donc $h_k \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall k \geq 1$, alors que $h_0 = f \notin L^1(\mathbb{R})$. ♠

Exercice 16.33 (i) Clairement la fonction $H \in L^1(-1, 1)$. Par ailleurs, pour $\varphi \in C_0^1(-1, 1)$ tel que $\|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1$, on a que

$$\left| \int_{-1}^1 H(x) \varphi'(x) dx \right| = \left| \int_0^1 \varphi'(x) dx \right| = |\varphi(1) - \varphi(0)| = |\varphi(0)| \leq 1$$

et donc $V(H) \leq 1$.

(ii) Si $f \in C^1([-1, 1])$, alors $f, f' \in L^1(-1, 1)$ et

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) \varphi'(x) dx \right| = \left| \int_0^1 f'(x) \varphi(x) dx \right| \leq \|f'\|_{L^1} \|\varphi\|_{L^\infty} \leq \|f'\|_{L^1}.$$

On a donc clairement que $C^1([-1, 1]) \subset BV(-1, 1)$. Le fait que $C^1([-1, 1]) \neq BV(-1, 1)$ suit de la question précédente. ♠

Exercice 16.34 (i) De l'inégalité de Hölder on a que

$$\int_a^b (|u|^n \cdot 1) \leq \left(\int_a^b (|u|^n)^{\frac{n+1}{n}} \right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\int_a^b 1^{n+1} \right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\int_a^b |u|^{n+1} \right)^{\frac{n}{n+1}} (b-a)^{\frac{1}{n+1}}.$$

On déduit que

$$\left(\int_a^b |u|^n \right)^{n+1} \leq \left(\int_a^b |u|^{n+1} \right)^n (b-a) \Rightarrow \frac{\int_a^b |u|^n}{(b-a)} \leq \frac{\left(\int_a^b |u|^{n+1} \right)^n}{\left(\int_a^b |u|^n \right)^n}$$

ce qui donne le résultat souhaité

$$\frac{\left(\int_a^b |u|^n\right)^{\frac{1}{n}}}{(b-a)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{\int_a^b |u|^{n+1}}{\int_a^b |u|^n}.$$

(ii) Comme $|u| \leq \|u\|_{L^\infty}$ p.p., on a que

$$\int_a^b |u|^{n+1} \leq \|u\|_{L^\infty} \int_a^b |u|^n \Rightarrow \frac{\int_a^b |u|^{n+1}}{\int_a^b |u|^n} \leq \|u\|_{L^\infty}.$$

(iii) En combinant les deux questions précédentes on trouve

$$\frac{\|u\|_{L^n}}{(b-a)^{\frac{1}{n}}} \leq \frac{\int_a^b |u|^{n+1}}{\int_a^b |u|^n} \leq \|u\|_{L^\infty}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} [\|u\|_{L^n}] = \|u\|_{L^\infty}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (b-a)^{1/n} = 1$, on déduit le résultat. ♠

Exercice 16.35 (i) Comme $u(x) = \int_a^x u'(t) dt$, on trouve, pour tout $x \in [a, b]$,

$$|u(x)| \leq \int_a^x |u'(t)| dt \leq \int_a^b |u'(t)| dt = \|u'\|_{L^1(a,b)}.$$

(ii) Cas : $p = 1$. On trouve, en intégrant l'inégalité dans (i) que

$$\|u\|_{L^1(a,b)} \leq (b-a) \|u'\|_{L^1(a,b)}.$$

Cas : $p = +\infty$. De l'inégalité dans (i) on obtient

$$|u(x)| \leq \int_a^b |u'(t)| dt \leq \|u'\|_{L^\infty(a,b)} \int_a^b dt \leq (b-a) \|u'\|_{L^\infty(a,b)}$$

et donc

$$\|u\|_{L^\infty(a,b)} \leq (b-a) \|u'\|_{L^\infty(a,b)}.$$

Cas : $1 < p < +\infty$. On trouve, en intégrant l'inégalité dans (i) que

$$|u(x)| \leq \int_a^b |u'| \leq \left(\int_a^b |u'|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b 1^{p'}\right)^{1/p'} = (b-a)^{1/p'} \|u'\|_{L^p(a,b)}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(a,b)} &= \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left((b-a)^{p/p'} \|u'\|_{L^p(a,b)}^p \int_a^b dx \right)^{1/p} = (b-a) \|u'\|_{L^p(a,b)} . \spadesuit\end{aligned}$$

Exercice 16.36 (i) Le résultat suit du lemme de Fatou car

$$\|u\|_{L^1} = \int |u| \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int |u_\nu| \leq \gamma.$$

(ii) Appelons

$$f_\nu = |u_\nu| - |u| - |u_\nu - u|$$

et observons que

$$|f_\nu| \leq |u| + (|u_\nu| - |u_\nu - u|) \leq 2|u|.$$

On peut donc appliquer le théorème de la convergence dominée (car $|f_\nu| \rightarrow 0$ p.p. et $u \in L^1$) pour déduire que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} [\|(|u_\nu| - |u| - |u_\nu - u|)\|_{L^1}] = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int |f_\nu| = 0.$$

Quatrième partie

Analyse de Fourier

Chapitre 17

Séries de Fourier

17.1 Introduction

Les **séries de Taylor** cherchent à représenter une fonction comme somme (infinie) de polynômes, par exemple

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in \mathbb{R}.$$

On sait que pour qu'il existe un développement de Taylor, il faut des hypothèses de régularité très fortes sur la fonction considérée.

Les **séries de Fourier** cherchent à représenter une fonction périodique comme somme (infinie) de sinus et cosinus. Plus précisément si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction périodique, c'est à dire qu'il existe $T > 0$ tel que

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

peut on l'écrire comme

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \right\}.$$

Noter que si c'est le cas, un calcul formel donnera (cf. plus loin) que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Par la suite on écrira le plus souvent le développement de Fourier sous sa forme complexe. Pour cela, à l'aide de la formule

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

on peut démontrer que la série s'écrit alors (cf. plus bas)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx.$$

17.2 Préliminaires

17.2.1 Quelques espaces fonctionnels

Les propositions suivantes sont élémentaires (cf. Exercices 17.1 et 17.2).

Proposition 17.1 *Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T -périodique et $f \in L^1(0, T)$, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f \in L^1(a, a+T)$ et*

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Proposition 17.2 *Soient $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $T > 0$, alors*

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{T} x\right) dx &= 0 \\ \frac{2}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{T} x\right) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases} \\ \frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{T} x\right) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n. \end{cases} \end{aligned}$$

On va maintenant rappeler les notions suivantes.

Définition 17.3 *On dit que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** si pour tout compact $[a, b]$, il existe*

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$$

tels que, $\forall i = 0, 1, \dots, n$, $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ est continue et

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a_i \\ x > a_i}} f(x) = f(a_i + 0) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a_{i+1} \\ x < a_{i+1}}} f(x) = f(a_{i+1} - 0)$$

existent et sont finies.

Définition 17.4 *Soient $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $0 < \alpha \leq 1$. On dit que f est **Hölder continue** avec exposant $\alpha \in]0, 1]$ (et on note $f \in C^{0,\alpha}([a, b])$), s'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que*

$$|f(x) - f(y)| \leq \gamma |x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [a, b].$$

*Si $\alpha = 1$, on dit aussi que f est **Lipschitz continue**.*

Remarque Par abus de notations, on écrira parfois, quand $\alpha = 0$, $C^0([a, b]) = C^{0,0}([a, b])$. ♠

Exemples (Exercice 17.4) (i) Soit $\alpha \in [0, 1]$, alors la fonction $f_\alpha(x) = x^\alpha$ est dans $C^{0,\alpha}([0, 1])$.

(ii) Par contre la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -1/\log x & \text{si } x \in]0, 1/2] \end{cases}$$

est continue, mais n'est pas Hölder continue. ♠

Proposition 17.5 (i) Soient $f, g \in C^{0,\alpha}([a, b])$, alors $f g \in C^{0,\alpha}([a, b])$.

(ii) Si $0 < \alpha < \beta < 1$, alors

$$C^1([a, b]) \subsetneq C^{0,1}([a, b]) \subsetneq C^{0,\beta}([a, b]) \subsetneq C^{0,\alpha}([a, b]) \subsetneq C^0([a, b]).$$

Démonstration Cf. Exercice 17.3. ■

17.2.2 Les noyaux de Dirichlet, Fejer et Poisson

Proposition 17.6 (Noyau de Dirichlet) Soient $N \in \mathbb{N}$ et

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{i n x}$$

alors

$$D_N(x) = \begin{cases} 2N+1 & \text{si } x = 2k\pi \\ \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})x]}{\sin[\frac{x}{2}]} & \text{si } x \neq 2k\pi \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{Z}$ et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1.$$

Démonstration (i) Si $x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a trivialement $D_N(2k\pi) = 2N+1$.

(ii) Supposons donc que $x \neq 2k\pi$. Comme

$$\sum_{n=0}^N e^{i n x} = \frac{1 - (e^{i x})^{N+1}}{1 - e^{i x}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^{-1} e^{i n x} &= \sum_{n=1}^N e^{-i n x} = -1 + \frac{1 - (e^{-i x})^{N+1}}{1 - e^{-i x}} = \frac{e^{-i x} - (e^{-i x})^{N+1}}{1 - e^{-i x}} \\ &= \frac{(e^{i x})^{-N} - 1}{1 - e^{i x}} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^N e^{inx} &= \frac{(e^{ix})^{-N} - (e^{ix})^{N+1}}{1 - e^{ix}} = \frac{-e^{\frac{ix}{2}} \left[(e^{ix})^{N+\frac{1}{2}} - (e^{-ix})^{N+\frac{1}{2}} \right]}{-e^{\frac{ix}{2}} \left[e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}} \right]} \\ &= \frac{(e^{ix})^{N+\frac{1}{2}} - (e^{-ix})^{N+\frac{1}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} = \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) x \right]}{\sin \left[\frac{x}{2} \right]}.\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

Ceci termine la démonstration. ■

Proposition 17.7 (Noyau de Fejer) Soient $N \in \mathbb{N}$ et

$$\Delta_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)$$

alors

$$\Delta_N(x) = \begin{cases} N & \text{si } x = 2k\pi \\ \frac{1}{N} \left[\frac{\sin \left[\frac{Nx}{2} \right]}{\sin \left[\frac{x}{2} \right]} \right]^2 = \frac{1 - \cos(Nx)}{N(1 - \cos x)} & \text{si } x \neq 2k\pi \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{Z}$ et

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(x) dx = 1.$$

De plus $\Delta_N \geq 0$ et pour tout $\delta \in]0, \pi]$

$$\sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} [\Delta_N(x)] \rightarrow 0, \quad \text{si } N \rightarrow \infty$$

(attention le résultat est faux si $\delta = 0$, car $\Delta_N(0) = N$).

Démonstration (i) Si $x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a $D_N(2k\pi) = 2N + 1$ et donc (c'est facile à voir par induction)

$$\Delta_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (2n+1) = \frac{N^2}{N} = N.$$

C'est clair pour $N = 1$. Supposons le montré pour N et montrons le pour $(N+1)$.

$$\begin{aligned}\Delta_{N+1}(x) &= \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N (2n+1) = \frac{1}{N+1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} (2n+1) + 2N+1 \right] \\ &= \frac{N^2 + 2N + 1}{N+1} = N+1.\end{aligned}$$

(ii) Supposons donc que $x \neq 2k\pi$. Comme

$$\begin{aligned} (e^{ix} - 1) D_n(x) &= (e^{ix} - 1) \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \sum_{k=-n}^n (e^{i(k+1)x} - e^{ikx}) \\ &= e^{i(n+1)x} - e^{-inx} \end{aligned}$$

on a

$$(e^{ix} - 1) \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{i(n+1)x} - e^{-inx}).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} & (e^{-ix} - 1) (e^{ix} - 1) \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) \\ &= (e^{-ix} - 1) \sum_{n=0}^{N-1} (e^{i(n+1)x} - e^{-inx}) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} [e^{inx} - e^{-i(n+1)x} + e^{-inx} - e^{i(n+1)x}] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} (e^{inx} - e^{i(n+1)x}) + \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-inx} - e^{-i(n+1)x}) \\ &= (1 - e^{iNx}) + (1 - e^{-iNx}) = 2(1 - \cos(Nx)). \end{aligned}$$

Enfin comme

$$(e^{-ix} - 1)(e^{ix} - 1) = 2 - e^{ix} - e^{-ix} = 2(1 - \cos x)$$

on a le résultat à savoir (en utilisant la formule $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos(2\theta)$)

$$\Delta_N(x) = \frac{1 - \cos(Nx)}{N(1 - \cos x)} = \frac{1}{N} \left[\frac{\sin[\frac{Nx}{2}]}{\sin[\frac{x}{2}]} \right]^2.$$

(iii) Par ailleurs par la proposition précédente on a (se rappeler que $D_0 \equiv 1$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 2\pi.$$

(iv) Le fait que $\Delta_N(x) \geq 0$ vient de (ii).

(v) Soit $\delta \in]0, \pi]$, alors $\cos x \leq \cos \delta$ pour tout $\delta \leq |x| \leq \pi$ et donc par (ii)

$$\sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} [\Delta_N(x)] \leq \frac{2}{N(1 - \cos \delta)} \rightarrow 0, \text{ si } N \rightarrow \infty.$$

Ceci termine la démonstration. ■

Proposition 17.8 (Noyau de Poisson) Soient $0 \leq r < 1$ et

$$P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{i n x}$$

alors

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos x + r^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = 1.$$

De plus $P_r \geq 0$ et pour tout $\delta \in]0, \pi]$

$$\sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} [P_r(x)] \rightarrow 0, \quad \text{si } r \rightarrow 1$$

(attention le résultat est faux si $\delta = 0$, car $P_r(0) = \frac{1+r}{1-r} \rightarrow \infty$, si $r \rightarrow 1$).

Démonstration Exercice 17.17. ■

17.3 Définitions et exemples

Définition 17.9 Soient $N \geq 1$ un entier et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique (i.e. $f(x+T) = f(x)$, $\forall x$) et $f \in L^1(0, T)$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

1) On appelle **série de Fourier partielle d'ordre N** de f et on note

$$F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \right\}.$$

2) On appelle **série de Fourier** de f la limite, quand elle existe, de $F_N f(x)$. On la note

$$Ff(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \right\}.$$

Remarques (i) Dans tout le reste du chapitre on préférera (mais c'est la même chose, au vu de la Proposition 17.1) considérer des intervalles plus symétriques et on choisira alors $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ au lieu de $[0, T]$ et on écrira les coefficients

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx$$

et de même pour les coefficients complexes (cf. la proposition ci-dessous)

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx.$$

(ii) On va faire un *calcul formel* pour montrer que si la série est bien définie, les coefficients doivent être comme ci dessus. Faisons le pour $T = 2\pi$. Si donc c'est vrai que la série converge vers la fonction on doit avoir

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \{a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)\}.$$

En multipliant par $\cos(nx)$ et en intégrant on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx &= \frac{a_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx \\ &+ \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{ \frac{a_m}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx \right. \\ &\left. + \frac{b_m}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx \right\}. \end{aligned}$$

Par la Proposition 17.2, on déduit que si $n = 0$, alors

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = a_0$$

et si $n \neq 0$, alors

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{a_n}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx = a_n$$

et idem pour les coefficients b_n . ♠

Il sera beaucoup plus pratique d'écrire les séries de Fourier sous forme complexe.

Proposition 17.10 (Série de Fourier complexe) Soit f et $F_N f$ comme dans la définition, alors

$$F_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx.$$

Démonstration Faisons pour simplifier la démonstration seulement dans le cas $T = 2\pi$. Il suffit de s'apercevoir que si $n > 0$

$$c_n = \frac{a_n - i b_n}{2}, \quad c_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{et} \quad c_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2}$$

et que

$$\begin{aligned} F_N f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \{a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{a_n - i b_n}{2} e^{i n x} + \frac{a_n + i b_n}{2} e^{-i n x} \right\}. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. ■

Voyons maintenant des exemples.

Exemple Trouver la série de Fourier de $f(x) = \cos x$ avec $T = 2\pi$.

Discussion On remarque immédiatement que, la fonction donnée étant paire, $b_n = 0, \forall n$. De même on observe que $a_n = 0, \forall n \neq 1$ et que

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \cos x \, dx = 1.$$

Par conséquent

$$F_0 f = 0, \quad F_1 f = \cos x, \quad F_N f = F_1 f = F f = \cos x, \quad \forall N. \quad \spadesuit$$

Exemple Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \pi[\\ 0 & \text{si } x \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

et étendue par 2π périodicité à \mathbb{R} . Trouver la série de Fourier de f , comparer Ff et f .

Discussion On détermine tout d'abord les coefficients de Fourier. On trouve

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dx = 1 \quad \text{et} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi = 0, \quad \forall n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(nx) \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi = \frac{1}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

et donc

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On obtient (par anticipation) ainsi

$$Ff(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x \in]\pi, 2\pi[\\ 1/2 & \text{si } x = 0, \pi, 2\pi \end{cases}$$

et en particulier, si $x = \pi/2$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}. \quad \spadesuit$$

Convention : A partir de maintenant pour simplifier on prendra toujours $T = 2\pi$ et donc (en se rappelant de la Proposition 17.1)

$$F_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i n x} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i n x} dx. \quad \spadesuit$$

On a le résultat suivant qui lie les sommes partielles de Fourier et le noyau de Dirichlet.

Proposition 17.11 Soient $N \geq 1$ un entier et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique et $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Si

$$F_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i n x} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i n x} dx,$$

alors

$$F_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y) f(y) dy.$$

De plus

$$F_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) f(x-y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) f(x+y) dy.$$

Remarque En utilisant les notations de l'Exercice 17.13, on peut écrire

$$F_N f = D_N * f$$

où pour $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$ des fonctions 2π -périodiques on écrit

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) dt. \quad \spadesuit$$

Démonstration (i) On a, par définition du noyau de Dirichlet (cf. Proposition 17.6),

$$\begin{aligned} F_N f(x) &= \sum_{n=-N}^N \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-i n y} dy \right] e^{i n x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N f(y) e^{i n(x-y)} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y) f(y) dy. \end{aligned}$$

(ii) Par ailleurs, un changement de variable $z = x - y$, la 2π périodicité de f et le fait que si $x \neq 0$ (trivialement si $x = 0$)

$$D_N(x + 2\pi) = \frac{\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)(x + 2\pi)\right]}{\sin\left[\frac{x + 2\pi}{2}\right]} = \frac{-\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right]}{-\sin\left[\frac{x}{2}\right]} = D_N(x),$$

nous conduit à

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x - y) f(y) dy &= - \int_{x+\pi}^{x-\pi} D_N(z) f(x - z) dz = - \int_{\pi}^{-\pi} D_N(z) f(x - z) dz \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_N(z) f(x - z) dz. \end{aligned}$$

(iii) Enfin un changement de variable $z = -y$, utilisant le fait que $D_N(-z) = D_N(z)$, conduit à

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) f(x - y) dy = - \int_{\pi}^{-\pi} D_N(-z) f(x + z) dz = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(z) f(x + z) dz.$$

Ceci termine la démonstration. ■

17.4 Moyennes de Cesaro et Théorème de Fejer

Définition 17.12 Soient $N \geq 1$ un entier et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique et $f \in L^1(-\pi, \pi)$. La **moyenne de Cesaro** (de la série de Fourier) est définie comme

$$\Phi_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n f(x).$$

Commençons par une proposition élémentaire.

Proposition 17.13 Soient $N \geq 1$ un entier et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique et $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi_N f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(x - y) f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(y) f(x - y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(y) f(x + y) dy \end{aligned}$$

où Δ_N est le noyau de Fejer.

Remarque En utilisant les notations de l'Exercice 17.13, on peut écrire

$$\Phi_N f = \Delta_N * f. \spadesuit$$

Démonstration (i) On a, par définition du noyau de Fejer (cf. Proposition 17.7) et par la proposition précédente (cf. Proposition 17.11),

$$\begin{aligned}\Phi_N f(x) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x-y) f(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(x-y) f(y) dy.\end{aligned}$$

(ii) Par ailleurs, un changement de variable $z = x-y$, utilisant la 2π -périodicité de f et de

$$\Delta_N(x) = \begin{cases} N & \text{si } x = 2k\pi \\ \frac{1}{N} \left[\frac{\sin\left[\frac{Nx}{2}\right]}{\sin\left[\frac{x}{2}\right]} \right]^2 = \frac{1-\cos(Nx)}{N(1-\cos x)} & \text{si } x \neq 2k\pi \end{cases}$$

nous conduit à

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(x-y) f(y) dy &= - \int_{x+\pi}^{x-\pi} \Delta_N(z) f(x-z) dz = - \int_{\pi}^{-\pi} \Delta_N(z) f(x-z) dz \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(z) f(x-z) dz.\end{aligned}$$

(iii) Enfin un changement de variable $z = -y$, utilisant le fait que $\Delta_N(-z) = \Delta_N(z)$, conduit à

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(y) f(x-y) dy = - \int_{\pi}^{-\pi} \Delta_N(-z) f(x+z) dz = \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(z) f(x+z) dz.$$

C'est l'assertion souhaitée. ■

On a maintenant le premier grand résultat sur la convergence des séries de Fourier.

Théorème 17.14 (Théorème de Fejer) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique.

(i) Si f est continue, alors la moyenne de Cesaro $\Phi_N f$ converge uniformément vers f .

(ii) Si $f \in L^1(-\pi, \pi)$, $f(a+0)$ et $f(a-0)$ existent et sont finies, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N f(a) = \frac{1}{2} [f(a+0) + f(a-0)]$$

et donc en particulier si f est continue en a , alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N f(a) = f(a).$$

Démonstration (i) Par les propriétés du noyau de Fejer (cf. Propositions 17.7 et 17.13) on a $\Delta_N \geq 0$ et pour tout $\delta \in]0, \pi]$

$$\sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} [\Delta_N(x)] \rightarrow 0 \quad \text{si } N \rightarrow \infty,$$

$$\Phi_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(y) f(x-y) dy \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(y) dy = 2\pi.$$

On a ainsi

$$|\Phi_N f(x) - f(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(y) [f(x-y) - f(x)] dy \right| \leq I_\delta + J_\delta$$

où

$$I_\delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \Delta_N(y) |f(x-y) - f(x)| dy$$

et

$$J_\delta = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} \Delta_N(y) |f(x-y) - f(x)| dy.$$

Fixons nous donc $\epsilon > 0$ arbitraire. Comme f est continue, on a qu'il existe $M, \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tels que, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$[|y| \leq \delta \Rightarrow |f(x-y) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}] \quad \text{et} \quad [|f(x)| \leq M].$$

Par ailleurs pour ce choix de δ on peut trouver N suffisamment grand pour que, pour tout $\delta \leq |x| \leq \pi$,

$$0 \leq \Delta_N(x) \leq \frac{\epsilon}{4M}.$$

On a ainsi

$$I_\delta \leq \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \Delta_N(y) dy \leq \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(y) dy = \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$J_\delta \leq \frac{1}{2\pi} 2M \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} \Delta_N(y) dy \leq 2M \frac{\epsilon}{4M} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} dy \right] \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

En regroupant les deux inégalités on a bien, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$|\Phi_N f(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

(ii) La démonstration est quasiment identique. Posons

$$l = \frac{1}{2} [f(a+0) + f(a-0)].$$

On trouve ainsi (cf. Proposition 17.13) que

$$\Phi_N f(a) - l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(y) \left[\frac{f(a-y) + f(a+y)}{2} - l \right] dy.$$

Si on pose

$$I_\delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \Delta_N(y) \left| \frac{f(a-y) + f(a+y)}{2} - l \right| dy$$

$$J_\delta = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} \Delta_N(y) \left| \frac{f(a-y) + f(a+y)}{2} - l \right| dy,$$

on a

$$|\Phi_N f(a) - l| \leq I_\delta + J_\delta.$$

- Fixons nous donc $\epsilon > 0$ arbitraire. Comme

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left| \frac{f(a-y) + f(a+y)}{2} - l \right| = 0$$

il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que

$$|y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{f(a-y) + f(a+y)}{2} - l \right| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On a ainsi que

$$I_\delta \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Delta_N(y) dy \leq \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(y) dy = \frac{\epsilon}{2}.$$

- Notons

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|.$$

On choisit ensuite N suffisamment grand pour que

$$\sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} [\Delta_N(x)] \leq \frac{\epsilon}{2(|l| + M)}.$$

On déduit (en utilisant la 2π périodicité de f) que

$$\begin{aligned} J_\delta &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} [\Delta_N(x)] \left[2\pi |l| + \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} \left| \frac{f(a-y) + f(a+y)}{2} \right| dy \right] \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{2(|l| + M)} \left[2\pi |l| + \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| dy \right] \leq \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

En regroupant les deux inégalités on a bien

$$|\Phi_N f(a) - l| \leq \epsilon.$$

Ceci termine la démonstration. ■

Corollaire 17.15 *Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, 2π -périodiques et ont les mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales partout.*

Démonstration En remplaçant f par $f - g$, on peut supposer sans perte de généralité que $g \equiv 0$. Les coefficients de Fourier sont donc identiquement 0 et donc, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f(a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N f(a) = 0.$$

Ceci est l'assertion souhaitée. ■

Remarque Le résultat est même plus général et assure que si $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$ et sont 2π -périodiques et ont les mêmes coefficients de Fourier, alors $f = g$ p.p. ♠

17.5 Convergence ponctuelle des séries de Fourier

Théorème 17.16 Soient $\alpha \in]0, 1]$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique et $L^1(-\pi, \pi)$.

(i) Si $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$, alors la série de Fourier $F_N f(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Si pour un $a \in [-\pi, \pi]$, il existe $M = M(a) > 0$ et $\delta = \delta(a) > 0$ tel que

$$|f(a+t) - f(a+0)| + |f(a-t) - f(a-0)| \leq M t^\alpha, \quad \forall 0 < t \leq \delta$$

alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N f(a) = \frac{1}{2} [f(a+0) + f(a-0)].$$

Remarques (i) Le théorème est essentiellement (mais pas sous cette forme) dû à Dirichlet et il est faux si f est seulement continue.

(ii) Si f est dérivable en a , alors comme

$$f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+t) - f(a)}{t} \right]$$

on a que les hypothèses de (ii) du Théorème (avec évidemment $f(a+0) = f(a-0) = f(a)$) sont satisfaites et donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N f(a) = f(a).$$

En effet on a qu'il existe $\delta > 0$ suffisamment petit et $M > |f'(a)|$ tel que

$$|f(a+t) - f(a)| \leq M |t|, \quad \forall |t| \leq \delta.$$

(iii) On peut affaiblir l'hypothèse de continuité au sens de Hölder et la remplacer par le critère de **Dini** à savoir que : s'il existe $\delta \in]0, \pi]$ $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_0^\delta \frac{|f(a-y) + f(a+y) - 2f(a)|}{|y|} dy < \infty$$

alors $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N f(a) = f(a)$. Une fonction Hölder continue vérifie évidemment cela. En effet

$$|f(a-y) - f(a)| + |f(a+y) - f(a)| \leq M|y|^\alpha$$

et donc

$$\int_0^\pi \frac{|f(a-y) + f(a+y) - 2f(a)|}{|y|} dy \leq M \int_0^\pi |y|^{\alpha-1} dy = M \frac{|\pi|^\alpha}{\alpha} < \infty.$$

(iv) Si $f \in L^1(-\pi, \pi)$ est 2π périodique, alors il se peut que la série de Fourier diverge partout (cf. un exemple dû à Kolmogorov). Par contre si $f \in L^p(-\pi, \pi)$, avec $p > 1$, la série de Fourier va converger vers la fonction en presque tous les points (si $p = 2$ c'est le fameux résultat de Carleson, qui a été généralisé au cas $p > 1$ par Hunt). ♠

Démonstration (i) On a vu (cf. Proposition 17.11) que

$$F_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi D_N(y) f(x+y) dy \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^\pi D_N(x) dx = 2\pi.$$

On trouve donc (cf. Proposition 17.6)

$$F_N f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})y]}{\sin[\frac{y}{2}]} [f(x+y) - f(x)] dy. \quad (17.1)$$

Noter que comme f est Hölder continue la fonction

$$\varphi_x(y) = \frac{f(x+y) - f(x)}{\sin[\frac{y}{2}]}$$

(ceci est valable si $y \neq 0$, si $y = 0$ on la définit arbitrairement) est telle que $\varphi_x \in L^1(-\pi, \pi)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet

$$|\varphi_x(y)| \leq \frac{\gamma |y|^\alpha}{|\sin[\frac{y}{2}]|}$$

et le membre de droite est intégrable. En effet (on voit ci dessous l'importance du fait que $\alpha > 0$)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi \frac{|y|^\alpha}{|\sin[\frac{y}{2}]|} dy &= 2 \int_0^\pi \frac{y^\alpha}{\sin[\frac{y}{2}]} dy = 2 \int_0^\pi \frac{y}{\sin[\frac{y}{2}]} y^{\alpha-1} dy \\ &\leq c \int_0^\pi y^{\alpha-1} dy = c \pi^\alpha < \infty \end{aligned}$$

où $c > 0$ est une constante (car $y/\sin[y/2]$ est borné sur $[0, \pi]$).

En revenant à (17.1), on a donc que

$$F_N f(x) - f(x) = \int_{-\pi}^\pi \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})y]}{2\pi} \varphi_x(y) dy$$

avec $\varphi_x \in L^1(-\pi, \pi)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le lemme de Riemann-Lebesgue implique immédiatement que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [F_N f(x) - f(x)] = 0$$

qui est le résultat souhaité.

(ii) Ceci se démontre de manière analogue à la partie (ii) du Théorème de Fejer et à la partie ci dessus de la démonstration et nous ne rentrons pas dans les détails. ■

17.6 Convergence L^2 des séries de Fourier

Notation (i) Pour $u, v : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $|u|, |v| \in L^2(-\pi, \pi)$ on note (se rappeler que $|u|^2 = u \bar{u}$)

$$\langle u; v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \overline{v(x)} dx$$

$$\|u\| = [\langle u; u \rangle]^{1/2} = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

(ii) On définit

$$l^2 = \left\{ u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}, u_n \in \mathbb{C} \text{ tel que } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2 < \infty \right\}.$$

Le produit scalaire et la norme sur l^2 sont définis par

$$\langle u; v \rangle_{l^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \bar{v}_n \quad \text{et} \quad \|u\|_{l^2}^2 = \langle u; u \rangle_{l^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u_n|^2. \quad \spadesuit$$

Théorème 17.17 Si $f \in L^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|F_N f - f\| = 0.$$

De plus l'identité de Parseval a lieu

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

où c_n sont les coefficients (complexes) de Fourier.

Remarques (i) La première partie du théorème montre que $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ forme une "base" orthonormée de $L^2(-\pi, \pi; \mathbb{C})$.

- On rappelle (cf., par exemple, Brézis [3] page 86) qu'une base d'un espace de Hilbert H est une suite d'éléments $\{e_n\} \subset H$ orthonormés (i.e $|e_n| = 1$ et $\langle e_n; e_m \rangle = 0$ si $n \neq m$) telle que l'espace vectoriel engendré par les $\{e_n\}$ est dense dans H .

- Au niveau algébrique, on dit que $\{e_n\} \subset H$ forme une base si tout élément de H s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire *finie* d'éléments de $\{e_n\}$.

(ii) L'identité de Parseval montre que

$$\|f\|^2 = \|F(f)\|_{l^2}^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

et donc on peut voir la transformation F comme $F : L^2 \rightarrow l^2$ qui a une fonction $f \in L^2$ associe les coefficients de sa série de Fourier $F(f)$. Cette transformation préserve la norme.

(iii) L'identité de Parseval est en fait plus précise (mais la démonstration est quasi identique à celle donnée ci après) et dit que si $f, g \in L^2]-\pi, \pi[; \mathbb{C}$ et si c_n, d_n sont les coefficients de Fourier de f et g respectivement, alors

$$\langle f; g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \langle F(f); F(g) \rangle_{l^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \bar{d}_n. \quad \spadesuit$$

Avant de faire la démonstration on a besoin d'un résultat préliminaire.

Lemme 17.18 Soient $f \in L^2]-\pi, \pi[; \mathbb{C}$ et

$$F_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i n x} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i n x} dx$$

sa série de Fourier. Soient $a_n \in \mathbb{C}$ (quelconques) et

$$A_N(x) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{i n x}.$$

Alors

$$\|f - A_N\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=-N}^N [a_n \bar{c}_n + \bar{a}_n c_n] + \sum_{n=-N}^N |a_n|^2.$$

En particulier

$$\|f - F_N f\| \leq \|f - A_N\| \quad \text{et} \quad \|f\|^2 = \|f - F_N f\|^2 + \sum_{n=-N}^N |c_n|^2.$$

Remarques (i) Du lemme on déduit immédiatement que

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=-N}^N |c_n|^2$$

et donc par un passage à la limite (car la suite est monotone et bornée) on obtient

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|^2$$

qui est connue comme l'**Inégalité de Bessel** (et qui évidemment est beaucoup plus faible que l'identité de Parseval).

(ii) On voit aussi que l'inégalité

$$\|f - F_N f\| \leq \|f - A_N\|$$

dit que l'approximation de Fourier est la meilleure possible parmi toutes les approximations trigonométriques. En particulier l'approximation de Fejer (qui est une approximation trigonométrique) est moins bonne que celle de Fourier, plus précisément

$$\|f - F_N f\| \leq \|f - \Phi_N f\|. \spadesuit$$

Démonstration *Etape 1.* On commence par observer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-N}^N a_n e^{i n x} \right] \left[\sum_{n=-N}^N \bar{a}_n e^{-i n x} \right] dx = \sum_{n=-N}^N |a_n|^2.$$

En effet, comme

$$\left[\sum_{n=-N}^N a_n e^{i n x} \right] \left[\sum_{m=-N}^N \bar{a}_m e^{-i m x} \right] = \sum_{n,m=-N}^N a_n \bar{a}_m e^{i(n-m)x}$$

on a, après intégration, que tous les termes sont nuls sauf ceux où $n = m$ et ainsi on a le résultat.

Etape 2. On a donc

$$\begin{aligned} \|f - A_N\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f - \sum_{n=-N}^N a_n e^{i n x} \right] \left[\bar{f} - \sum_{n=-N}^N \bar{a}_n e^{-i n x} \right] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 - \sum_{n=-N}^N \frac{a_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f} e^{i n x} - \sum_{n=-N}^N \frac{\bar{a}_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f e^{-i n x} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-N}^N a_n e^{i n x} \right] \left[\sum_{n=-N}^N \bar{a}_n e^{-i n x} \right] dx. \end{aligned}$$

Notons que si c_n sont les coefficients de Fourier de f , c'est à dire

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i n x} dx$$

alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) e^{i n x} dx = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i n x} dx} = \bar{c}_n.$$

Par l'Étape 1 et par la définition des coefficients de Fourier, on trouve donc

$$\|f - A_N\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=-N}^N [a_n \bar{c}_n + \bar{a}_n c_n] + \sum_{n=-N}^N |a_n|^2$$

comme souhaité.

Étape 3. En choisissant dans l'identité ci dessus $a_n = c_n$, on a immédiatement que

$$\|f - F_N f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2.$$

L'inégalité $\|f - F_N f\| \leq \|f - A_N\|$ se déduit donc de l'inégalité

$$|a_n|^2 - [a_n \bar{c}_n + \bar{a}_n c_n] + |c_n|^2 = |a_n - c_n|^2 \geq 0.$$

Ceci termine la démonstration. ■

Tournons nous maintenant vers la preuve du théorème.

Démonstration On va supposer ici que f est à valeur réelle, mais ce n'est pas essentiel dans la démonstration.

Étape 1. Commençons par un cas particulier. Soient $\epsilon > 0$ arbitraire et $f \in C^0(\mathbb{R})$ et 2π -périodique (et donc en particulier $f \in L^2(-\pi, \pi)$). Par le lemme précédent (et la remarque qui suit)

$$\|f - F_N f\| \leq \|f - \Phi_N f\|.$$

Or, par le Théorème de Fejer, on peut trouver $N = N(\epsilon)$ assez grand pour que, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$|\Phi_N f(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

On a ainsi

$$\|f - F_N f\| \leq \|f - \Phi_N f\| = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Phi_N f(x) - f(x)|^2 dx \right]^{1/2} \leq \epsilon.$$

Étape 2. Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. Comme $f \in L^2(-\pi, \pi)$, il existe (cf. Théorème 16.29) une fonction $g \in C_0^\infty(-\pi, \pi)$ (et donc en particulier g peut être étendue de manière 2π -périodique et $C^0(\mathbb{R})$) telle que

$$\|f - g\| \leq \epsilon/2.$$

Ayant fixé g , on peut trouver, par l'Étape 1, $N_0 = N_0(\epsilon)$ tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$\|g - F_N g\| \leq \epsilon/2.$$

Comme par le lemme précédent

$$\|f - F_N f\| \leq \|f - F_N g\|$$

et que, trivialement (la norme $\|\cdot\|$ est à un facteur multiplicatif la norme L^2),

$$\|f - F_N g\| \leq \|f - g\| + \|g - F_N g\|$$

on déduit le résultat.

Etape 3. Il reste à montrer l'identité de Parseval. Mais ceci est une conséquence directe du lemme précédent et de l'Etape 2 ci dessus. En effet

$$\|f - F_N f\|^2 + \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2$$

et on vient de montrer que

$$\|f - F_N f\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

On a ainsi prouvé le théorème. ■

17.7 Convergence uniforme des séries de Fourier

Soit

$$F_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i n x} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i n x} dx.$$

Théorème 17.19 *Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ et 2π -périodique. Alors $\sum |c_n|$ et $\sum n^2 |c_n|^2$ convergent et $F_N f$ converge uniformément vers f .*

Remarque En fait le résultat est valable sous l'hypothèse plus faible $f \in W^{1,2}(-\pi, \pi)$ (l'espace de Sobolev) et 2π -périodique. Nous ne rentrons pas dans la définition exacte de tels espaces mais disons rapidement que :

- $f \in W^{1,2}(-\pi, \pi)$ veut dire que $f, f' \in L^2(-\pi, \pi)$. La notion de dérivée f' est comprise au sens suivant : il existe $g \in L^2(-\pi, \pi)$ tel que, pour tout $\psi \in C_0^\infty(-\pi, \pi)$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x) \psi(x) dx = - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \psi'(x) dx;$$

on identifie alors g et f' .

- On montre alors que, pour tous $-\pi \leq x \leq y \leq \pi$,

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt.$$

Il suit de ceci que $f \in C^{0,1/2}([-\pi, \pi])$ car, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (= Hölder),

$$|f(y) - f(x)| \leq \int_x^y |f'(t)| dt \leq \left[\int_x^y |f'|^2 dt \right]^{1/2} \left[\int_x^y 1^2 dt \right]^{1/2} \leq \|f'\|_{L^2} |y - x|^{1/2}.$$

Une fois établi ceci la démonstration est exactement celle ci-dessous. ♠

Démonstration *Etape 1.* On a facilement, en intégrant par parties et en utilisant la 2π -périodicité de f , que les coefficients de Fourier c'_n de f' sont donnés par

$$\begin{aligned} c'_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-in x} dx = \left[\frac{f(x) e^{-in x}}{2\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-in x} dx \\ &= in c_n. \end{aligned}$$

Par la formule de Parseval on déduit

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c'_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n|^2$$

et donc $\sum n^2 |c_n|^2$ converge. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on déduit que $\sum |c_n|$ converge, car

$$\sum_{|n| \geq N+1} |c_n| = \sum_{|n| \geq N+1} \frac{1}{|n|} |c'_n| \leq \left[\sum_{|n| \geq N+1} \frac{1}{n^2} \right]^{1/2} \left[\sum_{|n| \geq N+1} |c'_n|^2 \right]^{1/2}.$$

Etape 2. Comme $f \in C^1(\mathbb{R})$, on a, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, par le théorème de la convergence ponctuelle (cf. Théorème 17.16) ou par l'Exercice 17.15 que

$$|F_N f(x) - f(x)| = \left| \sum_{|n| \geq N+1} c_n e^{in x} \right| \leq \sum_{|n| \geq N+1} |c_n|.$$

L'Etape 1 donne alors immédiatement la convergence uniforme de $F_N f$ vers f .

■

Le théorème peut être très nettement amélioré (voir Théorème 6.3 page 33 de [18] ou Exercice 16 du Chapitre 3 [23]).

Théorème 17.20 (Théorème de Bernstein) Soient $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ et 2π -périodique. Alors $\sum |c_n|$ converge et $F_N f$ converge uniformément vers f .

Remarque Le théorème est optimal. En effet il existe des fonctions $f \in C^{0,1/2}$ telle que $\sum |c_n|$ diverge. Un exemple classique dû à Hardy et Littlewood est

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in \log n}}{n} e^{in x}. \quad \spadesuit$$

Démonstration Comme $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$, on a, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, par le théorème de la convergence ponctuelle (cf. Théorème 17.16) ou par l'Exercice 17.15 que

$$|F_N f(x) - f(x)| = \left| \sum_{|n| \geq N+1} c_n e^{i n x} \right| \leq \sum_{|n| \geq N+1} |c_n|.$$

Il suffit donc de montrer que $\sum |c_n|$ converge.

Etape 1. Par le Théorème 17.16 on peut écrire

$$f(x) - f_h(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-i n h}) c_n e^{i n x} \quad \text{où} \quad f_h(x) = f(x - h).$$

On observe ensuite que si on choisit $h = \frac{2\pi}{3 \cdot 2^m}$ et si $2^m \leq |n| < 2^{m+1}$, alors

$$|1 - e^{-i n h}|^2 = (1 - \cos(nh))^2 + \sin^2(nh) = 2 - 2 \cos(nh) \geq 2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3.$$

On déduit donc, de l'identité de Parseval appliquée à $f - f_h$ (cf. Théorème 17.17) que

$$\begin{aligned} \sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |c_n|^2 &\leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|1 - e^{-i n h}|^2}{3} |c_n|^2 = \frac{\|f - f_h\|^2}{3} = \frac{1}{3} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f - f_h|^2 \\ &\leq \frac{1}{3} \|f - f_h\|_{L^\infty}^2. \end{aligned}$$

En combinant les deux inégalités ci-dessus on déduit (se rappeler que $h = \frac{2\pi}{3 \cdot 2^m}$) que

$$\sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |c_n|^2 \leq \frac{\gamma^2}{3} \left(\frac{2\pi}{3 \cdot 2^m} \right)^{2\alpha} \quad (17.2)$$

où γ est la constante telle que

$$|f(x) - f(x - h)| \leq \gamma |h|^\alpha, \quad \forall x, h \in \mathbb{R}$$

et donc

$$\|f - f_h\|_{L^\infty} \leq \gamma |h|^\alpha.$$

Etape 2. Comme dans (17.2) il y a au plus 2^{m+1} termes, on infère, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que

$$\sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |c_n| \leq \left[\sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} 1 \right]^{1/2} \left[\sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |c_n|^2 \right]^{1/2} \leq 2^{\frac{m+1}{2}} \frac{\gamma}{\sqrt{3}} \left(\frac{2\pi}{3 \cdot 2^m} \right)^\alpha$$

et donc

$$\sum_{2^m \leq |n| < 2^{m+1}} |c_n| \leq \frac{\gamma \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(\frac{2\pi}{3} \right)^\alpha 2^{\frac{m(1-2\alpha)}{2}}.$$

Comme $|c_0| \leq \|f\|_{L^\infty}$, on peut sommer l'inégalité ci-dessus pour $m \geq 0$, en se rappelant que $\alpha > 1/2$, et on a bien obtenu le résultat souhaité, à savoir que $\sum |c_n|$ converge. ■

17.8 Quelques propriétés supplémentaires

Les résultats suivants sont déduits immédiatement des résultats précédents (cf. Exercice 17.14). Soit

$$F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \right\} = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x}$$

où

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) dx$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx.$$

Théorème 17.21 Soit $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ avec $\alpha \in]0, 1]$, une fonction T -périodique.

(i) La série de Fourier $F_N f(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Si f est paire (i.e. $f(x) = f(-x)$), alors $b_n = 0$ et

$$Ff(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right).$$

(iii) Si f est impaire (i.e. $f(x) = -f(-x)$), alors $a_n = 0$ et

$$Ff(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right).$$

(iv) Si de plus $f' \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$, alors on peut différentier terme à terme la série de Fourier, c'est à dire

$$f'(x) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ n b_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) - n a_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \right\}$$

où en notations complexes

$$f'(x) = \frac{2\pi i}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x}.$$

(v) Pour tout $x_0, x \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ on a

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{x_0}^x \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right\} dt.$$

(vi) **Identité de Parseval** (valable sous la seule hypothèse $f \in L^2(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$)

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f(x))^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2.$$

Remarques (i) On a comme d'habitude que si $f \in L^1(-T, T)$ et pour un certain $a \in]-T, T[$, il existe $M = M(a) > 0$ et $\delta = \delta(a) > 0$ tel que

$$|f(a+t) - f(a+0)| + |f(a-t) - f(a-0)| \leq M t^\alpha, \quad \forall 0 < t \leq \delta$$

alors $f(a+0)$ et $f(a-0)$ existent)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_N f(a) = \frac{1}{2} [f(a+0) + f(a-0)].$$

(ii) Si la dérivée est seulement Hölder continue en un point $x \in]-T, T[$, on a, comme d'habitude,

$$\frac{f'(x+0) + f'(x-0)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\pi n}{T} \left\{ b_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) - a_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} x\right) \right\}. \spadesuit$$

Proposition 17.22 (Série de Fourier en cosinus) Soit $f \in C^{0,\alpha}([0, L])$ avec $\alpha \in]0, 1]$. Alors pour tout $x \in [0, L]$

$$f(x) = F_c f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} x\right),$$

où

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \cos\left(\frac{\pi n}{L} y\right) dy.$$

Démonstration Il suffit de définir

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, L] \\ f(-x) & \text{si } x \in [-L, 0[\end{cases}$$

puis par $2L$ -périodicité. Noter qu'alors $\tilde{f} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ et on applique alors le théorème de la convergence ponctuelle. ■

Proposition 17.23 (Série de Fourier en sinus) Soit $f \in C^{0,\alpha}([0, L])$ avec $\alpha \in]0, 1]$. Alors pour tout $x \in]0, L[$

$$f(x) = F_s f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right)$$

où

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{\pi n}{L} y\right) dy.$$

Si de plus $f(0) = f(L) = 0$, la convergence a aussi, trivialement, lieu en $x = 0, L$.

Démonstration Il suffit de définir

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, L] \\ -f(-x) & \text{si } x \in [-L, 0[\end{cases}$$

puis par $2L$ -périodicité. Noter qu'alors $\tilde{f} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ (car $f(0) = f(L) = 0$) et on applique alors le théorème de la convergence ponctuelle. ■

17.9 Applications

17.9.1 L'inégalité isopérimétrique

On va commencer par une inégalité, qui est en fait équivalente à l'inégalité isopérimétrique.

Théorème 17.24 (Inégalité de Wirtinger) Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ une fonction 2π -périodique et telle que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f')^2 \geq \int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

De plus l'égalité a lieu si et seulement si $f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$, pour n'importe quels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Remarque En fait on peut réécrire l'inégalité pour une fonction $2T$ -périodique, C^1 et de moyenne nulle comme

$$\int_{-T}^T (f')^2 dx \geq \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \int_{-T}^T f^2 dx. \spadesuit$$

Démonstration La démonstration suit immédiatement de l'identité de Parseval appliquée à f et f' . En effet, comme $f \in C^1$ on trouve par le théorème sur la convergence ponctuelle (cf. Théorème 17.16) que

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in x} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-in x} dx.$$

De plus comme la moyenne de f est nulle on a que $c_0 = 0$. Et donc par Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n \neq 0} |c_n|^2$$

De même pour la dérivée on a que ses coefficients de Fourier sont inc_n et donc par Parseval (car $f' \in C^0$ et donc $f' \in L^2$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n \neq 0} n^2 |c_n|^2.$$

Le résultat suit immédiatement en comparant les deux identités. Par ailleurs on s'aperçoit qu'on a égalité si et seulement si $c_n = 0$ pour tous les $n \geq 2$. On obtient ainsi qu'il y a égalité si et seulement si

$$f(x) = c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} = (c_1 + c_{-1}) \cos x + i(c_1 - c_{-1}) \sin x.$$

Par ailleurs on observe que

$$\alpha = c_1 + c_{-1} \quad \text{et} \quad \beta = i(c_1 - c_{-1})$$

sont tous les deux réels. Le théorème est ainsi démontré. ■

Corollaire 17.25 Soient f et g deux fonctions 2π -périodiques et C^1 . Alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left((f')^2 + (g')^2 \right) dx \geq 2 \int_{-\pi}^{\pi} f g' dx.$$

De plus l'égalité a lieu si et seulement s'il existe des constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que

$$f - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f = \alpha \cos x + \beta \sin x \quad \text{et} \quad g - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g = \alpha \sin x - \beta \cos x.$$

Remarque Si on pose

$$r_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f, \quad r_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g \quad \text{et} \quad (r_3)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

on trouve que si l'égalité a lieu, alors

$$(f(x) - r_1)^2 + (g(x) - r_2)^2 = (r_3)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Démonstration (i) Soient

$$r_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f, \quad r_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g, \quad u = f - r_1, \quad v = g - r_2.$$

On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} u = \int_{-\pi}^{\pi} v = 0$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left((f')^2 + (g')^2 \right) = \int_{-\pi}^{\pi} \left((u')^2 + (v')^2 \right) \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f g' = \int_{-\pi}^{\pi} u v'.$$

On écrit alors l'inégalité sous une forme équivalente

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \left((f')^2 + (g')^2 - 2 f g' \right) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left((u')^2 + (v')^2 - 2 u v' \right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (v' - u)^2 + \int_{-\pi}^{\pi} \left((u')^2 - u^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

De l'inégalité de Wirtinger on obtient que l'inégalité est vraie, puisque somme de deux termes positifs.

(ii) Discutons maintenant le cas de l'égalité. On trouve immédiatement que tous les deux termes doivent être nuls, c'est à dire

$$v' = u \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \left((u')^2 - u^2 \right) = 0.$$

Mais du cas d'égalité dans Wirtinger, on a

$$u(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x \quad \text{et} \quad v(x) = \alpha \sin x - \beta \cos x$$

et donc comme on avait $u = f - r_1$ et $v = g - r_2$, on déduit que

$$f - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f = \alpha \cos x + \beta \sin x \quad \text{et} \quad g - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g = \alpha \sin x - \beta \cos x$$

comme annoncé. ■

Tournons nous maintenant vers l'inégalité isopérimétrique. Enonçons là tout d'abord de façon informelle. Si $A \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné dont le bord ∂A est suffisamment régulier, alors

$$[\text{long}(\partial A)]^2 - 4\pi \text{mes}(A) \geq 0.$$

De plus l'égalité a lieu si et seulement si A est un disque (c'est à dire ∂A est un cercle). Il s'agit là d'un des problèmes les plus vieux des mathématiques. Une variante de cette inégalité est connue comme le problème de la reine Didon. Des démonstrations plus ou moins rigoureuses sont dues à Zénodore, Archimède ou Pappus. Plus près de nous, nous avons des contributions de : Euler, Galilée, Legendre, L'Huilier, Riccati ou Simpson et particulièrement de Steiner (notion de symétrisation). La première démonstration vraiment rigoureuse est due à Weierstrass. Puis d'autres preuves ont été élaborées par Blaschke, Bonnesen, Carathéodory, Edler, Frobenius, Hurwitz, Lebesgue, Liebmann, Minkowski, H.A. Schwarz, Sturm et Tonelli parmi d'autres. Nous suivons ici celle de Hurwitz.

Théorème 17.26 (Inégalité isopérimétrique) *Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe simple fermée régulière. Alors*

$$[\text{long}(\Gamma)]^2 - 4\pi \text{mes}(\text{int } \Gamma) \geq 0.$$

De plus l'égalité a lieu si et seulement si Γ est un cercle.

Remarque (i) En fait sans presque aucune modification la démonstration est valable pour une courbe simple fermée seulement C^1 *par morceaux*. Par contre elle devient plus difficile pour des courbes simples fermées plus générales.

(ii) Pour plus de détails sur l'inégalité isopérimétrique et sa généralisation à \mathbb{R}^n on peut se référer au Chapitre 6 de [8]. ♠

Démonstration *Etape 1.* On rappelle que si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$, $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, est une paramétrisation régulière de la courbe Γ , alors

$$(u')^2(t) + (v')^2(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

De plus (cf. Exercice 9 page 25 dans [9])

$$\text{long}(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(u')^2 + (v')^2} dt \quad \text{et} \quad \text{mes}(\text{int } \Gamma) = \int_a^b u v' dt.$$

Etape 2. On remplace alors la paramétrisation donnée par un multiple de la longueur de l'arc (comme déjà vu dans la Proposition 2.9). Plus précisément, on définit

$$\begin{cases} x = \eta(t) = -\pi + \frac{2\pi}{\text{long}(\Gamma)} \int_a^t \sqrt{(u')^2 + (v')^2} ds \\ \varphi(x) = u(\eta^{-1}(x)) \quad \text{et} \quad \psi(x) = v(\eta^{-1}(x)). \end{cases}$$

Il est facile de voir que $\varphi, \psi \in C^1([-\pi, \pi])$ et (cf. Proposition 2.9)

$$\sqrt{(\varphi')^2(x) + (\psi')^2(x)} \equiv \frac{\text{long}(\Gamma)}{2\pi} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

En effet comme $(\eta^{-1})'(x) = 1/\eta'(\eta^{-1}(x))$ on a

$$\varphi'(x) = \frac{u'(\eta^{-1}(x))}{\eta'(\eta^{-1}(x))} = \frac{\text{long}(\Gamma)}{2\pi} \frac{u'(\eta^{-1}(x))}{\sqrt{(u')^2(\eta^{-1}(x)) + (v')^2(\eta^{-1}(x))}}$$

et de même

$$\psi'(x) = \frac{v'(\eta^{-1}(x))}{\eta'(\eta^{-1}(x))} = \frac{\text{long}(\Gamma)}{2\pi} \frac{v'(\eta^{-1}(x))}{\sqrt{(u')^2(\eta^{-1}(x)) + (v')^2(\eta^{-1}(x))}}$$

d'où le résultat. On a donc

$$\sqrt{(\varphi')^2(x) + (\psi')^2(x)} = \frac{\text{long}(\Gamma)}{2\pi} \quad \text{et} \quad (\varphi')^2(x) + (\psi')^2(x) = \left[\frac{\text{long}(\Gamma)}{2\pi} \right]^2$$

On déduit donc que

$$\begin{aligned} \text{long}(\Gamma) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(\varphi')^2(x) + (\psi')^2(x)} dx \\ &= \left(2\pi \int_{-\pi}^{\pi} [(\varphi')^2(x) + (\psi')^2(x)] dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Par le changement de variables ($t = \eta^{-1}(x)$) on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b u(t) v'(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(\eta^{-1}(x)) v'(\eta^{-1}(x))}{\eta'(\eta^{-1}(x))} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} u(\eta^{-1}(x)) \frac{d}{dx} [v(\eta^{-1}(x))] dx \end{aligned}$$

et ainsi

$$\text{mes}(\text{int } \Gamma) = \int_a^b u(t) v'(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \psi'(x) dx.$$

Etape 3. Par ailleurs, par le Corollaire 17.25, nous avons

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left((\varphi')^2 + (\psi')^2 \right) \geq 2 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \psi'.$$

Par conséquent

$$[\text{long}(\Gamma)]^2 = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \left((\varphi')^2 + (\psi')^2 \right) \geq 4\pi \int_{-\pi}^{\pi} \varphi \psi' = 4\pi \text{mes}(\text{int } \Gamma)$$

ce qui est le résultat souhaité.

Etape 4. On observe que l'inégalité devient une égalité si Γ est un cercle. Réciproquement si l'inégalité est en fait une égalité, on déduit directement du Corollaire 17.25 que Γ est un cercle. ■

17.9.2 Une fonction continue différentiable en aucun point

Théorème 17.27 Soient $\alpha \in]0, 1[$ et

$$f_{\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^n x)}{2^{n\alpha}},$$

alors f_{α} est continue, paire, π -périodique et nulle part différentiable.

Remarques (i) L'exemple est essentiellement dû à Weierstrass. Si $\alpha > 1$, on a très facilement que $f_{\alpha} \in C^1$. Par contre si $\alpha = 1$ (cf. Stein-Shakarchi [23] page 174) le théorème est encore vrai.

(ii) On peut montrer facilement que $f_{\alpha} \in C^{0,\beta}([0, \pi])$ pour tout $0 < \beta < \alpha$.

(iii) En 1861 Riemann avait conjecturé que la fonction

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

avait la même propriété. Hardy en 1916 a montré que c'était le cas si x est un multiple irrationnel de π et aussi pour certains multiples rationnels. En 1969 Gerver a montré qu'en ces multiples rationnels de π la fonction était en fait différentiable. ♠

Nous aurons besoin des lemmes suivants. Mais on rappelle d'abord les notations. La série partielle de Fourier d'une fonction g est notée $F_N g$ alors que la moyenne de Cesaro est notée

$$\Phi_N g = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n g.$$

On note ensuite

$$\omega_N g = 2 \Phi_{2N} g - \Phi_N g.$$

Remarquer que les coefficients de Fourier, c_n , de f_α sont donnés par

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 2^j \\ 2^{-j\alpha} & \text{si } n = 2^j. \end{cases}$$

Lemme 17.28 *Si f_α est comme dans le théorème et si M est le plus grand entier, plus petit que N , de la forme 2^k , alors*

$$F_N f_\alpha = F_M f_\alpha = \omega_M f_\alpha = \omega_N f_\alpha.$$

De plus si $2^n = 2N$ alors

$$\omega_{2N} f_\alpha(x) - \omega_N f_\alpha(x) = \frac{\cos(2^n x)}{2^{n\alpha}}.$$

Démonstration *Etape 1.* On a par définition que si M est le plus grand entier, plus petit que N , de la forme 2^k , alors

$$F_N f_\alpha(x) = F_M f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^k \frac{\cos(2^n x)}{2^{n\alpha}}.$$

Etape 2. Par ailleurs si

$$F_l g(x) = \sum_{n=0}^l a_n \cos(nx)$$

alors

$$\begin{aligned} \Phi_N g(x) &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} F_l g(x) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{n=0}^l a_n \cos(nx) \\ &= \frac{1}{N} \left[(a_0) + (a_0 + a_1 \cos x) + \cdots + (a_0 + \cdots + a_l \cos(lx)) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + (a_0 + \cdots + a_{N-1} \cos((N-1)x)) \right] \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \Phi_N g(x) &= \frac{1}{N} \left[N a_0 + (N-1) a_1 \cos x + \cdots \right. \\ &\quad \left. + 2 a_{N-2} \cos[(N-2)x] + a_{N-1} \cos[(N-1)x] \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (N-n) a_n \cos(nx) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N (N-n) a_n \cos(nx) \\ &= \sum_{n=0}^N \left(1 - \frac{n}{N}\right) a_n \cos(nx). \end{aligned}$$

Etape 3. Par conséquent si M est le plus grand entier, plus petit que N , de la forme 2^k , alors

$$\Phi_N f_\alpha(x) = \Phi_M f_\alpha(x) = \sum_{j=0}^k \left(1 - \frac{2^j}{2^k}\right) 2^{-j\alpha} \cos(2^j x)$$

$$\begin{aligned} 2\Phi_{2N} f_\alpha(x) &= 2\Phi_{2M} f_\alpha(x) = 2 \sum_{j=0}^{k+1} \left(1 - \frac{2^j}{2^{k+1}}\right) 2^{-j\alpha} \cos(2^j x) \\ &= 2 \sum_{j=0}^k \left(1 - \frac{2^j}{2^{k+1}}\right) 2^{-j\alpha} \cos(2^j x) = \sum_{j=0}^k \left(2 - \frac{2^j}{2^k}\right) 2^{-j\alpha} \cos(2^j x) \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \omega_M f_\alpha(x) &= \omega_N f_\alpha(x) = 2\Phi_{2N} f_\alpha(x) - \Phi_N f_\alpha(x) = \sum_{j=0}^k 2^{-j\alpha} \cos(2^j x) \\ &= F_N f_\alpha(x) = F_M f_\alpha(x). \end{aligned}$$

Etape 4. En particulier si $2^n = 2N$ ($2^{n-1} = N$), alors

$$\omega_{2N} f_\alpha(x) - \omega_N f_\alpha(x) = \sum_{j=0}^n 2^{-j\alpha} \cos(2^j x) - \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j\alpha} \cos(2^j x) = \frac{\cos(2^n x)}{2^{n\alpha}}$$

comme souhaité. ■

Lemme 17.29 *Si g est une fonction continue partout et différentiable en x_0 , alors, pour N grand et pour autant que $|h| \leq c/N$ avec c une constante quelconque indépendante de N , il existe une constante $\gamma = \gamma(c) > 0$ telle que*

$$|[\omega_N g]'(x_0 + h)| \leq \gamma \log N.$$

Démonstration *Etape 1.* Il suffit de montrer la même estimation pour Φ_N car

$$\omega_N g = 2\Phi_{2N} g - \Phi_N g.$$

Etape 2. Commençons par rappeler quelques propriétés du noyau de Fejer (cf. Proposition 17.13). On a

$$\begin{aligned} \Delta_N(x) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) \quad \text{avec} \quad D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \\ \Delta_N(x) &= \frac{1}{N} \left[\frac{\sin \left[\frac{Nx}{2} \right]}{\sin \left[\frac{x}{2} \right]} \right]^2 = \frac{1 - \cos(Nx)}{N(1 - \cos x)} \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(x) dx = 2\pi. \end{aligned}$$

On peut alors déduire les deux estimations suivantes que nous allons démontrer plus bas. Il existe une constante $\gamma_1 > 0$ telle que, pour $|x| \leq \pi$,

$$|\Delta'_N(x)| \leq \gamma_1 N^2 \quad \text{et} \quad |\Delta'_N(x)| \leq \frac{\gamma_1}{|x|^2}.$$

1) Montrons la première inégalité. On obtient

$$\Delta'_N(x) = \frac{i}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^n k e^{ikx}$$

et donc

$$\begin{aligned} |\Delta'_N(x)| &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^n |k| = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{n(n+1)}{2} \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} (N-1)N = \sum_{n=1}^{N-1} (N-1) = (N-1)^2 \leq N^2. \end{aligned}$$

2) Montrons la seconde inégalité. On a en dérivant

$$\begin{aligned} \Delta'_N(x) &= \frac{1}{N} \frac{N \sin \left[\frac{Nx}{2} \right] \cos \left[\frac{Nx}{2} \right] \sin^2 \left[\frac{x}{2} \right] - \sin \left[\frac{x}{2} \right] \cos \left[\frac{x}{2} \right] \sin^2 \left[\frac{Nx}{2} \right]}{\sin^4 \left[\frac{x}{2} \right]} \\ &= \frac{\sin \left[\frac{Nx}{2} \right] \cos \left[\frac{Nx}{2} \right]}{\sin^2 \left[\frac{x}{2} \right]} - \frac{1}{N} \frac{\cos \left[\frac{x}{2} \right] \sin^2 \left[\frac{Nx}{2} \right]}{\sin^3 \left[\frac{x}{2} \right]}. \end{aligned}$$

Comme

$$\left| \sin \frac{Nx}{2} \right| \leq \frac{N|x|}{2} \quad \text{et} \quad \left| \sin \frac{Nx}{2} \right| \leq 1$$

et pour $|x| \leq \pi$

$$\left| \sin \frac{x}{2} \right| \geq \frac{c_1 |x|}{2}$$

on a

$$\frac{|\sin \left[\frac{Nx}{2} \right] \cos \left[\frac{Nx}{2} \right]|}{\sin^2 \left[\frac{x}{2} \right]} \leq \frac{1}{\sin^2 \left[\frac{x}{2} \right]} \leq \frac{c_2}{x^2}$$

et

$$\left| \frac{1}{N} \frac{\cos \left[\frac{x}{2} \right] \sin^2 \left[\frac{Nx}{2} \right]}{\sin^3 \left[\frac{x}{2} \right]} \right| \leq \frac{1}{N} \frac{|\sin^2 \left[\frac{Nx}{2} \right]|}{|\sin^3 \left[\frac{x}{2} \right]|} \leq \frac{1}{N} \frac{|\sin \left[\frac{Nx}{2} \right]|}{|\sin^3 \left[\frac{x}{2} \right]|} \leq \frac{c_3}{x^2}$$

soit l'estimation souhaitée

$$|\Delta'_N(x)| \leq \frac{\gamma_1}{|x|^2}.$$

Etape 3. On se rappelle (cf. Proposition 17.13) qu'on a aussi

$$\Phi_N g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(x-y) g(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_N(y) g(x-y) dy$$

et donc

$$\begin{aligned} [\Phi_N g]'(x_0 + h) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta'_N(x_0 + h - y) g(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta'_N(y) g(x_0 + h - y) dy. \end{aligned}$$

Par ailleurs comme Δ_N est périodique, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Delta'_N(x) dx = 0$$

et donc

$$[\Phi_N g]'(x_0 + h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Delta'_N(y) [g(x_0 + h - y) - g(x_0)] dy.$$

Comme g est continue et différentiable en x_0 on trouve (cf. Série 1) qu'il existe une constante $\gamma_2 > 0$ telle que

$$|g(x_0 + h - y) - g(x_0)| \leq \gamma_2 |h - y|$$

et ainsi

$$|[\Phi_N g]'(x_0 + h)| \leq \gamma_2 \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta'_N(y)| |h - y| dy.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |[\Phi_N g]'(x_0 + h)| &\leq \gamma_2 \int_{[-\pi, \pi] \cap \{|y| \geq 1/N\}} |\Delta'_N(y)| |h - y| dy \\ &\quad + \gamma_2 \int_{[-\pi, \pi] \cap \{|y| < 1/N\}} |\Delta'_N(y)| |h - y| dy \end{aligned}$$

est ainsi en utilisant l'Etape 2 on a

$$\begin{aligned} &\int_{[-\pi, \pi] \cap \{|y| \geq 1/N\}} |\Delta'_N(y)| |h - y| dy \\ &\leq \gamma_1 \int_{[-\pi, \pi] \cap \{|y| \geq 1/N\}} \frac{|h - y|}{|y|^2} dy \leq \gamma_1 \int_{[-\pi, \pi] \cap \{|y| \geq 1/N\}} \frac{|h| + |y|}{|y|^2} dy \\ &\leq \gamma_1 \int_{1/N}^{\pi} \frac{|h| + |y|}{|y|^2} dy + \gamma_1 \int_{-\pi}^{-1/N} \frac{|h| + |y|}{|y|^2} dy = 2\gamma_1 \int_{1/N}^{\pi} \frac{|h| + |y|}{|y|^2} dy \\ &\leq 2\gamma_1 \int_{1/N}^{\pi} \frac{|h|}{|y|^2} dy + 2\gamma_1 \int_{1/N}^{\pi} \frac{dy}{|y|} = 2\gamma_1 |h| \left. \frac{1}{|y|} \right|_{\pi}^{1/N} + 2\gamma_1 \log |y| \Big|_{1/N}^{\pi} \\ &= 2\gamma_1 |h| \left(N - \frac{1}{\pi} \right) + \gamma_1 (\log \pi + \log N). \end{aligned}$$

Comme $|h| \leq c/N$ on a que ce terme est d'ordre $\log N$. De même comme $|h| \leq$

c/N on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{[-\pi, \pi] \cap \{|y| < 1/N\}} |\Delta'_N(y)| |h - y| dy \\
 \leq & \gamma_1 N^2 \int_{[-\pi, \pi] \cap \{|y| < 1/N\}} |h - y| dy \leq \gamma_1 N^2 \int_{[-\pi, \pi] \cap \{|y| < 1/N\}} [|h| + |y|] dy \\
 \leq & \gamma_1 c N \int_{[-\pi, \pi] \cap \{|y| < 1/N\}} dy + \gamma_1 N^2 \int_{[-\pi, \pi] \cap \{|y| < 1/N\}} |y| dy \\
 \leq & \gamma_1 c N \int_{-1/N}^{1/N} dy + \gamma_1 N^2 \int_{-1/N}^{1/N} |y| dy = (2c + 1) \gamma_1
 \end{aligned}$$

et ce terme est d'ordre 1.

En combinant les deux estimations on a le résultat souhaité. ■

On peut maintenant montrer le théorème.

Démonstration (Théorème 17.27). Le fait que f_α est continue, paire et π -périodique est évident. Discutons maintenant la non différentiabilité. On va montrer cela par l'absurde.

1) Du Lemme 17.28 on obtient si $2^n = 2N$ que

$$\omega_{2N} f_\alpha(x) - \omega_N f_\alpha(x) = \frac{\cos(2^n x)}{2^{n\alpha}}$$

et ainsi

$$[\omega_{2N} f_\alpha]'(x_0 + h) - [\omega_N f_\alpha]'(x_0 + h) = -2^{n(1-\alpha)} \sin(2^n(x_0 + h)).$$

On choisit alors h de manière à ce que

$$|\sin(2^n(x_0 + h))| = 1.$$

Pour cela on trouve $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\left(k - \frac{1}{2}\right) \pi < 2^n x_0 \leq \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi$$

et on choisit

$$h = \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right) \pi - 2^n x_0}{2^n}.$$

On a ainsi

$$0 \leq h \leq \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2N} = \frac{c}{N}.$$

Et ainsi

$$|[\omega_{2N} f_\alpha]'(x_0 + h) - [\omega_N f_\alpha]'(x_0 + h)| = 2^{n(1-\alpha)} = [2N]^{1-\alpha}$$

2) Supposons par l'absurde que f_α est différentiable en un point x_0 . Par le Lemme 17.29 on déduit que, pour N grand et pour autant que $|h| \leq c/N$,

$$|[\omega_{2N} f_\alpha]'(x_0 + h) - [\omega_N f_\alpha]'(x_0 + h)| \leq \gamma \log N$$

3) La combinaison des deux résultats précédents et du fait que $0 < \alpha < 1$ conduit à la contradiction souhaitée. ■

17.10 Exercices

Pour de nombreux exercices calculatoires on réfère au Chapitre 14 de [9].

17.10.1 Exercices préliminaires

Exercice 17.1 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T -périodique et $f \in L^1(0, T)$, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f \in L^1(a, a + T)$ et

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Exercice 17.2 Soient $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $T > 0$, alors

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) dx = 0$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \sin\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ -1 & \text{si } m = -n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 1 & \text{si } m = -n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 17.3 Soit $-\infty < a < b < \infty$. Pour $f \in C^{0,\alpha}([a, b])$, on note

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}([a,b])} = \|f\|_{C^0([a,b])} + [f]_{C^{0,\alpha}([a,b])}$$

où

$$[f]_{C^{0,\alpha}([a,b])} = \sup_{a \leq x \neq y \leq b} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

(i) Montrer que $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}([a,b])}$ est une norme sur $C^{0,\alpha}([a, b])$.

(ii) Soient $f, g \in C^{0,\alpha}([a, b])$, alors $f g \in C^{0,\alpha}([a, b])$.

(iii) Si $0 < \alpha < \beta < 1$, alors

$$C^1([a, b]) \subsetneq C^{0,1}([a, b]) \subsetneq C^{0,\beta}([a, b]) \subsetneq C^{0,\alpha}([a, b]) \subsetneq C^0([a, b]).$$

Exercice 17.4 (i) Soient $\alpha \in [0, 1]$ et $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Montrer que $f_\alpha \in C^{0,\alpha}([0, 1])$.

Indication : Considérer $\sup_{t \in]0,1[} \left\{ \frac{1-t^\alpha}{(1-t)^\alpha} \right\}$.

(ii) Montrer que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -1/\log x & \text{si } x \in]0, 1/2] \end{cases}$$

est continue, mais n'est pas Hölder continue.

Exercice 17.5 (i) Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ une suite convergente. Montrez qu'elle est alors convergente au sens de Cesaro. On rappelle qu'une suite est convergente au sens de Cesaro si la suite $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ définie par

$$s_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

converge.

(ii) Donner un exemple d'une suite convergente au sens de Cesaro mais pas dans le sens usuel.

17.10.2 Quelques exercices calculatoires

Exercice 17.6 Soit la fonction $f \in C^1(\mathbb{R})$ 2π -périodique telle que

$$f(x) = x^2 \quad \text{si } -\pi \leq x < \pi.$$

(i) Trouver sa série de Fourier.

(ii) La série converge-t-elle ponctuellement et si c'est le cas que vaut la limite.

Exercice 17.7 Soit $f(x) = |\sin x|$, trouver sa série de Fourier réelle et en déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

Rappel : on pourra utiliser le fait que

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y.$$

Exercice 17.8 Soit $f(x) = \pi^2 - x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$ et étendue par 2π -périodicité à \mathbb{R} .

(i) Calculer sa série de Fourier réelle. Pour quels $x \in [-\pi, \pi]$ la série converge-t-elle (justifier votre réponse en invoquant un théorème vu au cours et après avoir vérifié les hypothèses du théorème) ?

(ii) Déduire de la question précédente, en choisissant $x = \pi/2$ et en se rappelant que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

que

$$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{(2s-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(iii) Montrer, à l'aide de (i), que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

17.10.3 Quelques propriétés des coefficients de Fourier

Exercice 17.9 Soient $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R})$, 2π -périodique et

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-in x} dx.$$

Soit c_n^k le coefficient de Fourier de $f^{(k)} = d^k f / dx^k$ c'est à dire

$$c_n^k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) e^{-in x} dx.$$

(avec la convention que $f^{(0)} = f$ et $c_n^0 = c_n$). Montrer que

$$c_n^k = (in)^k c_n.$$

Remarque. Un résultat analogue (avec la même démonstration) est vrai pour les coefficients en cosinus et en sinus de f notés a_n et b_n , à savoir

$$a_n^k = n^k \begin{cases} a_n & \text{si } k = 4m \\ b_n & \text{si } k = 4m + 1 \\ -a_n & \text{si } k = 4m + 2 \\ -b_n & \text{si } k = 4m + 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad b_n^k = n^k \begin{cases} b_n & \text{si } k = 4m \\ -a_n & \text{si } k = 4m + 1 \\ -b_n & \text{si } k = 4m + 2 \\ a_n & \text{si } k = 4m + 3. \end{cases}$$

Exercice 17.10 Soient c_n les coefficients de Fourier complexe de la fonction 2π -périodique f , i.e.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-in x} dx$$

et a_n et b_n ses coefficients en cosinus et sinus, à savoir si $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{et} \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

(i) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in C^k(\mathbb{R})$ 2π -périodique. Montrer, à l'aide de l'Exercice 17.9, que

$$|c_n| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1}}{2\pi |n|^k}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

et de même

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1}}{\pi |n|^k}, \quad \text{pour tout } n \neq 0.$$

(ii) Soit $\alpha \in]0, 1]$. Montrer que si $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$, alors il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$|a_n|, |b_n|, |c_n|, |c_{-n}| \leq \frac{\gamma}{|n|^\alpha}, \quad \text{pour tout } n \neq 0.$$

On pourra commencer par montrer que

$$c_n = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) e^{-in x} dx.$$

Exercice 17.11 Soient k un entier et $f \in C^k(\mathbb{R})$, 2π -périodique et c_n ses coefficients de Fourier complexes.

(i) Généraliser le Théorème 17.19 de la manière suivante. A l'aide de l'Exercice 17.9 et de l'identité de Parseval, montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{2k} |c_n|^2 < \infty.$$

(ii) A l'aide de la question précédente et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{k-1} |c_n| < \infty.$$

Remarque. De façon tout à fait semblable le même résultat est vrai pour les coefficients en cosinus et en sinus de f .

Exercice 17.12 L'Exercice 17.10 (i) peut être raffiné de la manière suivante. Soient $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R})$ et 2π -périodique et c_n ses coefficients de Fourier. Montrer, à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue, que

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} [|n|^k |c_n|] = 0.$$

Exercice 17.13 Soient $f, g, h \in L^1(-\pi, \pi)$ des fonctions 2π -périodiques et définissons le produit de convolution

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) dt.$$

Montrer les propriétés suivantes.

(i) $f * g \in L^1(-\pi, \pi)$ et

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

(ii) Symétrie : $f * g = g * f$.

(iii) Associativité : $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(iv) Si f_n et g_n sont les coefficients de Fourier de f et g respectivement, alors les coefficients de Fourier de $f * g$ sont donnés par

$$(f * g)_n = f_n g_n.$$

Indication. Ici il faudra utiliser les résultats esquissés dans la Section 16.6 qui permettent de permuter les intégrales. En particulier, on a que si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions mesurables, alors la fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x, y) = f(x-y) g(y)$$

est mesurable.

Remarque. Attention, le résultat de (iv) n'est pas valable tel quel pour les coefficients en sinus et cosinus. Dans ce cas on a, si

$$f_n^{\cos} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad f_n^{\sin} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

et de même pour g , alors

$$(f * g)_n^{\cos} = f_n^{\cos} g_n^{\cos} - f_n^{\sin} g_n^{\sin} \quad \text{et} \quad (f * g)_n^{\sin} = f_n^{\cos} g_n^{\sin} + f_n^{\sin} g_n^{\cos}.$$

Exercice 17.14 Montrer le Théorème 17.21.

Exercice 17.15 Soit $f \in C(\mathbb{R})$ et 2π -périodique. Soit

$$F_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i n x} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i n x} dx.$$

Montrer que si

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < \infty$$

alors $F_N f \rightarrow f$ uniformément.

Suggestion : utiliser le corollaire du théorème de Féjer (Corollaire 17.15) pour déduire le résultat.

Exercice 17.16 Montrer que la série trigonométrique

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\log n}$$

converge pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, mais qu'elle n'est pas la série de Fourier d'une fonction $f \in L^2(-\pi, \pi)$.

Suggestion. (i) On pourra utiliser l'Exercice 13.3 pour montrer que la série est bien définie.

(ii) On montrera ensuite que si

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 < \infty.$$

(iii) Conclure.

17.10.4 Autres exercices

Exercice 17.17 Soient $0 \leq r < 1$ et

$$P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{i n x}.$$

Montrer que

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = 1.$$

De plus $P_r \geq 0$ et pour tout $\delta \in]0, \pi]$

$$\sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} [P_r(x)] \rightarrow 0, \quad \text{si } r \rightarrow 1$$

(attention le résultat est faux si $\delta = 0$, car $P_r(0) = \frac{1+r}{1-r}$).

Exercice 17.18 Soient $f \in C^0(\mathbb{R})$ et 2π -périodique, c_n ses coefficients de Fourier, $0 \leq r < 1$,

$$A_r(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} c_n e^{i n x} \quad \text{et} \quad P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{i n x}$$

le noyau de Poisson (cf. Exercice 17.17).

(i) Montrer que $A_r(f) = P_r * f$, c'est à dire

$$A_r(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y) dy.$$

(ii) Montrer, exactement comme dans le théorème de Fejer, que $A_r(f)$ converge uniformément vers f (quand $r \rightarrow 1$). On dit alors que la série de Fourier de f converge uniformément au sens d'Abel vers f .

Exercice 17.19 Soient $T > 0$, $f \in L^1(0, T)$ et $g \in C^1(\mathbb{R})$ et T -périodique. Montrer, après avoir écrit la série de Fourier de g et à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue, que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T f(x) g(kx) dx = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \int_0^T g(x) dx.$$

Pour une autre approche, on pourra s'inspirer de l'Exercice 16.27.

Exercice 17.20 Soit f la fonction 2π -périodique qui sur $[-\pi, \pi[$ est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi-x}{2} & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{-\pi-x}{2} & \text{si } x \in [-\pi, 0[. \end{cases}$$

(i) Calculer sa série de Fourier complexe $Ff(x)$. Comparer $Ff(x)$ et $f(x)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi[$. En particulier que vaut $Ff(0) - f(0)$?

(ii) Montrer que la série de Fourier partielle d'ordre N vérifie

$$\int_0^x [D_N(y) - 1] dy = 2 F_N f(x)$$

où D_N est le noyau de Dirichlet.

(iii) Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[F_N f\left(\frac{\pi}{N}\right) - f\left(\frac{\pi}{N}\right) \right] = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2} \sim 0,28114.$$

Le présent exercice est une illustration de ce qu'on appelle le phénomène de Gibbs (pour plus de détails voir [6] page 293 ou [23] Exercice 20 page 94).

17.10.5 Théorèmes d'ergodicité, de Weyl et de Kronecker

Exercice 17.21 (Théorème d'ergodicité) Soit $f \in C^0([0, 1])$ une fonction 1-périodique et soit τ un nombre irrationnel. Montrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\tau) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$$

et que le résultat est, en général, faux si τ est rationnel.

Indication : Montrer le résultat pour des fonctions de la forme $f(x) = e^{2\pi i k x}$, k un entier. Conclure avec le théorème de Fejer (Théorème 17.14).

Exercice 17.22 Soit $]a, b[\subset [0, 1[$ et soit χ la fonction 1-périodique telle que

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a, b[\\ 0 & \text{si } x \in [0, 1[\setminus]a, b[. \end{cases}$$

Montrer que si τ est irrationnel

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(n\tau) \rightarrow \int_0^1 \chi(x) dx = b - a.$$

Indication : Entourer χ par deux fonction continue f_ϵ^- et f_ϵ^+ telles que

$$\int_0^1 f_\epsilon^- = b - a - \epsilon \quad \text{et} \quad \int_0^1 f_\epsilon^+ = b - a + \epsilon.$$

et appliquer l'Exercice 17.21.

Exercice 17.23 (Théorème d'équidistribution de Weyl) Montrer, à l'aide de l'Exercice 17.22, que si $\{x\}$ dénote la partie fractionnaire du nombre réel x et si τ est irrationnel alors la suite $\{\tau\}, \{2\tau\}, \{3\tau\}, \dots$ est équidistribuée dans $[0, 1[$, c'est à dire que pour tous $0 \leq a < b < 1$, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} [\text{nombre de } n \in \{1, \dots, N\} : \{n\tau\} \in]a, b[] = b - a.$$

Le résultat est évidemment faux si τ est rationnel.

Exercice 17.24 (Théorème de Kronecker) Montrer que si $\tau \in \mathbb{R}$ est irrationnel, alors l'ensemble

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{R} : x = m + n\tau : m, n \in \mathbb{Z}\},$$

est dense dans \mathbb{R} .

Indication : Commencer par montrer, à l'aide de l'Exercice 17.23, que l'ensemble

$$\Lambda_0 = \{\{n\tau\} : n \in \mathbb{Z}\}$$

est dense dans $[0, 1[$.

17.11 Corrigés

Exercice 17.1 Par l'Exercice 16.13, nous avons le droit d'effectuer le changement de variable

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(x+T) dx = \int_0^a f(x) dx$$

où nous avons utilisé la périodicité $f(x+T) = f(x)$. En réarrangeant les bornes des intégrales, nous avons donc

$$\int_a^{a+T} f(x) dx - \int_0^T f(x) dx = \int_T^{a+T} f(x) dx - \int_0^a f(x) dx = 0.$$

Puisque $|f|$ est aussi T -périodique, on a aussi que

$$\int_0^T |f(x)| dx = \int_a^{a+T} |f(x)| dx$$

et donc $f \in L^1(a, a+T)$. ♠

Exercice 17.2 Il suffit d'utiliser les formules trigonométriques

$$2 \cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y). \spadesuit$$

Exercice 17.3 Pour alléger les notations, on ne note pas la dépendance en $[a, b]$.

(i) Soient $f, g \in C^{0,\alpha}$ et $a \in \mathbb{R}$. Il est trivial de voir que $\|f\|_{C^{0,\alpha}} = 0$ si et seulement si $f = 0$ et que

$$\|a f\|_{C^{0,\alpha}} = |a| \|f\|_{C^{0,\alpha}}.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que

$$\|f + g\|_{C^{0,\alpha}} \leq \|f\|_{C^{0,\alpha}} + \|g\|_{C^{0,\alpha}}.$$

On a

$$\|f + g\|_{C^0} \leq \|f\|_{C^0} + \|g\|_{C^0}$$

puisque $\|\cdot\|_{C^0}$ est une norme. On trouve ainsi que

$$\frac{|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} + \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq [f]_{C^{0,\alpha}} + [g]_{C^{0,\alpha}}$$

et donc

$$[f + g]_{C^{0,\alpha}} \leq [f]_{C^{0,\alpha}} + [g]_{C^{0,\alpha}}$$

d'où le résultat.

(ii) Comme

$$\begin{aligned} [f g]_{C^{0,\alpha}} &\leq \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)g(x) - f(y)g(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &= \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq \|f\|_{C^0} \sup_{x \neq y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|^\alpha} + \|g\|_{C^0} \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \end{aligned}$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \|f g\|_{C^{0,\alpha}} &\leq \|f\|_{C^0} \|g\|_{C^{0,\alpha}} + \|f\|_{C^{0,\alpha}} [g]_{C^0} + \|g\|_{C^0} [f]_{C^{0,\alpha}} \\ &\leq \|f\|_{C^{0,\alpha}} \|g\|_{C^{0,\alpha}}. \end{aligned}$$

(iii) - Si $f \in C^{0,\alpha}([a, b])$, on a alors

$$\lim_{x \rightarrow y} |f(x) - f(y)| \leq C \lim_{x \rightarrow y} [|x - y|^\alpha] = 0.$$

On obtient donc bien $C^{0,\alpha} \subset C^0$.

- Montrons que $C^{0,\beta} \subset C^{0,\alpha}$. On a

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x, y \in [a, b] \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\} &\leq \sup_{\substack{x, y \in [a, b] \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)| |x - y|^{\beta - \alpha}}{|x - y|^\beta} \right\} \\ &\leq [f]_{C^{0,\beta}} (b - a)^{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit alors

$$\begin{aligned}\|f\|_{C^{0,\alpha}} &= \|f\|_{C^0} + [f]_{C^{0,\alpha}} \\ &\leq \|f\|_{C^0} + [f]_{C^{0,\beta}} (b-a)^{\beta-\alpha} \leq \left(1 + (b-a)^{\beta-\alpha}\right) \|f\|_{C^{0,\beta}}.\end{aligned}$$

L'inclusion $C^{0,1} \subset C^{0,\beta}$ est un cas particulier du point précédent.

- Montrons que $C^1 \subset C^{0,1}$. Soient $x, y \in [a, b]$, il vient alors

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} [f(y + t(x-y))] dt = \int_0^1 f'(y + t(x-y)) (x-y) dt.$$

On a donc que

$$|f(x) - f(y)| \leq \max_{z \in [x,y]} [|f'(z)| |x-y|] \leq \|f\|_{C^1} |x-y|. \quad \spadesuit$$

Exercice 17.4 (i) On commence par remarquer que pour tout $\alpha \in [0, 1]$, on a

$$g(t) = 1 - t^\alpha - (1-t)^\alpha \leq 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, 1].$$

Ceci se montre facilement en remarquant que g est convexe dans $[0, 1]$ et que $g(0) = g(1) = 0$. On obtient ensuite

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{x \neq y \\ x, y \in [0, 1]}} \left\{ \frac{|x^\alpha - y^\alpha|}{|x - y|^\alpha} \right\} &= \sup_{\substack{x > y \\ x, y \in [0, 1]}} \left\{ \frac{|x^\alpha - y^\alpha|}{|x - y|^\alpha} \right\} = \sup_{\substack{x > y \\ x, y \in [0, 1]}} \left\{ \frac{|x^\alpha| |1 - (y/x)^\alpha|}{|x^\alpha| |1 - y/x|^\alpha} \right\} \\ &= \sup_{t \in (0, 1)} \left\{ \frac{1 - t^\alpha}{(1 - t)^\alpha} \right\} = 1\end{aligned}$$

et donc $f_\alpha \in C^{0,\alpha}([0, 1])$.

(ii) Il est trivial de voir que f est continue. Si elle était Hölder continue, il existerait $\alpha \in]0, 1[$ et une constante $C_\alpha > 0$ tels que, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\frac{-1}{\log x} = |f(x) - f(0)| \leq C_\alpha x^\alpha$$

autrement dit

$$x^\alpha \log x \leq \frac{-1}{C_\alpha}, \quad \forall x \in]0, 1[$$

ce qui est clairement impossible. \spadesuit

Exercice 17.5 (i) Sans perte de généralité supposons que $a_n \rightarrow 0$. Comme la suite converge, on a que

$$\gamma = \sup \{ |a_n| \} < \infty$$

et que pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $N = N(\epsilon)$ tel que

$$|a_n| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{pour tout } n \geq N.$$

On a ainsi pour $n \geq N$

$$\begin{aligned} |s_n| &\leq \frac{1}{n} [|a_1| + \cdots + |a_N|] + \frac{1}{n} [|a_{N+1}| + \cdots + |a_n|] \\ &\leq \gamma \frac{N}{n} + \frac{\epsilon}{2n} (n - N) \leq \gamma \frac{N}{n} + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Donc en choisissant $\overline{N} = \overline{N}(\epsilon) \geq \frac{2\gamma N(\epsilon)}{\epsilon}$ et $n \geq \overline{N}$ on obtient le résultat souhaité, à savoir

$$|s_n| \leq \gamma \frac{N}{n} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon.$$

(ii) La suite $a_n = (-1)^n$ ne converge pas au sens usuel mais elle converge au sens de Cesaro vers 0. ♠

Exercice 17.6 (i) La fonction étant paire les coefficients en sinus sont tous nuls. D'autre part on a

$$\pi a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3} \Rightarrow a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

et si $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \pi a_n &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x \sin(nx)}{n} dx \\ &= -\frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = -\frac{2}{n} \left\{ \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx \right\} \\ &= \frac{2}{n^2} [\pi \cos(n\pi) + \pi \cos(-n\pi)] = \frac{4\pi(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

En conclusion nous trouvons

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2} \quad \text{si } n \geq 1.$$

(ii) La fonction satisfait toutes les hypothèses du théorème de Dirichlet et on trouve donc que, si $-\pi \leq x \leq \pi$

$$Ff(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = f(x) = x^2. \quad \spadesuit$$

Exercice 17.7 (i) Comme f est paire, les coefficients en sinus sont nuls et on a donc

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos((n-1)x)}{n-1} - \frac{\cos((n+1)x)}{n+1} \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n-1} - 1}{(n-1)\pi} - \frac{(-1)^{n+1} - 1}{(n+1)\pi} \end{aligned}$$

et ainsi

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{-4}{(n^2-1)\pi} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

On a ainsi trouvé, comme f est C^1 par morceaux que

$$f(x) = Ff(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}.$$

(ii) De l'identité de Parseval on a que

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

et on infère alors que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}. \quad \spadesuit$$

Exercice 17.8 (i) Comme la fonction est paire tous les coefficients en sinus sont nuls et on a

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - y^2) \, dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - y^2) \, dy = \frac{2\pi^2}{3}$$

et si $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - y^2) \cos(ny) \, dy = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\pi} y^2 \cos(ny) \, dy \\ &= \frac{-2}{\pi} \left\{ \left[\frac{y^2 \sin(ny)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} y \sin(ny) \, dy \right\} = \frac{4}{\pi n} \int_0^{\pi} y \sin(ny) \, dy \\ &= \frac{4}{\pi n} \left\{ \left[-\frac{y \cos(ny)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(ny) \, dy \right\} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}. \end{aligned}$$

La fonction f est Lipschitz et on peut donc lui appliquer le Théorème de Dirichlet pour déduire que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$

$$\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(nx)}{n^2}.$$

(ii) En particulier si $x = \pi/2$, on infère que

$$\begin{aligned} \frac{3\pi^2}{4} &= \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(n \frac{\pi}{2})}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2m+1} \cos(m\pi)}{(2m)^2} \\ &= \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{3m+1}}{m^2} = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{(2s-1)^2} - \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{(2s)^2} \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{(2s-1)^2} = \frac{3\pi^2}{4} - \frac{2\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(iii) Par l'identité de Parseval on trouve

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - y^2)^2 dy = 2 \left(\frac{2\pi^2}{3} \right)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4}$$

et comme

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - y^2)^2 dy = \frac{16}{15} \pi^4$$

on déduit le résultat. ♠

Exercice 17.9 On procède par induction. Le cas $k = 0$ est la définition des coefficients. Supposons donc le résultat montré pour k et montrons le pour $k+1$. On a donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} 2\pi \left[(in)^k c_n \right] &= 2\pi c_n^k = \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) e^{-inx} dx \\ &= \left[\frac{f^{(k)}(x) e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(x) \frac{e^{-inx}}{-in} dx. \end{aligned}$$

En utilisant la 2π -périodicité de $f^{(k)}$ et de e^{-inx} , on a donc bien montré le résultat, à savoir

$$2\pi \left[(in)^{k+1} c_n \right] = \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k+1)}(x) e^{-inx} dx = 2\pi c_n^{k+1}.$$

Remarque : on s'aperçoit que dans l'argument ci dessus on n'utilise pas vraiment le fait que $f \in C^k(\mathbb{R})$. En effet, si on généralise de façon appropriée la notion de dérivée (pour permettre une intégration par parties), il suffit de supposer que $f^{(k)} \in L^1(-\pi, \pi)$. ♠

Exercice 17.10 (i) De l'Exercice 17.9 on déduit que

$$2\pi |n|^k |c_n| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}(x)| dx = \|f^{(k)}\|_{L^1(-\pi, \pi)}.$$

Comme $f \in C^k(\mathbb{R})$, on a tout de suite le résultat pour $|c_n|$ et $|c_{-n}|$ et donc immédiatement pour $|a_n|$ et $|b_n|$. Par ailleurs, la même remarque que dans le corrigé de l'Exercice 17.9 s'applique ici.

(ii) En faisant un changement de variable $x = y + \frac{\pi}{n}$ on trouve, en utilisant la 2π -périodicité de f et de e^{-iny} , que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi - \frac{\pi}{n}}^{\pi - \frac{\pi}{n}} f\left(y + \frac{\pi}{n}\right) e^{-in\left(y + \frac{\pi}{n}\right)} dy = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(y + \frac{\pi}{n}\right) e^{-iny} dy.$$

On déduit de cela que

$$c_n = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right] e^{-i n x} dx.$$

Comme f est Hölder continue on obtient qu'il existe une constante γ_1 telle que

$$\left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right| \leq \gamma_1 \left(\frac{\pi}{|n|} \right)^\alpha$$

et ainsi

$$|c_n| \leq \frac{\gamma_1 \pi^\alpha}{2 |n|^\alpha} = \frac{\gamma}{|n|^\alpha} \cdot \spadesuit$$

Exercice 17.11 (i) Soit c_n^k le coefficient de Fourier de $f^{(k)} = d^k f / dx^k$ c'est à dire

$$c_n^k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) e^{-i n x} dx.$$

(avec la convention que $f^{(0)} = f$ et $c_n^0 = c_n$). On sait par l'Exercice 17.9 que

$$c_n^k = (i n)^k c_n.$$

Par l'identité de Parseval et comme $f^{(k)} \in L^2(-\pi, \pi)$ on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n^k|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{2k} |c_n|^2 < \infty.$$

(ii) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{k-1} |c_n| = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|} |n|^k |c_n| \leq \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{|n|^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|^{2k} |c_n|^2 \right)^{1/2}$$

d'où le résultat. \spadesuit

Exercice 17.12 Par l'Exercice 17.9 on sait que

$$2\pi (i n)^k c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) e^{-i n x} dx.$$

Par le lemme de Riemann-Lebesgue, comme $f^{(k)} \in L^1(-\pi, \pi)$, on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) e^{-i n x} dx \right] = 0$$

et le résultat suit immédiatement. \spadesuit

Exercice 17.13 (i) Utilisant le deuxième résultat de l'indication, on sait que la fonction $F(x, t) = f(x - t)g(t)$ est mesurable. Puisque $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$ il vient

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(x, t)| dx dt \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < \infty.$$

Utilisant les Théorèmes de Tonelli et de Fubini, on a que

$$f * g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x, t) dt$$

appartient à $L^1(-\pi, \pi)$. En utilisant ce qui précède, on a également que

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

(ii) En faisant le changement de variable $y = x - t$ et en utilisant le fait que f et g sont 2π -périodiques, on obtient que

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(y) g(x-y) (-dy) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x-y) dy = g * f(x). \end{aligned}$$

(iii) Utilisant à nouveau les Théorèmes de Tonelli et de Fubini et le changement de variable $s = t + y$, il vient

$$\begin{aligned} (f * g) * h(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x-t) h(t) dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t-y) g(y) dy \right) h(t) dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) g(s-t) ds \right) h(t) dt \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (f * g) * h(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) \left(\int_{-\pi}^{\pi} g(s-t) h(t) dt \right) ds \\ &= f * (g * h)(x). \end{aligned}$$

(iv) Soit $n \in \mathbb{Z}$. On trouve

$$\begin{aligned} (f * g)_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(x-t) dt \right) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-t) e^{-in(x-t)} dx \right) dt \end{aligned}$$

où on a utilisé les Théorèmes de Tonelli et de Fubini pour changer l'ordre d'intégration. On obtient ainsi que

$$(f * g)_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} dx \right) dt = f_n g_n. \quad \spadesuit$$

Exercice 17.14 (i) Posons $g(x) = f(Tx/2\pi)$. Alors $g \in C^{0,\alpha}([0, 2\pi])$ et est 2π -périodique. Il suffit alors d'appliquer à g le théorème de Dirichlet (Théorème 17.16).

(ii) Evident.

(iii) Evident.

(iv) Comme précédemment, on suppose que $T = 2\pi$. Puisque $f' \in C^{0,\alpha}$ on sait par le cours que pour tout $x \in [0, 2\pi]$ on a

$$f'(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n \cos(nx) + b'_n \sin(nx)).$$

En intégrant par parties on obtient directement que $a'_0 = 0$,

$$a'_n = n b_n \quad \text{et} \quad b'_n = -n a_n.$$

Insérant cela dans l'équation ci-dessus, on a le résultat recherché.

(v) Comme précédemment, on suppose que $T = 2\pi$. Puisque f est dans L^2 , par le Théorème 17.17, on sait que F_N converge vers f dans L^2 . Par l'inégalité de Hölder, il vient alors

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \int_{x_0}^x F_N f(t) - f(t) dt \right| \\ & \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x |F_N f(t) - f(t)| dt \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} |F_N f(t) - f(t)| dt \\ & \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sqrt{2\pi} \|F_N f - f\|_{L^2} \right] \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On trouve alors que

$$\int_{x_0}^x F_N f(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{a_0}{2} dt + \sum_{n=1}^N \int_{x_0}^x \{a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)\} dt \rightarrow \int_{x_0}^x f(t) dt$$

lorsque $N \rightarrow \infty$, d'où le résultat.

(vi) Ceci suit immédiatement du Théorème 17.17. ♠

Exercice 17.15 On observe que si $N > M$, alors, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$|F_N f(x) - F_M f(x)| = \left| \sum_{M+1 \leq |n| \leq N} c_n e^{inx} \right| \leq \sum_{M+1 \leq |n| \leq N} |c_n|.$$

Par conséquent la suite $\{F_N f\}$ converge uniformément vers une fonction continue g donnée par

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

qui a les mêmes coefficients de Fourier que f . Par le corollaire du théorème de Féjer, on a que $f = g$ et donc $F_N f \rightarrow f$ uniformément. ♠

Exercice 17.16 (i) Commençons par observer que, comme

$$2 \sin x \sin (n x) = \cos ((n-1) x) - \cos ((n+1) x),$$

on a

$$2 \sin x \sum_{n=2}^N \sin (n x) = \cos (x) + \cos (2 x) - \cos (N x) - \cos ((N+1) x)$$

et donc

$$|\sin x| \left| \sum_{n=2}^N \sin (n x) \right| \leq 2.$$

On note ensuite que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n x)}{\log n} = 0$ si $x = 0, \pm\pi$. Par ailleurs on peut appliquer, grâce à l'estimation ci-dessus, l'Exercice 13.3 pour déduire que la série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin (n x)}{\log n}$$

converge aussi pour tout $x \neq 0, \pm\pi$.

(ii) Le fait que $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^2 < \infty$ suit immédiatement de l'identité de Parseval.

(iii) En combinant (i) et (ii) on a bien que la série trigonométrique

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin (n x)}{\log n}$$

ne peut pas être la série de Fourier d'une fonction $f \in L^2(-\pi, \pi)$. ♠

Exercice 17.17 Si on pose $\omega = r e^{i x}$, on remarque que $P_r(x)$ se décompose en deux sommes géométriques

$$\begin{aligned} P_r(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\omega}^n = \frac{1}{1-\omega} + \frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}} \\ &= \frac{1-\bar{\omega} + (1-\omega)\bar{\omega}}{(1-\omega)(1-\bar{\omega})} = \frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2} \\ &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}. \end{aligned}$$

Par ailleurs comme $P_r(x) = \sum r^{|n|} e^{i n x}$ et que la convergence est uniforme on déduit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|} e^{i n x} dx = 2\pi.$$

Clairément $P_r \geq 0$. Soit $\delta \in]0, \pi]$, alors $\cos x \leq \cos \delta$ pour tout $\delta \leq |x| \leq \pi$ et donc

$$\sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} [P_r(x)] \leq \frac{1-r^2}{1-2r \cos \delta + r^2} \rightarrow 0, \quad \text{si } r \rightarrow 1. \quad \spadesuit$$

Exercice 17.18 (i) On écrit

$$A_r(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-in y} dy \right) e^{in x}$$

et comme la série converge uniformément (se rappeler que les $|c_n|$ sont uniformément bornés car f est continue) on peut permuter la somme et l'intégrale et on infère que

$$\begin{aligned} A_r(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{in(x-y)} \right) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) P_r(x-y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y) dy \end{aligned}$$

comme souhaité.

(ii) On écrit

$$|A_r(f)(x) - f(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) [f(x-y) - f(x)] dy \right| \leq I_\delta + J_\delta$$

où

$$I_\delta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(y) |f(x-y) - f(x)| dy$$

et

$$J_\delta = \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} P_r(y) |f(x-y) - f(x)| dy.$$

Fixons nous donc $\epsilon > 0$ arbitraire. Comme f est continue, on a qu'il existe $M, \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tels que, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\left[|y| \leq \delta \Rightarrow |f(x-y) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} \right] \quad \text{et} \quad [|f(x)| \leq M].$$

Par ailleurs pour ce choix de δ on peut trouver r suffisamment proche de 1, tel que, pour tout $\delta \leq |x| \leq \pi$,

$$0 \leq P_r(x) \leq \frac{\epsilon}{4M}.$$

On a ainsi

$$I_\delta \leq \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} P_r(y) dy \leq \frac{\epsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) dy = \frac{\epsilon}{2}$$

et

$$J_\delta \leq \frac{1}{2\pi} 2M \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} P_r(y) dy \leq 2M \frac{\epsilon}{4M} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} dy \right] \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

En regroupant les deux inégalités on a bien, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$|A_r(f)(x) - f(x)| \leq \epsilon. \quad \spadesuit$$

Exercice 17.19 (i) Soient N un entier, a_n (respectivement b_n) les coefficients de Fourier de g en cosinus (respectivement en sinus) et

$$F_N(g)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} n x\right) \right].$$

Comme g est C^1 , on peut appliquer le Théorème 17.19 et déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N(\epsilon)$ tel que, pour tout $N \geq N(\epsilon)$,

$$|F_N(g)(x) - g(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(ii) On trouve alors

$$\begin{aligned} & \int_0^T f(x) \left[g(kx) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \right] dx \\ &= \int_0^T f(x) [g(kx) - F_N(g)(kx)] dx \\ &+ \int_0^T f(x) \left\{ \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} n k x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} n k x\right) \right] \right\} dx. \end{aligned}$$

En utilisant (i) on déduit que, pour tout $N \geq N(\epsilon)$,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T f(x) \left[g(kx) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \right] dx \right| \\ &\leq \epsilon \int_0^T |f(x)| dx + \sum_{n=1}^N |a_n| \left| \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} n k x\right) dx \right| \\ &+ \sum_{n=1}^N |b_n| \left| \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} n k x\right) dx \right|. \end{aligned}$$

En invoquant le lemme de Riemann-Lebesgue, on infère que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \int_0^T f(x) \left[g(kx) - \frac{1}{T} \int_0^T g(x) dx \right] dx \right| \leq \epsilon \int_0^T |f(x)| dx.$$

Comme $f \in L^1$ et ϵ est arbitraire on a le résultat. \spadesuit

Exercice 17.20 (i) Si $n = 0$, comme f est impaire on a que $c_0 = 0$, alors que si $n \neq 0$, on trouve

$$\begin{aligned} 2\pi c_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-in x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} e^{-in x} dx + \int_{-\pi}^0 \frac{-\pi-x}{2} e^{-in x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\pi-x}{2} (e^{-in x} - e^{in x}) dx = i \int_0^{\pi} (x-\pi) \sin(nx) dx \\ &= -i \left[\frac{(x-\pi) \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{i}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \end{aligned}$$

et ainsi

$$c_n = \frac{1}{2in} \quad \text{et} \quad F_N f(x) = \sum_{0 < |n| \leq N} \frac{e^{in x}}{2in}.$$

En invoquant le Théorème 17.16 on trouve que, pour tout $x \in]-\pi, \pi[$ (y compris $x = 0$ car $f(0^+) + f(0^-) = 0$)

$$Ff(x) - f(x) = 0.$$

(ii) On remarque que

$$\begin{aligned} \int_0^x [D_N(y) - 1] dy &= \int_0^x \left[\sum_{0 < |n| \leq N} e^{in y} \right] dy = \sum_{0 < |n| \leq N} \int_0^x e^{in y} dy \\ &= \sum_{0 < |n| \leq N} \frac{e^{in x} - 1}{in} = \sum_{0 < |n| \leq N} \frac{e^{in x}}{in} = 2F_N f(x) \end{aligned}$$

comme souhaité.

(iii) En utilisant la question précédente on trouve

$$F_N f\left(\frac{\pi}{N}\right) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{N}} [D_N(y) - 1] dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{N}} \frac{\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)y\right]}{\sin\left[\frac{y}{2}\right]} dy - \frac{\pi}{2N}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} F_N f\left(\frac{\pi}{N}\right) &= \frac{1}{2N+1} \int_0^{\pi + \frac{\pi}{2N}} \frac{\sin t}{\sin\left[\frac{t}{2N+1}\right]} dt - \frac{\pi}{2N} \\ &= \int_0^{\pi + \frac{\pi}{2N}} \frac{\sin t}{t} \frac{\frac{t}{2N+1}}{\sin\left[\frac{t}{2N+1}\right]} dt - \frac{\pi}{2N} \end{aligned}$$

ou, en d'autres termes

$$F_N f(x) = \left[\int_0^{\pi + \frac{\pi}{2N}} \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2N} \right] + \int_0^{\frac{(2N+1)\pi}{2N}} \frac{\sin t}{t} \left[\frac{\frac{t}{2N+1}}{\sin\left[\frac{t}{2N+1}\right]} - 1 \right] dt.$$

Noter que comme

$$0 \leq t \leq \frac{(2N+1)\pi}{2N} \Rightarrow 0 \leq \frac{t}{2N+1} \leq \frac{\pi}{2N}$$

et qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\left| \frac{x}{\sin x} - 1 \right| \leq \gamma, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin t}{t} \left[\frac{\frac{t}{2N+1}}{\sin \left[\frac{t}{2N+1} \right]} - 1 \right] \right| = 0 \quad \text{et} \quad \left| \frac{\sin t}{t} \left[\frac{\frac{t}{2N+1}}{\sin \left[\frac{t}{2N+1} \right]} - 1 \right] \right| \leq \gamma.$$

Par le théorème de la convergence dominée on obtient

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[F_N f \left(\frac{\pi}{N} \right) \right] = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt.$$

Finalement comme

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[f \left(\frac{\pi}{N} \right) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi - \frac{\pi}{N}}{2} \right] = \frac{\pi}{2}$$

on a bien obtenu le résultat souhaité. ♠

Exercice 17.21 Pour un contre-exemple on peut choisir

$$f(x) = \sin^2(2\pi x) \quad \text{et} \quad \tau = 1.$$

Nous montrons le résultat en deux étapes.

Etape 1. Commençons par montrer le résultat pour des fonctions trigonométriques. Si $f = 1$, le résultat est trivial. Si $f = e^{2\pi i k x}$ avec $k \neq 0$ alors $\int_0^1 e^{2\pi i k x} dx = 0$ et, puisque $e^{2\pi i k \tau} \neq 1$ (τ est irrationnel), il vient que

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\tau) = \frac{e^{2\pi i k \tau}}{N} \frac{1 - e^{2\pi i k N \tau}}{1 - e^{2\pi i k \tau}},$$

qui tend vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$. Enfin, il découle de ceci que le résultat est vrai pour tout polynôme trigonométrique.

Etape 2. Soit maintenant f une fonction générale et $\epsilon > 0$. Par le Théorème de Fejer, on sait que le polynôme trigonométrique

$$\Phi_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^n c_n e^{2\pi i k \tau}$$

converge uniformément vers f . Par conséquent, et par l'Etape 1, il existe N suffisamment grand pour que

$$\|f - \Phi_N f\|_{C^0} \leq \epsilon/3$$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_N f(n\tau) - \int_0^1 \Phi_N f(x) dx \right| \leq \epsilon/3.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(n\tau) - \int_0^1 f(x) dx \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(n\tau) - \Phi_N f(n\tau)| + \int_0^1 |\Phi_N f(x) - f(x)| dx \\ &\quad + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_N f(n\tau) - \int_0^1 \Phi_N f(x) dx \right| \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

d'où le résultat. ♠

Exercice 17.22 On distingue 4 cas. Dans les 4 cas on définit, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, une fonction 1-périodique

$$f_\epsilon^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{dans } [0, a] \cup [b, 1] \\ 1 & \text{dans } [a + \epsilon, b - \epsilon] \\ -\frac{a}{\epsilon} + \frac{x}{\epsilon} & \text{dans } [a, a + \epsilon] \\ \frac{b}{\epsilon} - \frac{x}{\epsilon} & \text{dans } [b - \epsilon, b]. \end{cases}$$

Cas 1 : $0 < a < b < 1$. On définit une fonction continue 1-périodique f_ϵ^+ par

$$f_\epsilon^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{dans } [0, a - \epsilon] \cup [b + \epsilon, 1] \\ 1 & \text{dans } [a, b] \\ -\frac{a - \epsilon}{\epsilon} + \frac{x}{\epsilon} & \text{dans } [a - \epsilon, a] \\ \frac{b + \epsilon}{\epsilon} - \frac{x}{\epsilon} & \text{dans } [b, b + \epsilon]. \end{cases}$$

Par l'Exercice 17.21, nous avons

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\epsilon^-(n\tau) \right\} = \int_0^1 f_\epsilon^- = b - a - \epsilon$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\epsilon^+(n\tau) \right\} = \int_0^1 f_\epsilon^+ = b - a + \epsilon.$$

De plus, on remarque que $0 \leq f_\epsilon^- \leq \chi \leq f_\epsilon^+ \leq 1$, d'où

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\epsilon^-(n\tau) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(n\tau) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_\epsilon^+(n\tau).$$

En passant à la limite, nous trouvons donc

$$b - a - \epsilon \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(n\tau) \right\}$$

et

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(n\tau) \right\} \leq b - a + \epsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a donc bien

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi(n\tau) \right\} = b - a = \int_0^1 \chi.$$

Cas 2 : $a = 0 < b < 1$. On choisit

$$f_\epsilon^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{dans } [b + \epsilon, 1 - \epsilon] \\ 1 & \text{dans } [0, b] \\ -\frac{1-\epsilon}{\epsilon} + \frac{x}{\epsilon} & \text{dans } [1 - \epsilon, 1] \\ \frac{b}{\epsilon} - \frac{x}{\epsilon} & \text{dans } [b, b + \epsilon] \end{cases}$$

et on l'étend par 1-périodicité. On procède alors comme dans le cas précédent.

Cas 3 : $0 < a < b = 1$. Ce cas est très semblable aux deux précédents et nous n'écrivons pas les détails.

Cas 4 : $a = 0$ et $b = 1$. Prendre $f_\epsilon^+ \equiv 1$ et procéder comme dans le Cas 1. ♠

Exercice 17.23 Soient $]a, b[\subset [0, 1[$ et $\chi_{(a,b)}$ définie par

$$\chi_{]a,b[}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]a, b[\\ 0 & \text{si } x \in [0, 1[\setminus]a, b[\end{cases}$$

et que l'on prolonge par 1-périodicité sur \mathbb{R} . On remarque que

$$\frac{1}{N} [\text{nombre de } n \in \{1, \dots, N\} : \{n\tau\} \in]a, b[] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{]a,b[}(n\tau);$$

et ainsi le résultat recherché découle immédiatement de l'Exercice 17.22. ♠

Exercice 17.24 *Etape 1.* Montrons pour commencer que la suite $\{n\tau\}_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $]0, 1[$. Supposons par l'absurde que cela ne soit pas le cas. Il existe alors $0 < a < b < 1$ tels que

$$\{n\tau\} \notin]a, b[\quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Or par l'Exercice 17.23 on sait que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} [\text{nombre de } n \in \{1, \dots, N\} : \{n\tau\} \in]a, b[] = b - a \neq 0.$$

Il s'ensuit directement que pour N assez grand il existe $1 \leq n \leq N$ tel que

$$\{n\tau\} \in]a, b[,$$

ce qui est la contradiction recherchée.

Etape 2. Montrons pour finir que Λ est dense dans \mathbb{R} . Soient $z \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Puisque $\{n\tau\}_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $]0, 1[$, on sait qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$|\{z\} - \{n\tau\}| \leq \epsilon.$$

Soient $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\{n\tau\} + m_1 = n\tau \quad \text{et} \quad \{z\} + m_2 = z.$$

On a alors trivialement

$$|z - (m_2 - m_1 + n\tau)| = |\{z\} - \{n\tau\}| \leq \epsilon,$$

d'où le résultat puisque $m_2 - m_1 + n\tau \in \Lambda$. ♠

Chapitre 18

La transformée de Fourier

18.1 Introduction

On commence par des considérations heuristiques. On rappelle que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction T -périodique sa série de Fourier est donnée par

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi n}{T} x} dx.$$

On veut maintenant traiter des fonctions non nécessairement périodiques. On peut voir de telles fonctions comme des fonctions périodiques dont la période est infinie. On pose dans la définition précédente

$$\xi = \frac{n}{T} \quad \text{et} \quad \Delta\xi = \frac{1}{T}.$$

On a que

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-i \frac{2\pi n}{T} y} dy = \Delta\xi \int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy$$

et donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i \xi x} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\Delta\xi \int_{-T/2}^{T/2} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy \right] e^{2\pi i \xi x}. \end{aligned}$$

En laissant (il s'agit ici de considérations purement formelles) $T \rightarrow \infty$ et en remplaçant la somme par l'intégrale, on obtient

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy \right] e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Si on définit alors la *transformée de Fourier* comme

$$\mathfrak{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy$$

on trouve que

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Donc on a que la *transformée inverse de Fourier* est donnée par la formule

$$\mathfrak{F}^{-1}f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

On va maintenant essayer de formaliser ceci.

18.2 Définitions et exemples

Définition 18.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ c'est à dire que f est mesurable et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

La *transformée de Fourier* de f est définie par

$$\mathfrak{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy.$$

Remarque Parfois la transformée de Fourier est définie par

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i \xi y} dy$$

ou en remplaçant le coefficient $1/\sqrt{2\pi}$ par 1 ou par $1/2\pi$. ♠

Exemple Trouver la transformée de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Discussion Tout d'abord on observe que $f \in L^1(\mathbb{R})$ car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{-1}^1 dx = 2 < \infty.$$

On a par définition

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy = \int_{-1}^1 e^{-2\pi i \xi y} dy = \left[-\frac{e^{-2\pi i \xi y}}{2\pi i \xi} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{\pi \xi} \frac{e^{2\pi i \xi} - e^{-2\pi i \xi}}{2i} = \frac{\sin(2\pi \xi)}{\pi \xi}. \quad \spadesuit\end{aligned}$$

Exemple Soit $f(x) = e^{-|x|}$. Déterminer la transformée de Fourier de f . Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi \xi)}{1 + 4\pi^2 \xi^2} d\xi.$$

Discussion On a que $f \in L^1(\mathbb{R})$ car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 2 < \infty.$$

On peut donc calculer \widehat{f} donnée par

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} e^{-2\pi i \xi y} dy \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{y(1-2\pi i \xi)} dy + \int_0^{+\infty} e^{-y(1+2\pi i \xi)} dy \\ &= \left[\frac{e^{y(1-2\pi i \xi)}}{1-2\pi i \xi} \right]_{-\infty}^0 - \left[\frac{e^{-y(1+2\pi i \xi)}}{1+2\pi i \xi} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{2}{1+4\pi^2 \xi^2} - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-y(1+2\pi i \xi)}}{1+2\pi i \xi} \right] - \lim_{y \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{y(1-2\pi i \xi)}}{1-2\pi i \xi} \right].\end{aligned}$$

Comme $\xi \in \mathbb{R}$ (et donc $2\pi i \xi \neq \pm 1$) on a

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left| e^{-(1+2\pi i \xi)y} \right| = \lim_{y \rightarrow +\infty} |e^{-y}| = 0$$

et idem pour $\lim_{y \rightarrow -\infty} |e^{(1-2\pi i \xi)y}| = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$. On a ainsi montré que

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{1+4\pi^2 \xi^2}.$$

Noter que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ c'est à dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)| d\xi < \infty.$$

Par anticipation de la formule d'inversion, on peut déduire que

$$e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 e^{2\pi i \xi x}}{1+4\pi^2 \xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cos(2\pi \xi x)}{1+4\pi^2 \xi^2} d\xi + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin(2\pi \xi x)}{1+4\pi^2 \xi^2} d\xi.$$

On note que la partie imaginaire est nulle car on intègre une fonction impaire (et L^1) sur tout l'intervalle réel et on a ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cos(2\pi \xi x)}{1 + 4\pi^2 \xi^2} d\xi.$$

En particulier, si $x = 0$ ou $x = 1$ on trouve

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 d\xi}{1 + 4\pi^2 \xi^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{e} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \cos(2\pi \xi)}{1 + 4\pi^2 \xi^2} d\xi. \quad \spadesuit$$

18.3 Premiers résultats

Théorème 18.2 Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes ont lieu.

(i) **Continuité.** La fonction $\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est alors continue et

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0 \quad \text{et} \quad \|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}.$$

(ii) **Linéarité.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathfrak{F}(a f + b g) = a \mathfrak{F}(f) + b \mathfrak{F}(g).$$

(iii) **Dérivées.** Si de plus $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathfrak{F}(f')(\xi) = 2\pi i \xi \mathfrak{F}(f)(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Plus généralement si $n \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ pour $k = 1, 2, \dots, n$, alors

$$\mathfrak{F}(f^{(n)})(\xi) = (2\pi i \xi)^n \mathfrak{F}(f)(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

(iv) **Dérivées de la transformée.** Si de plus $h(x) = x f(x)$ est telle que $h \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$-2\pi i \mathfrak{F}(h)(\xi) = -2\pi i \widehat{h}(\xi) = \mathfrak{F}(f)'(\xi) = \frac{d}{d\xi} [\widehat{f}(\xi)], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

(v) **Translation.** Si $a \in \mathbb{R}$ et si

$$h(x) = f(x + a)$$

alors

$$\widehat{h}(\xi) = \mathfrak{F}(h)(\xi) = e^{2\pi i a \xi} \mathfrak{F}(f)(\xi) = e^{2\pi i a \xi} \widehat{f}(\xi).$$

(vi) **Homothétie.** Si $a > 0$ et si

$$h(x) = f(ax)$$

alors

$$\widehat{h}(\xi) = \mathfrak{F}(h)(\xi) = \frac{1}{a} \mathfrak{F}(f)\left(\frac{\xi}{a}\right) = \frac{1}{a} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

(vii) **Produit.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \widehat{g}(x) dx.$$

Remarque (i) Il faut comme d'habitude être prudent quand on dit, par exemple, que $f' \in L^1$. On suppose ici, pour faire simple, que f est continue, sa dérivée f' est continue par morceaux et $f' \in L^1$.

(ii) Comme par la première partie du théorème on a $f, g \in L^1$ et $\widehat{f}, \widehat{g} \in L^\infty$, on déduit que $\widehat{f}g, f\widehat{g} \in L^1$. Et donc la propriété (vii) du théorème a un sens. ♠

Ces propriétés sont élémentaires (cf. Exercice 18.1). Voyons maintenant un exemple important.

Proposition 18.3 *Soit*

$$f(x) = e^{-\pi x^2}$$

alors $\widehat{f}(\xi) = f(\xi)$.

Démonstration On a clairement que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et donc

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx$$

est bien définie. De plus $\widehat{f}(0) = 1$, car on sait (facile à voir et classique) que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

Par la propriété (iv) du Théorème 18.2 (on a clairement que $h(x) = x e^{-\pi x^2}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$) on déduit que

$$\frac{d}{d\xi} [\widehat{f}(\xi)] = -2\pi i \widehat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\pi i x) e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

En observant que

$$f'(x) = -2\pi x f(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2}$$

on obtient

$$\frac{d}{d\xi} [\widehat{f}(\xi)] = i \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Par la propriété (iii) du théorème (noter que $f' \in L^1(\mathbb{R})$) on a donc que

$$\frac{d}{d\xi} [\widehat{f}(\xi)] = i (2\pi i \xi) \widehat{f}(\xi) = -2\pi \xi \widehat{f}(\xi).$$

Une intégration immédiate donne que

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(0) e^{-\pi \xi^2}$$

Comme $\widehat{f}(0) = 1$, on a bien montré que

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2} = f(\xi)$$

ce qui est le résultat souhaité. ■

Théorème 18.4 (Produit de convolution) Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et soit le produit de convolution défini par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt$$

alors $f * g$ est bien définie pour presque tous les $x \in \mathbb{R}$, $f * g = g * f$ et

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

$$\mathfrak{F}(f * g) = \mathfrak{F}(f) \mathfrak{F}(g).$$

Démonstration La démonstration est très semblable à celle de l'Exercice 17.13 (valable sur $] -\pi, \pi[$).

Etape 1. (i) Un changement de variables donne immédiatement que $f * g = g * f$.

(ii) Posons

$$h(x, t) = f(x-t) g(t).$$

Noter que, pour presque tout t ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x, t)| dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)| |g(t)| dx = |g(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)| dx \\ &= |g(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| dy = |g(t)| \|f\|_{L^1} < \infty. \end{aligned}$$

De plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x, t)| dx \right] dt = \|f\|_{L^1} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < \infty.$$

Par le Théorème de Tonelli (cf. Théorème 16.34) on déduit que $h \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

(iii) Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |(f * g)(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x, t)| dt \right] dx. \end{aligned}$$

On applique alors le Théorème de Fubini (cf. Théorème 16.35) et on déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x, t)| dt \right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x, t)| dx \right] dt$$

et donc par (ii)

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Ainsi la transformée de Fourier de $f * g$ est bien définie.

Etape 2. Par définition de la transformée de Fourier on a (en utilisant à nouveau le Théorème de Fubini)

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(f * g)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt \right] e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) e^{-2\pi i \xi (x-t)} dx \right] e^{-2\pi i \xi t} g(t) dt \end{aligned}$$

et donc, en posant $z = x - t$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(f * g)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-2\pi i \xi z} dz \right] e^{-2\pi i \xi t} g(t) dt \\ &= \mathfrak{F}(f)(\xi) \mathfrak{F}(g)(\xi) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé. ■

18.4 La formule d'inversion

Théorème 18.5 (Formule d'inversion) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Remarque Noter que, quitte à redéfinir la fonction sur un ensemble de mesure nulle, la fonction f est, a posteriori, continue. En effet le membre de droite, dans la formule d'inversion, est, par une démonstration analogue à celle de (i) dans le Théorème 18.2, continu car $\widehat{f} \in L^1$. Comme le membre de droite est égal à $f(x)$ pour presque tous les x on a l'assertion. ♠

Démonstration *Etape 1.* Pour $\epsilon > 0$ posons

$$K_\epsilon(x) = e^{-\pi \epsilon^2 x^2}.$$

Noter que

$$0 \leq K_\epsilon(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad K_\epsilon(x) \rightarrow 1 \quad \text{si} \quad \epsilon \rightarrow 0. \quad (18.1)$$

Par ailleurs en invoquant le Théorème 18.2 (vi) et la Proposition 18.3, on a

$$\widehat{K}_\epsilon(\xi) = \frac{1}{\epsilon} e^{-\frac{\pi \xi^2}{\epsilon^2}}.$$

Noter que $\widehat{K}_\epsilon > 0$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{K}_\epsilon(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\epsilon} e^{-\frac{\pi \xi^2}{\epsilon^2}} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2} dy = 1. \quad (18.2)$$

Etape 2. Définissons ensuite

$$f_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) K_\epsilon(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Comme $\widehat{f} \in L^1$ et (18.1) a lieu, on infère du théorème de la convergence dominée que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [f_\epsilon(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi. \quad (18.3)$$

Supposons qu'on ait montré (cf. Etape 3) que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f_\epsilon - f\|_{L^1} = 0.$$

On déduit alors du Théorème 16.33 que, à une sous suite près,

$$\lim_{\epsilon_\nu \rightarrow 0} [f_{\epsilon_\nu}(x)] = f(x) \quad \text{p.p.}$$

Ceci combiné avec (18.3) donne immédiatement le résultat.

Etape 3. Montrons donc que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f_\epsilon - f\|_{L^1} = 0.$$

Etape 3.1. Observer tout d'abord que si

$$h(y) = K_\epsilon(y) e^{2\pi i y x}$$

alors

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) e^{-2\pi i \xi y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\epsilon(y) e^{2\pi i y x} e^{-2\pi i \xi y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_\epsilon(y) e^{-2\pi i (\xi - x)y} dy = \widehat{K}_\epsilon(\xi - x). \end{aligned}$$

Par le calcul précédent et la propriété (vii) dans le Théorème 18.2, on déduit que

$$\begin{aligned} f_\epsilon(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) K_\epsilon(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \widehat{K}_\epsilon(\xi - x) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi + x) \widehat{K}_\epsilon(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Etape 3.2. De l'étape précédente et de (18.2) on obtient

$$f_\epsilon(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\xi + x) - f(x)] \widehat{K}_\epsilon(\xi) d\xi$$

et donc

$$\begin{aligned} \|f_\epsilon - f\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\epsilon(x) - f(x)| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi + x) - f(x)| \widehat{K}_\epsilon(\xi) d\xi dx = R_\epsilon. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} R_\epsilon &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(\xi + x) - f(x)|}{\epsilon} e^{-\frac{\pi \xi^2}{\epsilon^2}} d\xi dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\beta \epsilon + x) - f(x)| e^{-\pi \beta^2} d\beta dx. \end{aligned}$$

Et donc par le Théorème de Fubini (cf. Théorème 16.35) on obtient

$$R_\epsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\beta \epsilon + x) - f(x)| e^{-\pi \beta^2} dx d\beta.$$

Etape 3.3. La démonstration sera complète dès que nous aurons montré que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [R_\epsilon] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u_\epsilon(\beta) d\beta \right] = 0$$

où

$$u_\epsilon(\beta) = e^{-\pi \beta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\beta \epsilon + x) - f(x)| dx.$$

On observe que, comme

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\beta \epsilon + x) - f(x)| dx \leq 2 \|f\|_{L^1},$$

alors

$$0 \leq u_\epsilon(\beta) \leq v(\beta) = 2 \|f\|_{L^1} e^{-\pi \beta^2} \quad \text{et} \quad v \in L^1(\mathbb{R}).$$

Par ailleurs

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\beta \epsilon + x) - f(x)| dx \right] = 0$$

(ceci est immédiat si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et dans le cas $f \in L^1(\mathbb{R})$ par approximation du cas précédent, cf. Exercice 16.15) et donc

$$u_\epsilon(\beta) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \epsilon \rightarrow 0.$$

On est donc en mesure d'appliquer le théorème de la convergence dominée et de déduire que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [R_\epsilon] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u_\epsilon(\beta) d\beta \right] = 0$$

qui est le résultat souhaité. ■

On a comme pour les séries de Fourier des transformées en sinus et cosinus (évident).

Proposition 18.6 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors les résultats suivants ont lieu.*

(i) **Transformée en cosinus.** *Si f est paire, alors*

$$\mathfrak{F}(f)(\xi) = 2 \int_0^{+\infty} f(y) \cos(2\pi \xi y) dy$$

et en tout point x de continuité de f

$$f(x) = 2 \int_0^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \cos(2\pi \xi x) d\xi.$$

(ii) **Transformée en sinus.** *Si f est impaire, alors*

$$\mathfrak{F}(f)(\xi) = -2i \int_0^{+\infty} f(y) \sin(2\pi \xi y) dy$$

et en tout point x de continuité de f

$$f(x) = 2i \int_0^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \sin(2\pi \xi x) d\xi.$$

18.5 L'identité de Plancherel

Théorème 18.7 (Identité de Plancherel) *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et*

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 dx \right)^{1/2} = \|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Nous commençons par prouver un résultat plus faible.

Lemme 18.8 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Remarque Le théorème et le lemme sont, respectivement, l'équivalent de l'identité de Parseval et de l'inégalité de Bessel que nous avons vues pour les séries de Fourier. ♠

Démonstration (Lemme 18.8) Soient $K_\epsilon(x) = e^{-\pi(\frac{x}{\epsilon})^2}/\epsilon$ et

$$f_\epsilon(x) = (f * K_\epsilon)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \left(\frac{1}{\epsilon} e^{-\pi(\frac{x-y}{\epsilon})^2} \right) dy.$$

Etape 1. Commençons par montrer que

$$\|f_\epsilon\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

En effet on a que

$$\begin{aligned} \|f_\epsilon\|_{L^2}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) K_\epsilon(x-y) dy \right)^2 dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)| K_\epsilon(x-y) dy \right)^2 dx \end{aligned}$$

en d'autres termes

$$\|f_\epsilon\|_{L^2}^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{K_\epsilon(x-y)} \sqrt{K_\epsilon(x-y)} |f(y)|^2 dy \right)^2 dx.$$

On déduit donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que

$$\|f_\epsilon\|_{L^2}^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} K_\epsilon(x-y) dy \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} K_\epsilon(x-y) |f(y)|^2 dy \right) dx.$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} K_\epsilon(x-y) dy = 1$, on trouve (par le Théorème de Fubini)

$$\begin{aligned} \|f_\epsilon\|_{L^2}^2 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_\epsilon(x-y) |f(y)|^2 dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} K_\epsilon(x-y) dx \right) |f(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy = \|f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Etape 2 (définition et estimation de F_ϵ). Comme (cf. Théorème 18.2 (i)) $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$, on trouve que la fonction

$$g_\epsilon(\xi) = \left| \widehat{f}(\xi) \right|^2 e^{-\pi(\epsilon\xi)^2}$$

est telle que $g_\epsilon \in L^1(\mathbb{R})$, pour tout $\epsilon > 0$ (nous devons démontrer que le résultat reste vrai pour $\epsilon = 0$). Posons alors

$$F_\epsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{f}(\xi) \right|^2 e^{-\pi(\epsilon\xi)^2} d\xi.$$

Comme $\left|\widehat{f}\right|^2 = \widehat{f}\widehat{\overline{f}}$ et que $f = \overline{\overline{f}} \in \mathbb{R}$, on a, par définition de la transformée de Fourier, que

$$F_\epsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{2\pi i \xi y} dy \right) \right] e^{-\pi(\epsilon \xi)^2} d\xi.$$

En invoquant le Théorème de Fubini on trouve que

$$F_\epsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(y) e^{-2\pi i \xi(x-y)} e^{-\pi(\epsilon \xi)^2} d\xi dx dy.$$

En se rappelant la Proposition 18.3, on obtient que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[e^{-\pi(\epsilon \xi)^2} \right] e^{-2\pi i \xi z} d\xi = \frac{1}{\epsilon} e^{-\pi\left(\frac{z}{\epsilon}\right)^2}$$

et on déduit donc (en utilisant, une fois de plus, le Théorème de Fubini) que

$$F_\epsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(y) \left(\frac{1}{\epsilon} e^{-\pi\left(\frac{x-y}{\epsilon}\right)^2} \right) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f_\epsilon(x) dx.$$

On a ainsi obtenu (en utilisant aussi l'Etape 1) que

$$0 \leq F_\epsilon \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| |f_\epsilon(x)| dx \leq \|f\|_{L^2} \|f_\epsilon\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}^2.$$

Etape 3 (passage à la limite pour F_ϵ). Le Théorème de la convergence monotone nous permet de déduire que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [F_\epsilon] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{f}(\xi) \right|^2 e^{-\pi(\epsilon \xi)^2} d\xi \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi$$

qui, couplé à l'Etape 2, implique directement que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 dx$$

et le lemme est démontré. ■

Tournons nous vers la démonstration du théorème.

Démonstration (Théorème 18.7) *Etape 1 (définition de g).* Définissons $f_-(x) = f(-x)$ et observer que

$$\widehat{f_-}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-y) e^{-2\pi i \xi y} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{2\pi i \xi z} dz = \overline{\widehat{f}(\xi)}.$$

Par ailleurs on définit

$$g = f * f_-.$$

Etape 2 (continuité de g). On remarque que la fonction g est continue. En effet

$$g(x + \epsilon) - g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) [f(y - (x + \epsilon)) - f(y - x)] dy$$

et donc par l'inégalité de Hölder on a

$$|g(x + \epsilon) - g(x)| \leq \|f\|_{L^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [f(y - (x + \epsilon)) - f(y - x)]^2 dy \right)^{1/2}.$$

En posant $z = y - x$ et en invoquant l'Exercice 16.15 on a que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(y - (x + \epsilon)) - f(y - x)]^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(z - \epsilon) - f(z)]^2 dz \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

et par conséquent g est continue.

Etape 3 (conclusion). 1) Par le Théorème 18.4, on déduit que

$$\widehat{g} = \mathfrak{F}(f * f_-) = \mathfrak{F}(f) \mathfrak{F}(f_-) = \widehat{f} \widehat{f_-} = \widehat{f} \overline{\widehat{f}} = |\widehat{f}|^2.$$

2) Comme $g \in L^1$ (car $f \in L^1$ et donc $f * f_- \in L^1$) et (par le Lemme 18.8) $\widehat{g} = |\widehat{f}|^2 \in L^1$, on obtient de la formule d'inversion que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (la fonction g étant continue),

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

En résumé on a ainsi obtenu

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) f_-(0 - x) dx \\ &= g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. ■

18.6 Quelques applications

Ici on s'inspire de [23].

18.6.1 La formule sommatoire de Poisson

On commence par définir l'espace de Schwartz (cf. Exercice 18.2).

Définition 18.9 L'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telles que, pour tous $k, l \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |x^k| \left| f^{(l)}(x) \right| \right\} < \infty.$$

Remarque (i) Noter que pour tous $k, l \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[|x^k| \left| f^{(l)}(x) \right| \right] = 0.$$

En effet comme

$$|x^k| \left| f^{(l)}(x) \right| = \frac{|x^{k+1}| \left| f^{(l)}(x) \right|}{|x|} \leq \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} \{ |x^{k+1}| \left| f^{(l)}(x) \right| \}}{|x|}$$

on a tout de suite le résultat.

(ii) En particulier si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$|f(x)| \leq \frac{\gamma}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad \spadesuit$$

Théorème 18.10 (Formule sommatoire de Poisson) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et en particulier (en posant $x = 0$)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n).$$

Démonstration Par la remarque ci-dessus, comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (cf. Exercice 18.2), il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\left| \widehat{f}(x) \right|, |f(x)| \leq \frac{\gamma}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (18.4)$$

Etape 1. Observons ensuite (cf. plus bas) que, comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la suite

$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^N f(x+n)$$

converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue F , qui est clairement 1-périodique et qui est donnée par

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n).$$

Montrons la convergence uniforme de la série. Soient $s > 0$, $|x| \leq s$ et $2s \leq |n|$, alors

$$|n+x| \geq |n| - |x| \geq |n| - s \geq \frac{|n|}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+(x+n)^2} \leq \frac{4}{4+n^2} \leq \frac{4}{n^2}.$$

En combinant l'inégalité ci-dessus et (18.4) on a que si $|x| \leq s$ et $2s \leq M < |n| \leq N$, alors

$$|F_N(x) - F_M(x)| \leq \sum_{M < |n| \leq N} |f(x+n)| \leq \sum_{M < |n| \leq N} \frac{4\gamma}{n^2}$$

et la convergence uniforme est démontrée.

Etape 2. Noter que la fonction

$$G_N(x) = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

converge uniformément (cf. plus bas) vers une fonction continue G , qui est évidemment 1-périodique et qui est donnée par

$$G(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Comme

$$|G_N(x) - G_M(x)| \leq \sum_{M < |n| \leq N} |\widehat{f}(n)| \leq \sum_{M < |n| \leq N} \frac{\gamma}{1+n^2}$$

la convergence uniforme est démontrée.

Etape 3. (i) Les coefficients de Fourier (cf. Théorème 17.21) de G , notés g_n , sont clairement $\widehat{f}(n)$.

(ii) Les coefficients de Fourier de F , notés f_n , sont donnés par

$$f_n = \int_{-1/2}^{1/2} F(x) e^{-2\pi i n x} dx = \int_0^1 F(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Comme la série $\sum f(x+n)$ converge absolument et uniformément sur $[0, 1]$ on déduit que

$$\begin{aligned} f_n &= \int_0^1 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(x+m) e^{-2\pi i n x} dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(x+m) e^{-2\pi i n x} dx \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_m^{m+1} f(z) e^{-2\pi i n z} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-2\pi i n z} dz = \widehat{f}(n). \end{aligned}$$

Et donc $g_n = f_n$.

Etape 4. Par le Corollaire du Théorème de Féjer (Corollaire 17.15), on déduit que $F = G$. ■

On obtient directement le corollaire suivant.

Corollaire 18.11 *Soit*

$$\vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 z}.$$

Alors

$$\vartheta(1/z) = \sqrt{z} \vartheta(z), \quad \forall z > 0.$$

Remarque La fonction ϑ peut naturellement être étendue à $\operatorname{Re} z > 0$ et la formule ci dessus est alors encore vraie. ♠

Démonstration Fixons nous $z > 0$. Il suffit d'appliquer le théorème à $f(y) = e^{-\pi y^2 z}$, qui est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (cf. Exercice 18.2). On a par la Proposition 18.3 et le Théorème 18.2 (vi) que

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-\pi \frac{\xi^2}{z}}.$$

Par conséquent on trouve que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 z} = \vartheta(z)$$

et

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \frac{n^2}{z}} = \frac{1}{\sqrt{z}} \vartheta(1/z).$$

Le résultat suit immédiatement. ■

18.6.2 Une autre application

Théorème 18.12 *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors*

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq 4\pi \|xf\|_{L^2} \left\| \xi \widehat{f} \right\|_{L^2}$$

ou en d'autres termes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 dx \leq 4\pi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Remarque (i) Le résultat est aussi vrai, avec la même démonstration, pour des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

(ii) On peut montrer (cf. Théorème 4.1 page 158 dans [23]) qu'il y a égalité si et seulement si il existe $\lambda, \mu > 0$ et

$$f(x) = \mu \left(\frac{\pi}{2\lambda} \right)^{1/4} e^{-\lambda x^2}. \quad \spadesuit$$

Démonstration Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'intégration par parties qui suit est légale, on trouve

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^2}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{d}{dx} [(f(x))^2] dx \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} x [2 f'(x) f(x)] dx \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)| |f'(x)| dx\end{aligned}$$

et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on infère que

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Par ailleurs de l'identité de Plancherel (cf. Théorème 18.7) et du Théorème 18.2 (iii) on déduit que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f'}(\xi)|^2 d\xi = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

En combinant les deux résultats, on a bien prouvé le théorème. ■

18.7 La transformée de Fourier multidimensionnelle

La transformée de Fourier se généralise facilement à \mathbb{R}^n . Nous ne rentrons pas dans les détails mais indiquons que pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ on définit la *transformée de Fourier* de f par

$$\mathfrak{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle \xi; y \rangle} dy$$

où $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $\langle \xi; y \rangle = \sum_{i=1}^n \xi_i y_i$. Toutes les propriétés principales restent valables et on a le théorème suivant (sans démonstration).

Théorème 18.13 Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Les propriétés suivantes ont lieu.

(i) **Continuité.** La fonction $\widehat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ est alors continue et

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0 \quad \text{et} \quad \|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}.$$

(ii) **Linéarité.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathfrak{F}(af + bg) = a \mathfrak{F}(f) + b \mathfrak{F}(g).$$

(iii) **Dérivées.** Si de plus $f_{x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\mathfrak{F}(f_{x_j})(\xi) = 2\pi i \xi_j \mathfrak{F}(f)(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

et idem pour les dérivées d'ordre supérieur.

(iv) **Translation.** Si $a \in \mathbb{R}^n$ et si

$$h(x) = f(x + a)$$

alors

$$\widehat{h}(\xi) = \mathfrak{F}(h)(\xi) = e^{2\pi i \langle a; \xi \rangle} \mathfrak{F}(f)(\xi) = e^{2\pi i \langle a; \xi \rangle} \widehat{f}(\xi).$$

(v) **Homothétie.** Si $a > 0$ et si

$$h(x) = f(ax)$$

alors

$$\widehat{h}(\xi) = \mathfrak{F}(h)(\xi) = \frac{1}{a^n} \mathfrak{F}(f)\left(\frac{\xi}{a}\right) = \frac{1}{a^n} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

(vi) **Produit.**

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x) dx.$$

(vii) **Transformée de la gaussienne.** Soit

$$f(x) = e^{-\pi|x|^2}$$

alors $\widehat{f}(\xi) = f(\xi)$.

(viii) **Convolution.** Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g$ est bien définie pour presque tous les $x \in \mathbb{R}^n$, $f * g = g * f$ et

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}$$

$$\mathfrak{F}(f * g) = \mathfrak{F}(f) \mathfrak{F}(g).$$

De même on a la généralisation de la formule d'inversion et de l'identité de Plancherel.

Théorème 18.14 (i) Formule d'inversion. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle \xi; x \rangle} d\xi.$$

(ii) **Identité de Plancherel.** Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f(x))^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

18.8 Exercices

18.8.1 Exercices sur la transformée de Fourier

On pourra compléter les exercices ci-dessous par les nombreux exercices dans les Chapitres 15 et 16 de [9].

Exercice 18.1 (cf. Théorème 18.2). Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ et la transformée de Fourier de f définie par

$$\mathfrak{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Montrer les propriétés suivantes.

(i) **Continuité.** La fonction $\widehat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue,

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} \quad \text{et} \quad \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0.$$

Indication. Pour le second résultat, utiliser Théorème 16.21.

(ii) **Linéarité.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathfrak{F}(af + bg) = a\mathfrak{F}(f) + b\mathfrak{F}(g).$$

(iii) **Transformée des dérivées.** Si de plus $f \in C^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathfrak{F}(f')(\xi) = (2\pi i \xi) \mathfrak{F}(f)(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Plus généralement si $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(\mathbb{R})$, $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ pour $k = 1, 2, \dots, n$, alors

$$\mathfrak{F}(f^{(n)})(\xi) = (2\pi i \xi)^n \mathfrak{F}(f)(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Indication : On admettra le résultat suivant : si $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} [f(x)] = 0.$$

(iv) **Dérivées de la transformée.** Si de plus $h(x) = xf(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathfrak{F}(f)'(\xi) = -2\pi i \mathfrak{F}(h)(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Plus généralement, si $l \in \mathbb{N}$ et $h_l(x) = x^l f(x)$ appartient $L^1(\mathbb{R})$, alors

$$[\mathfrak{F}(f)]^{(l)}(\xi) = \widehat{f}^{(l)}(\xi) = (-2\pi i)^l \mathfrak{F}(h_l)(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

(v) **Translation.** Si $a \in \mathbb{R}$ et $h(x) = f(x+a)$, alors

$$\mathfrak{F}(h)(\xi) = e^{2\pi i a \xi} \mathfrak{F}(f)(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

(vi) **Homothétie.** Si $a > 0$ et $h(x) = f(ax)$, alors

$$\mathfrak{F}(h)(\xi) = \frac{1}{a} \mathfrak{F}(f)\left(\frac{\xi}{a}\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

(vii) **Produit.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \widehat{g}(x) dx.$$

Exercice 18.2 L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telles que, pour tous $k, l \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |x^k| \left| f^{(l)}(x) \right| \right\} < \infty.$$

(i) Montrer que la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(ii) Montrer que $C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

(iii) Montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

18.8.2 Exercices sur la transformée de Laplace

Définition 18.15 (Transformée de Laplace) Soit $f : \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable (étendue à \mathbb{R} de manière que $f(x) = 0, \forall x < 0$) et $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\gamma_0 t} dt < \infty$$

(γ_0 est appelée l'abscisse de convergence de f). La transformée de Laplace de f est définie par

$$\mathfrak{L}(f)(z) = F(z) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz} dt, \quad \forall z \in \overline{O}$$

où $O = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \gamma_0\}$.

Exercice 18.3 Soient f, g, γ_0 et O comme dans la définition précédente. Montrer les propriétés suivantes.

(i) **Holomorphie.** La transformée de Laplace F est holomorphe dans O et

$$F'(z) = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-tz} dt = -\mathfrak{L}(h)(z), \quad \forall z \in O$$

où $h(t) = t f(t)$.

Indication. *Montrer et utiliser l'inégalité*

$$\left| \frac{e^{-th} - 1}{h} \right| \leq t e^{t|h|}, \quad \forall h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad t \geq 0.$$

(ii) **Linéarité.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathfrak{L}(af + bg) = a \mathfrak{L}(f) + b \mathfrak{L}(g).$$

(iii) **Dérivées.** Si de plus $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ et $\int_0^{+\infty} |f'(t)| e^{-\gamma_0 t} dt < \infty$, alors

$$\mathfrak{L}(f')(z) = z \mathfrak{L}(f)(z) - f(0), \quad \forall z \in \overline{O}.$$

Indication. *On admettra que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [f(N) e^{-\gamma_0 N}] = 0.$$

Plus généralement si $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(\mathbb{R}_+)$ et $\int_0^{+\infty} |f^{(k)}(t)| e^{-\gamma_0 t} dt < \infty$, pour $k = 0, 1, 2, \dots, n$, alors

$$\mathfrak{L}(f^{(n)})(z) = z^n \mathfrak{L}(f)(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^k f^{(n-k-1)}(0), \quad \forall z \in \overline{O}.$$

(iv) **Intégration.** Si $f \in C(\mathbb{R})$ et

$$\varphi(t) = \int_0^t f(s) ds$$

et $\int_0^{+\infty} |\varphi(t)| e^{-t\gamma_0} dt < \infty$ alors

$$\mathfrak{L}(\varphi)(z) = \frac{\mathfrak{L}(f)(z)}{z}, \quad \forall z \in \overline{O}.$$

(v) **Décalage.** Si $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ et

$$\varphi(t) = e^{-bt} f(at)$$

alors

$$\mathfrak{L}(\varphi)(z) = \frac{1}{a} \mathfrak{L}(f)\left(\frac{z+b}{a}\right), \quad \forall z \text{ tel que } \operatorname{Re}\left(\frac{z+b}{a}\right) \geq \gamma_0.$$

(vi) **Convolution.** Si

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s) g(s) ds = \int_0^t f(t-s) g(s) ds,$$

alors

$$\mathfrak{L}(f * g)(z) = \mathfrak{L}(f)(z) \mathfrak{L}(g)(z), \quad \forall z \in \overline{O}.$$

Exercice 18.4 (Formule d'inversion) Soient f une fonction mesurable ($f(t) \equiv 0$ si $t < 0$) et $F(z) = \mathfrak{L}(f)(z)$ sa transformée de Laplace satisfaisant les conditions suivantes

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-\gamma t} dt < \infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\gamma + 2\pi i s)| ds < \infty,$$

pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma + 2\pi i s) e^{(\gamma + 2\pi i s)t} ds = f(t).$$

Indication. Appliquer la formule inverse de la transformée de Fourier à $e^{-\gamma t} f(t)$.

18.9 Corrigés

Exercice 18.1 (i) Etape 1. On a

$$\left| \widehat{f}(\xi) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1}$$

et donc

$$\left\| \widehat{f} \right\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}.$$

Etape 2. Montrons que \widehat{f} est continue. Soit $\xi, h \in \mathbb{R}$. On a

$$\left| \widehat{f}(\xi + h) - \widehat{f}(\xi) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left| e^{-2\pi i(\xi+h)x} - e^{-2\pi i \xi x} \right| dx.$$

Remarquant que

$$|f(x)| \left| e^{-2\pi i(\xi+h)x} - e^{-2\pi i \xi x} \right| \leq 2|f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| e^{-2\pi i(\xi+h)x} - e^{-2\pi i \xi x} \right| = 0$$

le théorème de la convergence dominée implique que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left| e^{-2\pi i(\xi+h)x} - e^{-2\pi i \xi x} \right| dx = 0,$$

d'où la continuité de \widehat{f} .

Etape 3. Soit $\epsilon > 0$. Utilisant le Théorème 16.21, il existe $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec

$$\int_{\mathbb{R}} |f - g| \leq \epsilon.$$

Intégrant par partie, on trouve que, pour $\xi \neq 0$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right| = \left| \frac{1}{2\pi \xi} \int_{\mathbb{R}} g'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi \xi} \|g'\|_{L^1} \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0.$$

Comme

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right| \leq \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right| + \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx \leq |\widehat{g}(\xi)| + \epsilon$$

et donc

$$0 \leq \limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\xi)| \leq \epsilon$$

on obtient le résultat puisque ϵ est arbitraire.

(ii) Évident.

(iii) On a, faisant une intégration par partie et utilisant l'indication,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(f')(\xi) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f' e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} [f(N) e^{-2\pi i \xi N} - f(-N) e^{2\pi i \xi N}] \\ &\quad - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) (-2\pi i \xi) e^{-2\pi i \xi x} dx \end{aligned}$$

et donc

$$\mathfrak{F}(f')(\xi) = 2\pi i \xi \mathfrak{F}(f)(\xi).$$

Par induction on a immédiatement que

$$\mathfrak{F}(f^{(n)})(\xi) = (2\pi i \xi)^n \mathfrak{F}(f)(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

(iv) Nous allons montrer la formule

$$[\mathfrak{F}(f)]^{(l)}(\xi) = \widehat{f}^{(l)}(\xi) = (-2\pi i)^l \mathfrak{F}(h_l)(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad (18.5)$$

par récurrence sur $l \in \mathbb{N}$.

Etape 1. Pour $l = 1$, soit $\xi \in \mathbb{R}$ et $\epsilon \neq 0$. On doit montrer que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\widehat{f}(\xi + \epsilon) - \widehat{f}(\xi)}{\epsilon} + 2\pi i \widehat{h}(\xi) \right] = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} &\frac{\widehat{f}(\xi + \epsilon) - \widehat{f}(\xi)}{\epsilon} + 2\pi i \widehat{h}(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} \left[\frac{e^{-2\pi i \epsilon x} - 1}{\epsilon} + 2\pi i x \right] dx. \end{aligned}$$

Utilisant le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $\xi_1, \xi_2 \in [0, \epsilon]$ tels que

$$\frac{\cos(-2\pi \epsilon x) - 1}{\epsilon} = -2\pi x \sin(2\pi \xi_1 x) \quad \text{et} \quad \frac{\sin(-2\pi \epsilon x)}{\epsilon} = -2\pi x \cos(2\pi \xi_2 x)$$

et donc

$$\left| \frac{e^{-2\pi i \epsilon x} - 1}{\epsilon} \right| \leq 4\pi |x|.$$

Remarquant que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{e^{-2\pi i \epsilon x} - 1}{\epsilon} + 2\pi i x \right] = 0$$

et que

$$\left| f(x) e^{-2\pi i \xi x} \left[\frac{e^{-2\pi i \epsilon x} - 1}{\epsilon} + 2\pi i x \right] \right| \leq 6\pi |x f(x)| \in L^1(\mathbb{R}),$$

on a par le théorème de la convergence dominée que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} \left[\frac{e^{-2\pi i \epsilon x} - 1}{\epsilon} + 2\pi i x \right] dx = 0,$$

d'où le résultat.

Etape 2. Soit $l \geq 1$. Supposons que la formule (18.5) soit vraie pour l et montrons la pour $l+1$. On infère le résultat car

$$\begin{aligned} [\mathfrak{F}(f)]^{(l+1)}(\xi) &= \widehat{f}^{(l+1)}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \left([\mathfrak{F}(f)]^{(l)} \right)(\xi) = (-2\pi i)^l \frac{d}{d\xi} \mathfrak{F}(h_l)(\xi) \\ &= (-2\pi i)^l (-2\pi i) \mathfrak{F}(x h_l)(\xi) = (-2\pi i)^{l+1} \mathfrak{F}(h_{l+1})(\xi). \end{aligned}$$

(v) Un calcul immédiat donne

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(h)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x+a) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi (y-a)} dy = e^{2\pi i a \xi} \mathfrak{F}(f)(\xi). \end{aligned}$$

(vi) On a

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(h)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(ax) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi y/a} dy = \frac{1}{a} \mathfrak{F}(f)\left(\frac{\xi}{a}\right). \end{aligned}$$

(vii) Utilisant les Théorèmes de Fubini et de Tonelli, on trouve que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i x y} dy \right) g(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-2\pi i x y} dx \right) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \widehat{g}(y) dy. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

Exercice 18.2 (i) On montre facilement par induction que $f^{(l)}(x)$ est de la forme

$$P_l(x) e^{-x^2}$$

où P_l est un polynôme de degré l . Il s'ensuit alors directement (grâce, par exemple, à la règle de l'Hôpital) que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \left| x^k f^{(l)}(x) \right| \right\} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \left| x^k P_l(x) e^{-x^2} \right| \right\} < \infty.$$

(ii) La première inclusion est triviale grâce au fait que les fonctions sont à support compact. Il est également évident que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^\infty$. Soit $p \in [1, \infty[$. On sait qu'il existe C tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{ (1+x^2) |f(x)| \} \leq C$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(1+x^2)^p |f(x)|^p}{(1+x^2)^p} dx \leq C^p \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^p} \\ &\leq C^p \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^2} < \infty. \end{aligned}$$

(iii) Soit $k, l \in \mathbb{N}$. Par les points (iii) et (iv) de l'Exercice 18.1, on vérifie facilement que

$$\xi^k \left(\frac{d}{d\xi} \right)^l \widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$$

avec

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi i)^k} \left(\frac{d}{dx} \right)^k \left[(-2\pi i x)^l f(x) \right].$$

Puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a également $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ par le point précédent. Pour finir, par la point (i) de l'Exercice 18.1, on obtient

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left\{ \left| \xi^k \left(\frac{d}{d\xi} \right)^l \widehat{f}(\xi) \right| \right\} = \|\widehat{g}\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^1} < \infty,$$

et donc $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. ♠

Exercice 18.3 (i) Soit $z \in O$. Il existe $\delta = \delta(z) > 0$ tel que

$$\operatorname{Re} z > \gamma_0 + 2\delta.$$

Utilisant le développement en série de l'exponentielle, nous avons, pour tout $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{-th} - 1}{h} \right| &= \left| \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} (-th)^k / k! - 1}{h} \right| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} t \frac{(-1)^k (th)^{k-1}}{k!} \right| \\ &\leq t \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(t|h|)^{k-1}}{(k-1)!} \right| = t e^{t|h|}. \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $|h| < \delta$,

$$\begin{aligned} \left| f(t) \frac{e^{-t(z+h)} - e^{-tz}}{h} \right| &= |f(t)| |e^{-tz}| \left| \frac{e^{-th} - 1}{h} \right| \leq |f(t)| e^{-t \operatorname{Re} z} t e^{t|h|} \\ &= t |f(t)| e^{-t(\operatorname{Re} z - |h|)} \leq \left| t f(t) e^{-t(\gamma_0 + \delta)} \right| \\ &= |t e^{-t\delta}| |f(t) e^{-t\gamma_0}| \end{aligned}$$

où on a utilisé dans l'avant-dernière équation le fait que

$$\gamma_0 + \delta < \operatorname{Re} z - |h|.$$

On observe que comme $t e^{-t\delta} \in L^\infty(0, \infty)$ on a

$$f(t) \frac{e^{-t(z+h)} - e^{-tz}}{h} \in L^1(0, \infty).$$

Finalement on utilise le théorème de la convergence dominée pour déduire

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0, 0 < |h| < \delta} \left[\frac{F(z+h) - F(z)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0, 0 < |h| < \delta} \left[\int_0^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t(z+h)} - e^{-tz}}{h} dt \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \lim_{h \rightarrow 0, 0 < |h| < \delta} \left[f(t) \frac{e^{-t(z+h)} - e^{-tz}}{h} \right] dt \\ &= - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-tz} dt. \end{aligned}$$

(ii) Trivial.

(iii) En suivant l'indication, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f' e^{-tz} dt &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[f(t) e^{-tz} \Big|_{t=0}^{t=N} \right] - \int_0^{+\infty} -z f(t) e^{-tz} dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} [f(N) e^{-Nz}] - f(0) + z \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz} dt \\ &= z \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz} dt - f(0). \end{aligned}$$

(iv) Le résultat suit directement du point (iii).

(v) Élémentaire.

(vi) On commence par remarquer que $(f * g)(t) = 0$ si $t \leq 0$. On a donc a

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(f * g)(z) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-s) g(s) ds \right) e^{-(t-s)z} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t-s) g(s) e^{-(t-s)z} dt \right) e^{-s z} ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{L}(f)(z) g(s) e^{-s z} ds \\ &= \mathfrak{L}(f)(z) \mathfrak{L}(g)(z)\end{aligned}$$

où on a utilisé le Théorème de Fubini et le changement de variable $t-s=y$. ♠

Exercice 18.4 Posons $g(t) = f(t) e^{-\gamma t}$. On sait que $g \in L^1$ et donc

$$\widehat{g}(s) = \int_{\mathbb{R}} g(t) e^{-2\pi i s t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-(\gamma + 2\pi i s)t} dt = F(\gamma + 2\pi i s).$$

Puisque la fonction $|\widehat{g}| \in L^1$, on sait par la formule d'inversion de Fourier (cf. Théorème 18.5), que, pour presque tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) e^{-\gamma t} = g(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(s) e^{2\pi i s t} ds = \int_{\mathbb{R}} F(\gamma + 2\pi i s) e^{2\pi i s t} ds$$

et donc pour presque tout $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} F(\gamma + 2\pi i s) e^{(\gamma + 2\pi i s)t} ds. \quad \spadesuit$$

18.10 Table des transformées de Fourier

Remarque La table ci dessus est celle dans Dacorogna-Tanteri [9]. Si on appelle

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\xi y} dy$$

la transformée de Fourier qu'on trouve dans [9], alors celle définie ici se retrouve à partir de la précédente par la formule

$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} \widehat{g}(2\pi\xi). \quad \spadesuit$$

	$f(y)$	$\mathfrak{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi)$
1	$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(b \xi)}{\xi}$
2	$f(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\xi) = \frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi c}}{i\xi \sqrt{2\pi}}$
3	$f(y) = \begin{cases} e^{-\omega y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\omega > 0)$	$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega + i\xi)}$
4	$f(y) = \begin{cases} e^{-\omega y} & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(\omega+i\xi)b} - e^{-(\omega+i\xi)c}}{\omega + i\xi}$
5	$f(y) = \begin{cases} e^{-i\omega y} & \text{si } b < y < c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i(\omega+\xi)b} - e^{-i(\omega+\xi)c}}{\omega + \xi}$
6	$f(y) = \frac{1}{y^2 + \omega^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{- \omega\xi }}{ \omega }$
7	$f(y) = \frac{e^{- \omega y }}{ \omega } \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\omega^2 + \xi^2}$
8	$f(y) = e^{-\omega^2 y^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2} \omega } e^{-\frac{\xi^2}{4\omega^2}}$
9	$f(y) = y e^{-\omega^2 y^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\xi) = \frac{-i\xi}{2\sqrt{2} \omega ^3} e^{-\frac{\xi^2}{4\omega^2}}$
10	$f(y) = \frac{4y^2}{(\omega^2 + y^2)^2} \quad (\omega \neq 0)$	$\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{ \omega } - \xi \right) e^{- \omega\xi }$

Chapitre 19

Introduction aux équations aux dérivées partielles

19.1 Introduction

On va maintenant montrer comment l'analyse de Fourier peut être utilisée pour traiter certaines équations aux dérivées partielles. En fait le mémoire de Fourier avait pour but de résoudre l'équation de la chaleur. Nous allons dans ce chapitre faire des considérations surtout *heuristiques*, mais qu'on peut rendre rigoureuses (et ceci est discuté dans les exercices).

Commençons par des notations. On écrit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et notre fonction inconnue est $u = u(x) \in \mathbb{R}$. On note

$$\nabla u = \text{grad } u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) \in \mathbb{R}^n$$

et idem pour les dérivées d'ordre supérieur

$$\nabla^2 u = (u_{x_i x_j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}, \dots, \nabla^N u = (u_{x_{i_1} \dots x_{i_N}})_{1 \leq i_1, \dots, i_N \leq n} \in \mathbb{R}^{n^N}.$$

Une *équation aux dérivées partielles* est une relation de la forme

$$F(x, u, \nabla u, \nabla^2 u, \dots, \nabla^N u) = 0$$

où

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^{n^N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

En général on couple ces équations à des conditions aux limites ou initiales. On étudie aussi des systèmes d'équations aux dérivées partielles où la fonction u est alors une application, i.e. $u = (u^1, \dots, u^m) \in \mathbb{R}^m$.

Voyons des exemples classiques.

Exemple 19.1 (Equation de Laplace) Ici $N = 2$ et on a

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0.$$

Les solutions d'une telle équation sont appelées des fonctions harmoniques. Si $n = 2$, cette équation est intimement liée aux équations de Cauchy-Riemann

$$\alpha_x = \beta_y \quad \text{et} \quad \alpha_y = -\beta_x$$

pour une fonction holomorphe

$$f(z) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y).$$

On va étudier cette équation quand $n = 2$. Cette équation sert de modèle aux équations dites elliptiques. On va expliquer maintenant cette terminologie et pour simplifier considérons le cas $n = 2$. On considère la transformée de Fourier (multidimensionnelle) de u

$$\mathfrak{F}(u)(\xi) = \widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} u(y) e^{-2\pi i \langle \xi; y \rangle} dy.$$

On note que par le Théorème 18.13, on trouve que

$$\mathfrak{F}(\Delta u)(\xi) = (2\pi i)^2 \widehat{u}(\xi) \left((\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 \right) = [-4\pi^2 \widehat{u}(\xi)] |\xi|^2.$$

La terminologie "ellipticité" vient du fait que l'équation

$$(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 = 1$$

est l'équation d'un cercle (et plus généralement d'une ellipse).

Exemple 19.2 (Equation des ondes) Ici $N = 2$, $u = u(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, et

$$u_{tt} - \Delta_x u = u_{tt} - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0.$$

On va étudier cette équation quand $n = 1$. Cette équation sert de modèle aux équations dites hyperboliques. On va expliquer, comme ci-dessus, la terminologie en considérant, pour simplifier, le cas $n = 1$. On considère la transformée de Fourier (multidimensionnelle) de u

$$\mathfrak{F}(u)(\xi) = \widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} u(y, s) e^{-2\pi i (\xi_1 y + \xi_2 s)} dy ds.$$

On note que par le Théorème 18.13, on trouve que

$$\mathfrak{F}(u_{tt} - u_{xx})(\xi) = (2\pi i)^2 \widehat{u}(\xi) \left((\xi_2)^2 - (\xi_1)^2 \right).$$

La terminologie "hyperbolicité" vient du fait que l'équation

$$(\xi_2)^2 - (\xi_1)^2 = 1$$

est l'équation d'une hyperbole.

Exemple 19.3 (Equation de la chaleur) Ici $N = 2$, $u = u(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, et

$$u_t - \Delta_x u = u_t - \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0.$$

On va étudier cette équation quand $n = 1$. Cette équation sert de modèle aux équations dites paraboliques. On va expliquer, comme ci-dessus, la terminologie en considérant, pour simplifier, le cas $n = 1$. On considère la transformée de Fourier (multidimensionnelle) de u

$$\mathfrak{F}(u)(\xi) = \widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} u(y, s) e^{-2\pi i(\xi_1 y + \xi_2 s)} dy ds.$$

On note que par le Théorème 18.13, on trouve que

$$\mathfrak{F}(u_t - u_{xx})(\xi) = \widehat{u}(\xi) \left(2\pi i \xi_2 - (2\pi i)^2 (\xi_1)^2 \right).$$

La terminologie "parabolicité" vient du fait que l'équation

$$\xi_2 - 2\pi i (\xi_1)^2 = 1$$

est l'équation d'une parabole.

Exemple 19.4 (Equation des surfaces minimales) Ici $N = n = 2$ (ou, plus généralement, $n \geq 2$)

$$\left(1 + (u_{x_2})^2 \right) u_{x_1 x_1} - 2 u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2} + \left(1 + (u_{x_1})^2 \right) u_{x_2 x_2} = 0.$$

Géométriquement cette équation exprime que la surface qui est le graphe de la fonction u a une courbure moyenne nulle.

Exemple 19.5 (Equation de Burgers) Ici $N = 1$, $n = 2$, $u = u(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et l'équation est

$$u_t + u u_x = 0.$$

Exemple 19.6 (Equations de Maxwell) Ici on a un système de 8 équations à 6 inconnues $E = E(x, t) = (E^1, E^2, E^3)$ et $B = B(x, t) = (B^1, B^2, B^3)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, qui satisfont

$$\begin{cases} E_t = \operatorname{rot}_x B, & B_t = -\operatorname{rot}_x E \\ \operatorname{div}_x E = \operatorname{div}_x B = 0. \end{cases}$$

Exemple 19.7 (Equations de Navier-Stokes) Ici il s'agit d'un système de 4 équations à 4 inconnues, qui sont $u = u(x, t) = (u^1, u^2, u^3)$ et $p = p(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Le système est donné par

$$\begin{cases} u_t^i - \Delta_x u^i + \sum_{k=1}^3 u^k u_{x_k}^i = -p_{x_i}, & i = 1, 2, 3 \\ \operatorname{div}_x u = \sum_{i=1}^3 u_{x_i}^i = 0. \end{cases}$$

19.2 L'équation de la chaleur

19.2.1 L'équation de la chaleur sur un borné

Le problème considéré est le suivant. Soient $c \neq 0$, $L > 0$, $f \in C^{0,\alpha}([0, L])$, $0 < \alpha \leq 1$, telle que $f(0) = f(L) = 0$. Il s'agit de trouver $u = u(x, t)$ solution de

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & x \in]0, L[, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in]0, L[\end{cases} \quad (19.1)$$

On traitera en particulier le cas où $f(x) = 2 \sin(\pi x/L) - \sin(3\pi x/L)$.

Remarque Les conditions aux limites, $u(0, t) = u(L, t) = 0$, sont appelées conditions de *Dirichlet*. La méthode présentée ici permet de traiter de manière analogue d'autres conditions aux limites comme, par exemple, celles de *Neumann*,

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0.$$

Nous référons pour de plus amples détails aux exercices. ♠

Discussion On va procéder à la discussion de ce problème par étapes.

Etape 1 (Séparation des variables). On commence par résoudre le même problème mais en ignorant la condition initiale ($u(x, 0) = f(x)$)

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & x \in]0, L[, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t > 0. \end{cases} \quad (19.2)$$

On cherche alors des solutions ayant une forme particulière

$$u(x, t) = v(x) w(t).$$

Les conditions aux limites ($u(0, t) = u(L, t) = 0$) pour être satisfaites pour tout $t > 0$ deviennent donc des conditions sur v , plus précisément

$$u(0, t) = v(0) w(t) = u(L, t) = v(L) w(t) = 0, \forall t \Rightarrow v(0) = v(L) = 0.$$

L'équation différentielle proprement dite nous permet de séparer les variables

$$\begin{cases} u_t = v(x) w'(t) \\ u_{xx} = v''(x) w(t) \end{cases} \Rightarrow u_t = v(x) w'(t) = c^2 v''(x) w(t) = c^2 u_{xx},$$

d'où

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{c^2 w(t)}.$$

Pour que ces quantités puissent être égales $\forall t, \forall x$, il faut que chacun des membres de l'équation soit égale à une même constante que nous noterons $-\lambda$.

Les problèmes qu'on va résoudre deviennent alors

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda v(x) = 0 & x \in]0, L[\\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases} \quad (19.3)$$

et

$$w'(t) + c^2 \lambda w(t) = 0. \quad (19.4)$$

Il est facile de voir (cf. Exercice 19.1) que les solutions non triviales de (19.3) sont données par

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \text{et} \quad v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Les solutions de (19.4), pour $\lambda = (n\pi/L)^2$, sont obtenues facilement par intégration et sont données par

$$w_n(t) = e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

Donc, $\forall n = 1, 2, 3, \dots$ on a que

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

est solution de (19.2).

Etape 2 (Superposition des solutions). Le lemme suivant est élémentaire.

Lemme 19.8 *Si φ et ψ sont solutions de (19.2) et si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha\varphi + \beta\psi$ est encore solution de (19.2).*

A l'aide du lemme ci-dessus, on a que si $b_n \in \mathbb{R}$, alors

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

est encore solution de (19.2). En faisant un raisonnement abusif (car on ne discute pas encore la convergence de la série), on trouve que la *solution générale* de (19.2) est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

où b_n sont des constantes “quelconques”.

Etape 3 (Condition initiale). On va maintenant choisir ces constantes b_n de manière à satisfaire la condition initiale, $u(x, 0) = f(x)$, dans (19.1). On doit donc avoir

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x).$$

Il suffit alors de choisir b_n comme les coefficients de Fourier de la série en sinus, i.e.

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) dy.$$

Donc la solution de (19.1) est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad \text{avec} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) dy.$$

Etape 4 (Vérification). Il faut maintenant vérifier que les considérations heuristiques précédentes sont justifiées. Nous ne le ferons pas ici (cf. Exercices), mais il est facile de voir les choses suivantes.

(i) Si $f \in L^1(0, L)$, alors les coefficients de Fourier b_n sont uniformément bornés et donc $u \in C^\infty([0, L] \times \mathbb{R}_+^*)$ où $\mathbb{R}_+^* = \{t > 0\}$. Ceci provient du fait que, dès que $t > 0$, la présence du terme $e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$ et le fait que b_n soient uniformément bornés, assurent que la série et toutes ses dérivées, en t et en x , convergent. Pour la même raison on voit aussi que

$$u(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad t \rightarrow \infty.$$

(ii) La partie la plus difficile est de montrer (cf. Exercice 19.8 quand $f \in C^4$ puis $f \in C^1$ dans les corrigés) que

$$u(x, t) \rightarrow f(x) \quad \text{quand} \quad t \rightarrow 0.$$

Etape 5 (Exemple). Dans le cas particulier, les coefficients b_n sont donnés par

$$b_1 = 2, \quad b_3 = -1, \quad b_n = 0 \text{ sinon.}$$

Par conséquent la solution du cas particulier est

$$u(x, t) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) e^{-c^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t} - \sin\left(\frac{3\pi}{L} x\right) e^{-c^2\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 t}. \quad \spadesuit$$

19.2.2 L'équation de la chaleur sur la droite réelle

Soient $c \neq 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)| d\xi < \infty.$$

Le problème est de trouver $u = u(x, t)$ solution de

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (19.5)$$

On traitera en particulier le cas où $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

Discussion On procède de nouveau par étapes.

Etape 1 (Transformée de Fourier en x). On appelle

$$v(\xi, t) = \mathfrak{F}(u)(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y, t) e^{-2\pi i \xi y} dy$$

(c'est-à-dire qu'on considère t comme un paramètre et on applique la transformée de Fourier en x). On a (en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier)

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(u_{xx})(\xi, t) &= (2\pi i \xi)^2 \mathfrak{F}(u)(\xi, t) = -4\pi^2 \xi^2 v(\xi, t) \\ v_t(\xi, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(y, t) e^{-2\pi i \xi y} dy = \mathfrak{F}(u_t)(\xi, t). \end{aligned}$$

On pose

$$\widehat{f}(\xi) = \mathfrak{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy.$$

En prenant la transformée de Fourier (en x) des deux membres de l'équation, on a que (19.5) est devenue une équation différentielle ordinaire du premier ordre dans la variable t (ξ jouant le rôle de paramètre)

$$\begin{cases} v_t(\xi, t) = -4\pi^2 \xi^2 v(\xi, t) & t > 0 \\ v(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi). \end{cases}$$

Le problème précédent a comme solution évidente

$$v(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 t}. \quad (19.6)$$

Etape 2 (Solution de (19.5)). On applique à la fonction ci-dessus la transformée de Fourier inverse (en x), ce qui nous donne comme solution de (19.5)

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x - 4\pi^2 \xi^2 t} d\xi. \quad (19.7)$$

(On notera en passant que, contrairement au cas de la barre de dimension finie, le problème admet ici d'autres solutions, celle que nous trouvons est la "meilleure" du point de vue tant mathématique que physique).

Etape 3 (Vérification). Comme déjà dit, les considérations ci dessus sont purement heuristiques. Il faut maintenant vérifier que le résultat trouvé est bien une solution du problème. Les hypothèses que nous avons faites le garantissent en effet, mais nous ne rentrons pas dans les détails (cf. Exercice 19.9). A nouveau le fait que $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ est facile, à cause de la présence du terme $e^{-4\pi^2 \xi^2 t}$ et du fait que $|\widehat{f}| \in L^1(\mathbb{R})$. La partie difficile (plus la fonction f est régulière plus c'est facile, par exemple si $|h| \in L^1(\mathbb{R})$ où $h(\xi) = \xi^2 \widehat{f}(\xi)$, cf. Exercice 19.9) est de montrer que

$$u(x, t) \rightarrow f(x) \quad \text{quand } t \rightarrow 0.$$

Etape 4 (Exemple). Dans l'exemple particulier on a que $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$. Alors

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \xi^2} e^{2\pi i \xi x - 4\pi^2 c^2 \xi^2 t} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(1+4\pi c^2 t)\xi^2} e^{2\pi i \xi x} d\xi = \frac{e^{-\frac{\pi x^2}{1+4\pi c^2 t}}}{\sqrt{1+4\pi c^2 t}}. \spadesuit \end{aligned}$$

19.2.3 La solution fondamentale de l'équation de la chaleur

En procédant formellement on a une autre possibilité d'écrire la solution trouvée dans (19.7), à savoir

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x - 4\pi^2 c^2 \xi^2 t} d\xi.$$

(i) Appelons

$$L^t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}.$$

Il est facile de voir que

$$\widehat{L^t}(\xi) = e^{-4\pi^2 c^2 \xi^2 t}.$$

En effet on sait (cf. Proposition 18.3) que si $f(x) = e^{-\pi x^2}$, alors $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$. Par ailleurs le Théorème 18.2 (vi) (qui dit que si $h(x) = a f(ax)$, alors $\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi/a)$), appliqué à

$$a = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}}, \quad h(x) = L^t(x) \quad \text{et} \quad f(x) = e^{-\pi x^2}$$

donne

$$\widehat{L^t}(\xi) = e^{-4\pi^2 c^2 \xi^2 t}.$$

(ii) En revenant à (19.6) on obtient que

$$\mathfrak{F}(u)(\xi, t) = v(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) \widehat{L^t}(\xi).$$

Par le Théorème 18.4, on déduit que

$$\mathfrak{F}(u)(\xi, t) = v(\xi, t) = \widehat{(f * L^t)}(\xi).$$

En prenant alors la transformée de Fourier inverse (en x), on trouve que la solution de (19.5) est donnée par

$$u(x, t) = (f * L^t)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) L^t(x - \xi) d\xi$$

c'est à dire

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4c^2 t}} d\xi.$$

En fait on peut montrer assez facilement (cf. John [16], Chapitre 7 et aussi pour une version plus faible Exercice 19.20) le résultat suivant. On note par la suite $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

Théorème 19.9 Soit $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et soit

$$L^t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}.$$

Alors la fonction

$$u(x, t) = \begin{cases} (f * L^t)(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0 \\ f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \text{ et } t = 0 \end{cases}$$

est telle que $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) \cap C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ et satisfait

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

19.3 L'équation de Laplace

19.3.1 L'équation de Laplace dans un rectangle

Soient $L, M > 0$, $\alpha, \beta \in C^{0,l}([0, L])$, $\gamma, \delta \in C^{0,l}([0, M])$, $l \in]0, 1]$, telles que

$$\alpha(0) = \alpha(L) = \beta(0) = \beta(L) = \gamma(0) = \gamma(M) = \delta(0) = \delta(M) = 0.$$

Il s'agit de trouver $u = u(x, y)$ solution de

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & x \in]0, L[, y \in]0, M[\\ u(x, 0) = \alpha(x), u(x, M) = \beta(x) & x \in]0, L[\\ u(0, y) = \gamma(y), u(L, y) = \delta(y) & y \in]0, M[. \end{cases} \quad (19.8)$$

On traitera le cas particulier où

$$\gamma = \delta \equiv 0, \alpha(x) = 4 \sin(\pi x/L), \beta(x) = -\sin(2\pi x/L).$$

Discussion On procède de nouveau par étapes.

Etape 1 (Découplage des équations). En fait il faut résoudre deux problèmes :

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & x \in]0, L[, y \in]0, M[\\ v(x, 0) = 0, v(x, M) = 0 & x \in]0, L[\\ v(0, y) = \gamma(y), v(L, y) = \delta(y) & y \in]0, M[\end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & x \in]0, L[, y \in]0, M[\\ w(x, 0) = \alpha(x), w(x, M) = \beta(x) & x \in]0, L[\\ w(0, y) = w(L, y) = 0. & y \in]0, M[\end{cases}$$

La solution du problème (19.8) est alors donnée par

$$u = v + w.$$

Comme les deux problèmes sont résolus de la même façon, on ne traitera que le deuxième (c'est-à-dire (19.8) avec $\gamma = \delta \equiv 0$).

Etape 2 (Séparation des variables). On va résoudre tout d'abord le problème (en ignorant les conditions $w(x, 0) = \alpha(x)$, $w(x, M) = \beta(x)$)

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & x \in]0, L[, y \in]0, M[\\ w(0, y) = w(L, y) = 0 & y \in]0, M[\end{cases} \quad (19.9)$$

et en cherchant des solutions de la forme

$$w(x, y) = f(x) g(y).$$

Comme dans les deux sections précédentes (λ étant une constante) on trouve

$$\begin{cases} f''(x) g(y) + f(x) g''(y) = 0 \\ f(0) = f(L) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f''(x)}{f(x)} = -\lambda = -\frac{g''(y)}{g(y)} \\ f(0) = f(L) = 0. \end{cases}$$

On déduit alors les deux systèmes

$$\begin{cases} f''(x) + \lambda f(x) = 0 & x \in]0, L[\\ f(0) = f(L) = 0 \end{cases} \quad (19.10)$$

et

$$g''(y) - \lambda g(y) = 0. \quad (19.11)$$

On a vu (cf. Exercice 19.1) que les solutions non triviales de (19.10) sont données par

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \text{et} \quad f_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

tandis que les solutions de (19.11) sont données par (cf. Rappel au début de la Section 19.6 pour une solution écrite légèrement différemment)

$$g_n(y) = a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right).$$

Comme l'équation (19.9) est linéaire, on a que sa solution générale est donnée (on rappelle que notre raisonnement est purement heuristique) par

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Etape 3 (Conditions aux limites). Pour résoudre (19.8) il faut encore satisfaire aux deux conditions aux limites

$$w(x, 0) = \alpha(x) \quad \text{et} \quad w(x, M) = \beta(x).$$

On choisit alors les constantes a_n et b_n de la manière suivante

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

et donc pour les premières

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \alpha(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right) dt.$$

Les coefficients b_n sont obtenus en écrivant

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L} M\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L} M\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \end{aligned}$$

où on a posé $c_n = a_n \cosh(n\pi M/L) + b_n \sinh(n\pi M/L)$. On choisit donc

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \beta(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right) dt$$

et on trouve b_n par la formule

$$b_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L} M\right) = c_n - a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L} M\right).$$

On peut aussi montrer (cf. la remarque ci dessous) que si $0 < y < M$, la série converge de même que toutes ses dérivées d'ordre supérieur (on a donc le même phénomène que pour l'équation de la chaleur). La fonction $w \in C^\infty([0, L[\times]0, M[)$.

Etape 4 (Vérification). Comme déjà dit, les considérations ci dessus sont purement heuristiques. Il faut maintenant vérifier que le résultat trouvé est bien une solution du problème. Les hypothèses que nous avons faites le garantissent en effet, mais nous ne rentrons pas dans les détails, mais cf. la remarque ci dessous et l'Exercice 19.10 dans un cas particulier. A nouveau, ici, ce n'est pas très difficile de montrer que $w \in C^\infty([0, L[\times]0, M[)$, ce qui est plus difficile (plus les fonctions α et β sont régulières plus c'est facile) est de montrer que

$$w(x, y) \rightarrow \alpha(x) \quad \text{quand} \quad y \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad w(x, y) \rightarrow \beta(x) \quad \text{quand} \quad y \rightarrow M.$$

Etape 5 (Exemple). Dans l'exemple $a_1 = 4$, $a_n = 0$, $\forall n \geq 2$ et $c_2 = -1$, $c_n = 0$, $\forall n \neq 2$, i.e. $b_1 = -4 \coth(\pi M/L)$ et $b_2 = -1/\sinh(2\pi M/L)$. Par conséquent la solution est donnée par

$$w(x, y) = 4 \left[\cosh\left(\frac{\pi}{L} y\right) - \coth\left(\frac{\pi M}{L}\right) \sinh\left(\frac{\pi}{L} y\right) \right] \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) - \frac{1}{\sinh(2\pi M/L)} \sinh\left(\frac{2\pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right).$$

Remarque (pour plus de détails, cf. Exercices). On veut maintenant discuter très brièvement la dérivabilité et la convergence des séries formelles. Voyons un cas particulier où $L = M = \pi$ et $\beta = \gamma = \delta = 0$. On a donc dans les calculs ci dessus que

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \alpha(t) \sin(nt) dt, \quad c_n = 0 \quad \text{et} \quad b_n \sinh(n\pi) = -a_n \cosh(n\pi)$$

et ainsi

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cosh(ny) + b_n \sinh(ny)] \sin(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left[\cosh(ny) - \frac{\cosh(n\pi)}{\sinh(n\pi)} \sinh(ny) \right] \sin(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sinh(n\pi)} [\sinh(n(\pi - y))] \sin(nx). \end{aligned}$$

On a donc si $0 < y \leq \pi$ que toutes les séries de n'importe quelle dérivée convergent, car

$$\frac{n^k |a_n| [\sinh n(\pi - y)]}{\sinh(n\pi)}, \quad \frac{n^k |a_n| [\cosh n(\pi - y)]}{\sinh(n\pi)} \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty$$

et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}$. ♠

19.3.2 L'équation de Laplace dans un disque

Trouver $u(x, y)$ solution de

$$\boxed{\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = \varphi(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}} \quad (19.12)$$

où $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$ et φ est une fonction C^1 .

On traitera en particulier le cas où $\varphi = x^2 + y$.

Discussion On va utiliser à nouveau la méthode de séparation de variables mais après être passé aux coordonnées polaires.

Etape 1 (Coordonnées polaires). On pose

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$v(r, \theta) = u(x, y) = u(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

On trouve (cf. Exercice 1.12) que

$$\Delta u = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}.$$

Le problème devient alors

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0 & r \in]0, R[, \theta \in]0, 2\pi[\\ v(R, \theta) = \varphi(R \cos \theta, R \sin \theta) = \psi(\theta) & \theta \in]0, 2\pi[. \end{cases} \quad (19.13)$$

Noter que comme nous travaillons en coordonnées polaires il faut aussi imposer que

$$v(r, 0) = v(r, 2\pi) \quad \text{et} \quad v_\theta(r, 0) = v_\theta(r, 2\pi).$$

Remarquer qu'alors toutes les autres dérivées sont 2π -périodiques. Cela est évident par dérivation des conditions précédentes pour v_r , v_{rr} , $v_{r\theta}$; mais c'est aussi vrai pour $v_{\theta\theta}$ de l'équation (19.13).

Dans le cas particulier, on a

$$\psi(\theta) = \varphi(R \cos \theta, R \sin \theta) = R^2 \cos^2 \theta + R \sin \theta = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} \cos(2\theta) + R \sin \theta.$$

Etape 2. (Séparation des variables). On va commencer par ignorer la condition aux limites ($v(R, \theta) = \psi(\theta)$) et résoudre l'équation

$$\begin{cases} v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta} = 0 & r \in]0, R[, \theta \in]0, 2\pi[\\ v(r, 0) = v(r, 2\pi) & r \in]0, R[\\ v_\theta(r, 0) = v_\theta(r, 2\pi) & r \in]0, R[. \end{cases}$$

On cherche alors une fonction $v(r, \theta)$, solution du problème donné, de la forme

$$v(r, \theta) = f(r) g(\theta).$$

On trouve donc pour l'équation

$$f''(r) g(\theta) + \frac{1}{r} f'(r) g(\theta) + \frac{1}{r^2} f(r) g''(\theta) = 0$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{r^2 f''(r) + r f'(r)}{f(r)} = \lambda = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}$$

et pour les conditions de périodicité

$$g(0) = g(2\pi) \quad \text{et} \quad g'(0) = g'(2\pi).$$

On obtient donc

$$\begin{cases} g''(\theta) + \lambda g(\theta) = 0 \\ g(0) = g(2\pi), \quad g'(0) = g'(2\pi) \end{cases} \quad (19.14)$$

et

$$r^2 f''(r) + r f'(r) - \lambda f(r) = 0. \quad (19.15)$$

On a que (cf. Exercice 19.2) les solutions non triviales de (19.14) sont données, pour $n \in \mathbb{N}$ (y compris $n = 0$) par

$$\lambda = n^2 \quad \text{et} \quad g_n(\theta) = \alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta).$$

Les solutions de (19.15) avec $\lambda = n^2$ sont données (cf. Exercice 19.2) par

$$f_n(r) = \begin{cases} \gamma_n r^n + \delta_n r^{-n} & \text{si } n \neq 0 \\ \gamma_0 + \delta_0 \log r & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

La solution générale s'écrit alors

$$v(r, \theta) = \alpha_0 (\gamma_0 + \delta_0 \log r) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\gamma_n r^n + \delta_n r^{-n}) (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta))$$

qui peut être réécrite, en renommant les constantes

$$a_0 = 2\alpha_0\gamma_0 \quad \text{et} \quad c_0 = \alpha_0\delta_0$$

et si $n \neq 0$ (et $n \in \mathbb{N}$)

$$a_n = \alpha_n\gamma_n, \quad b_n = \beta_n\gamma_n, \quad c_n = \alpha_n\delta_n, \quad d_n = \beta_n\delta_n,$$

sous la forme

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) r^n$$

$$+ c_0 \log r + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta)) r^{-n}.$$

(19.16)

Comme on est intéressé à des solutions définies dans le disque centré en 0, les solutions de la forme r^{-n} et $\log r$ ne sont pas admises car elles tendent vers l'infini quand r tend vers 0, on en déduit que

$$c_n = d_n = 0,$$

par conséquent la solution générale v de notre problème est la suivante

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) r^n.$$

(Noter que si le domaine Ω était un anneau au lieu d'être un disque la solution générale serait bien de la forme (19.16)).

Etape 3 (Conditions aux limites). Il nous reste donc à déterminer les coefficients a_n et b_n pour que

$$v(R, \theta) = \varphi(R \cos \theta, R \sin \theta) = \psi(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)) R^n.$$

Ceci nous conduit à

$$a_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

et

$$b_n R^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

On pourrait aussi démontrer que la fonction v ainsi obtenue est C^∞ dès que $r < R$.

Dans le cas particulier, i.e.

$$\psi(\theta) = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} \cos(2\theta) + R \sin \theta,$$

on trouve que

$$a_0 = R^2, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_n = 0 \text{ sinon} \quad \text{et} \quad b_1 = 1, \quad b_n = 0 \text{ sinon}$$

d'où

$$v(r, \theta) = \frac{R^2}{2} + \frac{r^2}{2} \cos(2\theta) + r \sin \theta = \frac{R^2}{2} + \frac{r^2}{2} \cos^2 \theta - \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta + r \sin \theta.$$

Finalement en écrivant le résultat en coordonnées cartésiennes on obtient

$$u(x, y) = \frac{R^2}{2} + \frac{x^2 - y^2}{2} + y. \quad \spadesuit$$

19.3.3 L'équation de Laplace dans un domaine simplement connexe

On veut trouver une fonction $u = u(x, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = \varphi(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

où $\Omega \neq \mathbb{R}^2$ est un domaine simplement connexe dont le bord est suffisamment régulier et φ est une fonction C^1 . (Ici encore plus que précédemment les considérations sont purement heuristiques).

On traitera en particulier le cas où

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & x > 1, y \in \mathbb{R} \\ u(1, y) = \varphi(1, y) = \frac{2}{1+y^2} & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Discussion L'idée est de se ramener après une transformation conforme au cas du disque.

Etape 1 (Application conforme). Par le Théorème de Riemann (cf. Théorème 12.9; mais attention il faut ici que l'application conforme soit au moins Hölder continue jusqu'au bord, ce que ne garantit pas le théorème comme énoncé, mais nous ne discutons pas ici ce point subtil), il existe une application conforme

$$f = \alpha + i\beta : \Omega \rightarrow D$$

où $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. L'inverse de la fonction f s'écrit

$$f^{-1} = a + ib : D \rightarrow \Omega.$$

Dans le cas particulier on a $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ et on trouve facilement que

$$f(z) = \frac{2}{z} - 1 \quad \text{et} \quad f^{-1}(w) = \frac{2}{1+w}$$

ce qui en termes de coordonnées donne

$$\begin{aligned} f(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y) &= \frac{2}{x+iy} - 1 = \frac{2x}{x^2+y^2} - 1 + i \frac{-2y}{x^2+y^2} \\ f^{-1}(\alpha, \beta) = a(\alpha, \beta) + ib(\alpha, \beta) &= \frac{2}{1+\alpha+i\beta} = \frac{2(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2+\beta^2} + i \frac{-2\beta}{(1+\alpha)^2+\beta^2}. \end{aligned}$$

Etape 2. On pose $\psi(\alpha, \beta) = \varphi \circ f^{-1} = \varphi(a(\alpha, \beta), b(\alpha, \beta))$ et on résoud, comme dans la Section 19.3.2, le problème

$$\begin{cases} \Delta v = v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} = 0 & \alpha^2 + \beta^2 < 1 \\ v(\alpha, \beta) = \psi(\alpha, \beta) & \alpha^2 + \beta^2 = 1. \end{cases}$$

Dans l'exemple on a, si $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (et donc $(1 + \alpha)^2 + \beta^2 = 2(1 + \alpha)$), que

$$\begin{aligned}\psi(\alpha, \beta) &= \frac{2}{1 + \left(\frac{-2\beta}{(1+\alpha)^2 + \beta^2}\right)^2} = \frac{2}{1 + \left(\frac{-2\beta}{2(1+\alpha)}\right)^2} \\ &= \frac{2(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2 + \beta^2} = 1 + \alpha.\end{aligned}$$

On trouve alors que la solution est trivialement

$$v(\alpha, \beta) = 1 + \alpha.$$

Etape 3. La solution est alors donnée par $u = v \circ f$, c'est à dire

$$u(x, y) = v(\alpha(x, y), \beta(x, y)).$$

En effet on a (cf. Exercice 9.2) $\Delta u = 0$, alors que comme $\psi = \varphi \circ f^{-1}$ on a aussi $u = \varphi$ sur $\partial\Omega$.

Pour l'exemple traité on a donc

$$u(x, y) = v(\alpha(x, y), \beta(x, y)) = v\left(\frac{2x}{x^2 + y^2} - 1, \frac{-2y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2x}{x^2 + y^2}. \spadesuit$$

Voyons maintenant un autre exemple qui peut être traité différemment (cf. Exemple 18.8 et Exercice 15 dans Dacorogna-Tanteri [9]; l'exemple est aussi traité plus généralement dans l'Exercice 19.14).

Exemple Résoudre

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u(x, 0) = f(x) = \frac{8x^2}{(1+x^2)^2} & x \in \mathbb{R} \\ u(x, y) \rightarrow 0 & y \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

où $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.

Discussion Nous proposons ici une autre façon de procéder, semblable à celle de la Section 19.2.2. Comme d'habitude le procédé développé ici ne se justifie qu'a posteriori.

Etape 1 (Transformée de Fourier). On dénote par $v(\xi, y)$ la transformée de Fourier en x (y jouant le rôle d'un paramètre) de $u(x, y)$, par abus de notations on écrira $\mathfrak{F}(u)$, i.e.

$$v(\xi, y) = \mathfrak{F}(u)(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

On trouve (cf. Formulaire) que

$$v(\xi, 0) = \mathfrak{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = 4\pi(1 - 2\pi|\xi|)e^{-2\pi|\xi|}.$$

Les propriétés des transformées de Fourier nous permettent d'écrire

$$\begin{cases} \mathfrak{F}(u_{xx})(\xi, y) = (2\pi i \xi)^2 \mathfrak{F}(u)(\xi, y) = -4\pi^2 \xi^2 v(\xi, y) \\ \mathfrak{F}(u_{yy})(\xi, y) = v_{yy}(\xi, y). \end{cases}$$

En revenant au problème donné, on applique la transformée de Fourier (en x) aux deux membres de l'équation et on se ramène au système suivant

$$\begin{cases} v_{yy}(\xi, y) - 4\pi^2 \xi^2 v(\xi, y) = 0 & y > 0 \\ v(\xi, 0) = \hat{f}(\xi) & x \in \mathbb{R} \\ v(\xi, y) \rightarrow 0 & y \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

En considérant ξ comme un paramètre (ici on suppose que $\xi \neq 0$), on trouve (cf. Rappel au début de la Section 19.6 pour une solution écrite légèrement différemment)

$$\begin{aligned} v(\xi, y) &= \hat{f}(\xi) \cosh(2\pi |\xi| y) + \frac{\gamma}{2\pi |\xi|} \sinh(2\pi |\xi| y) \\ &= \hat{f}(\xi) \frac{e^{2\pi |\xi| y} + e^{-2\pi |\xi| y}}{2} + \frac{\gamma}{2\pi |\xi|} \frac{e^{2\pi |\xi| y} - e^{-2\pi |\xi| y}}{2}. \end{aligned}$$

où γ est une constante à déterminer pour satisfaire à la condition $v(\xi, y) \rightarrow 0$ si $y \rightarrow +\infty$. Pour cela on choisit

$$\gamma = -2\pi |\xi| \hat{f}(\xi).$$

La solution est alors

$$v(\xi, y) = \hat{f}(\xi) e^{-2\pi |\xi| y} = 4\pi (1 - 2\pi |\xi|) e^{-2\pi |\xi|(1+y)}.$$

Etape 2 (Conditions aux limites). La solution du problème est donc obtenue en appliquant la transformée de Fourier inverse et en utilisant le formulaire et le calcul fait dans [9]

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mathfrak{F}^{-1}(v(\xi, y))(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{-2\pi |\xi| y} e^{2\pi i \xi x} d\xi \\ &= 4 \frac{y(1+y)^2 + x^2(2+y)}{\left((1+y)^2 + x^2\right)^2}. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

19.4 L'équation des ondes

19.4.1 La méthode de d'Alembert

Nous présentons maintenant la **Méthode de d'Alembert** pour résoudre l'équation des ondes. Soient $c \neq 0$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $g \in C^1(\mathbb{R})$. On vérifie aisément que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

est solution de l'équation des ondes

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

19.4.2 L'équation des ondes sur la droite réelle

On considère le problème

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On va le résoudre par transformée de Fourier et pas par la méthode de d'Alembert (la méthode utilisant la transformée de Fourier a l'avantage de se généraliser naturellement à \mathbb{R}^n). Ici on a pris $g = 0$, uniquement par souci de simplicité.

Etape 1 (Transformée de Fourier en x). On appelle

$$v(\xi, t) = \mathfrak{F}(u)(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y, t) e^{-2\pi i \xi y} dy$$

(c'est-à-dire qu'on considère t comme un paramètre et on applique la transformée de Fourier en x). On a (en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier)

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(u_{xx})(\xi, t) &= (2\pi i \xi)^2 \mathfrak{F}(u)(\xi, t) = -4\pi^2 \xi^2 v(\xi, t) \\ v_{tt}(\xi, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_{tt}(y, t) e^{-2\pi i \xi y} dy = \mathfrak{F}(u_{tt})(\xi, t). \end{aligned}$$

On pose

$$\widehat{f}(\xi) = \mathfrak{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy.$$

En prenant la transformée de Fourier (en x) des deux membres de l'équation, on a que (19.5) est devenue une équation différentielle ordinaire du premier ordre dans la variable t (ξ jouant le rôle de paramètre)

$$\begin{cases} v_{tt}(\xi, t) = -4\pi^2 c^2 \xi^2 v(\xi, t) & t > 0 \\ v(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) \text{ et } v_t(\xi, 0) = 0. \end{cases}$$

Le problème précédent a comme solution évidente

$$v(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) \frac{e^{2c\pi i |\xi|t} + e^{-2c\pi i |\xi|t}}{2}.$$

Etape 2. En inversant on trouve

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \frac{e^{2\pi i (\xi x + c|\xi|t)} + e^{2\pi i (\xi x - c|\xi|t)}}{2} d\xi.$$

19.4.3 L'équation des ondes sur un intervalle borné

Soient $c, L > 0, f, g \in C^3([0, L])$, telles que $f(0) = f(L) = 0, g(0) = g(L) = 0$. Il s'agit de trouver $u = u(x, t)$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in]0, L[, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in]0, L[\\ u_t(x, 0) = g(x) & x \in]0, L[. \end{array} \right. \quad (19.17)$$

Discuter en particulier le cas où $f = 0, L = \pi$ et $g(x) = \sin x - \sin(2x)$.

Discussion *Etape 1 (Séparation des variables).* On commence par résoudre le problème en ignorant les conditions initiales ($u(x, 0) = f(x)$ et $u_t(x, 0) = g(x)$)

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in]0, L[, t > 0 \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & t > 0. \end{array} \right. \quad (19.18)$$

Les solutions sont cherchées sous la forme $u(x, t) = v(x)w(t)$. Comme précédemment on est amené à résoudre (λ étant une constante)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda = \frac{w''(t)}{c^2 w(t)} \\ v(0)w(t) = v(L)w(t) = 0 \end{array} \right.$$

et donc

$$\left\{ \begin{array}{l} v''(x) + \lambda v(x) = 0 \quad x \in]0, L[\\ v(0) = v(L) = 0 \end{array} \right. \quad (19.19)$$

$$w''(t) + c^2 \lambda w(t) = 0. \quad (19.20)$$

On a vu (cf. Exercice 19.1) que les solutions non triviales de (19.19) sont données par $\lambda = (n\pi/L)^2$ où $n = 1, 2, \dots$ et $v_n = \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$. Par ailleurs les solutions de (19.20), pour $\lambda = (n\pi/L)^2$, sont données, si $n \geq 1$ par (cf. Rappel au début de la Section 19.6)

$$w_n(t) = a_n \cos\left(\frac{c\pi}{L} n t\right) + b_n \sin\left(\frac{c\pi}{L} n t\right).$$

La solution générale de (19.18) est alors donnée par

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{c\pi}{L} n t\right) + b_n \sin\left(\frac{c\pi}{L} n t\right) \right] \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right). \quad (19.21)$$

Etape 2 (Conditions initiales). Il s'agit maintenant de déterminer les constantes a_n et b_n pour que les conditions initiales $u(x, 0) = f(x)$ et $u_t(x, 0) = g(x)$ soient satisfaites. Ceci nous conduit pour la première à

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) = f(x)$$

et donc il suffit de prendre pour a_n les coefficients de Fourier de la série en sinus de f , i.e.

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{\pi}{L} n y\right) dy. \quad (19.22)$$

La deuxième condition initiale (en dérivant la série par rapport à t puis en posant $t = 0$) nous conduit à

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{c \pi n}{L} \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) = g(x).$$

Il suffit donc de choisir b_n de la manière suivante

$$b_n \frac{c \pi n}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(y) \sin\left(\frac{\pi}{L} n y\right) dy,$$

i.e.

$$b_n = \frac{2}{c \pi n} \int_0^L g(y) \sin\left(\frac{\pi}{L} n y\right) dy. \quad (19.23)$$

Finalement la solution de (19.17) est donnée par (19.21) avec a_n et b_n satisfaisant (19.22) et (19.23).

On peut montrer que les hypothèses sur f et g assurent la convergence de la série (19.21) ainsi que celles de ses dérivées u_x , u_t , u_{xx} , u_{xt} et u_{tt} . La fonction u ainsi obtenue est donc C^2 . Toutefois contrairement au cas des équations de la chaleur et de Laplace, à moins que f et g ne soient plus régulières, les séries formelles exprimant les dérivées d'ordre supérieur ne convergent plus en général (cf. la remarque ci dessous).

Dans le cas particulier on trouve

$$a_n = 0 \quad \forall n, \quad b_n = 0 \quad \forall n \geq 3, \quad b_1 c = 1 \quad \text{et} \quad b_2 2c = -1.$$

D'où la solution

$$u(x, t) = \frac{1}{c} \sin(ct) \sin x - \frac{1}{2c} \sin(2ct) \sin(2cx).$$

Remarque On veut maintenant discuter très brièvement la dérivabilité et la convergence des séries formelles. Voyons un cas particulier où $L = \pi$, $c = 1$ et $g = 0$. On a donc dans les calculs ci dessus que

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(y) \sin(ny) dy \quad \text{et} \quad b_n = 0$$

et ainsi

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) \sin(nx).$$

On voit ici que, contrairement à ce qui arrivait dans l'équation de Laplace ou de la chaleur, les dérivées formelles de u empirent car on a des coefficients $n^k |a_n|$. ♠

19.5 Quelques équations non linéaires

La méthode de séparation des variables s'applique essentiellement aux équations linéaires. Parfois elle peut s'appliquer (mais seulement partiellement) à des équations non linéaires. Par contre, l'analyse de Fourier, qui est un processus linéaire, ne s'applique pas (sauf cas particuliers) aux équations non linéaires. Voyons deux exemples.

Exemple 19.10 (Equation de Hamilton-Jacobi) *Considérons*

$$u_t + f(\text{grad}_x u) = u_t + f(u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0$$

où $u = u(x, t) \in \mathbb{R}$, $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. On cherche des solutions sous la forme

$$u(x, t) = v(x) + w(t).$$

L'équation devient

$$u_t + f(u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = w'(t) + f(v_{x_1}, \dots, v_{x_n}) = 0$$

et donc, en séparant les variables,

$$f(v_{x_1}, \dots, v_{x_n}) = \lambda = -w'(t).$$

Par conséquent si on sait résoudre $f(v_{x_1}, \dots, v_{x_n}) = \lambda$ (ce qui n'est, en général, pas un problème facile surtout si on veut une solution régulière, voir plus bas pour un cas simple), on aura qu'une solution est donnée par

$$u(x, t) = v(x) - \lambda t + \mu$$

où μ est une constante. Un cas particulièrement simple et celui où on suppose que

$$v(x) = \langle \alpha; x \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha^i x_i$$

et $\alpha \in \mathbb{R}^n$, on trouve alors que

$$u(x, t) = \langle \alpha; x \rangle - f(\alpha) t + \mu$$

est solution de l'équation de Hamilton-Jacobi.

Exemple 19.11 (Equation des milieux poreux) Soit $\gamma > 1$, $u = u(x, t) \in \mathbb{R}_+$ (ici pour que l'équation ait un sens on cherche des solutions positives), $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, et

$$u_t - \Delta_x (u^\gamma) = u_t - \sum_{i=1}^n (u^\gamma)_{x_i x_i} = 0.$$

On va étudier cette équation quand $n = 1$. On cherche des solutions sous la forme

$$u(x, t) = v(x) w(t).$$

L'équation devient

$$u_t - (u^\gamma)_{xx} = v(x) w'(t) - (w(t))^\gamma ((v(x))^\gamma)_{xx} = 0$$

et donc, en séparant les variables,

$$\frac{((v(x))^\gamma)_{xx}}{v(x)} = \lambda = \frac{w'(t)}{(w(t))^\gamma}.$$

Les deux équations à résoudre sont donc

$$w'(t) - \lambda (w(t))^\gamma = 0 \quad \text{et} \quad ((v(x))^\gamma)_{xx} - \lambda v(x) = 0.$$

La deuxième est plus difficile à intégrer, mais en faisant l'ansatz que $v(x) = |x|^\alpha$ on trouve qu'il faut

$$\alpha = \frac{2}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad \lambda = \alpha \gamma (\alpha \gamma - 1) = \frac{2\gamma(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)^2}.$$

La première, par contre, s'intègre facilement et a comme solution

$$w(t) = ((1 - \gamma) \lambda t + \mu)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

où $\mu > 0$ est une constante. En résumé on a trouvé une solution

$$u(x, t) = |x|^{\frac{2}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma(\gamma+1)}{1-\gamma} t + \mu \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Observer que cette solution est bien définie pour t petit, car $\mu > 0$, mais elle n'est plus définie pour t grand (car $\gamma > 1$).

19.6 Exercices

On pourra compléter les exercices ci-dessous par les nombreux exercices dans les Chapitres 17 et 18 de [9].

19.6.1 Exercices sur les équations différentielles ordinaires

Avant d'énoncer les exercices on va rappeler un résultat de base.

Rappel : équations différentielles linéaires de 2e ordre. Soit l'équation

$$y''(x) + b y'(x) + c y(x) = 0, \quad x \in I \subset \mathbb{R},$$

où $b, c \in \mathbb{R}$. On considère l'équation caractéristique

$$z^2 + b z + c = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Cette équation admet au plus deux solutions $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Il y a trois cas possibles.

Cas 1 : $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ et $z_1 \neq z_2$, alors la solution est donnée par

$$y(x) = A e^{z_1 x} + B e^{z_2 x},$$

Cas 2 : $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ et $z_1 = z_2$, alors la solution est donnée par

$$y(x) = (A x + B) e^{z_1 x},$$

Cas 3 : $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $z_1 = \overline{z_2} = \xi + i \eta$, alors la solution est donnée par

$$y(x) = e^{x \xi} [A \cos(\eta x) + B \sin(\eta x)],$$

où $A, B \in \mathbb{R}$ sont des constantes déterminées par les conditions initiales. De plus, ces solutions sont uniques.

Exercice 19.1 Soient $L > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Discuter, en fonction des valeurs de λ , l'existence de solutions $y = y(x)$, $y \not\equiv 0$ pour les problèmes

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in]0, L[\\ y(0) = y(L) = 0, \end{cases} \quad (19.24)$$

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0, & x \in]0, L[\\ y'(0) = y'(L) = 0. \end{cases} \quad (19.25)$$

Exercice 19.2 (i) Montrer que les solutions non triviales de

$$\begin{cases} g''(\theta) + \lambda g(\theta) = 0 \\ g(0) = g(2\pi), \quad g'(0) = g'(2\pi) \end{cases}$$

sont données, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$\lambda = n^2 \quad \text{et} \quad g_n(\theta) = \alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta).$$

(ii) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions

$$f_n(r) = \begin{cases} \gamma_n r^n + \delta_n r^{-n} & \text{si } n \neq 0 \\ \gamma_0 + \delta_0 \log r & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

sont solutions de

$$r^2 f''(r) + r f'(r) - n^2 f(r) = 0.$$

Exercice 19.3 Donnés $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, trouver formellement, à l'aide de la transformée de Fourier, et sous forme intégrale, une fonction $u = u(t)$ satisfaisant

$$u(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) u(t-s) ds = g(t).$$

Trouver des conditions sur f et g pour que la solution u , trouvée formellement, soit continue.

Exercice 19.4 Donnés $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, trouver, formellement et sous forme intégrale (à l'aide de la transformée de Fourier), une fonction $u = u(x)$ satisfaisant

$$u'(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) u(x-y) dy = g(x).$$

Trouver des conditions sur f et g pour que la solution u , trouvée formellement, soit C^1 .

Exercice 19.5 Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$ et 2π -périodique. Trouver formellement une solution 2π -périodique $u = u(x)$ de

$$u'(x) + u(x) + u(x + \pi) = f(x).$$

Montrer que la solution trouvée formellement est C^1 .

Exercice 19.6 Soient $f \in L^1(-\pi, \pi)$ et

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-in x} dx.$$

On rappelle (cf. Exercice 17.10) que si $f \in C^k(\mathbb{R})$ et 2π -périodique, où k est un entier, alors, pour tout $n \neq 0$,

$$|f_n| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^1}}{2\pi |n|^k}.$$

(i) Soient $f \in L^1(-\pi, \pi)$ avec $\|f\|_{L^1} \leq 2\pi$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|4in + f_n + 2(-1)^n| \geq 1.$$

(ii) Soient $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$ avec $\|f\|_{L^1} \leq 2\pi$. Trouver formellement et sous forme de série complexe une solution de

$$4u'(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t)u(t)] dt + 2u(x-\pi) = g(x).$$

(iii) Montrer que si, de plus, $g \in C^3(\mathbb{R})$ et 2π -périodique, alors la solution trouvée formellement est $C^1([-\pi, \pi])$.

19.6.2 Exercices sur la permutation des limites et des dérivées

L'exercice et le théorème qui suit sont très utiles pour montrer la convergence des solutions formelles.

Exercice 19.7 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $u_\nu \in C^1(\Omega)$ une suite de fonctions et

$$u, g_1, \dots, g_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

telles que

$$u_\nu(x) \rightarrow u(x) \quad \forall x \in \Omega$$

et, pour tout sous-ensemble compact $K \subset \Omega$,

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial x_i} \rightarrow g_i \quad \text{uniformément dans } K, \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

(i) Montrer que $\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$ dans Ω et $u \in C^1(\Omega)$.

(ii) Montrer que u_ν converge vers u localement uniformément dans Ω .

L'Exercice 19.7 se généralise facilement par récurrence. Avant d'énoncer le théorème (sans démonstration) introduisons la notation suivante. Pour tout $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ on écrit

$$|l| = l_1 + \dots + l_n.$$

Théorème 19.12 (Permutation de limite et dérivée) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $x = (x_1, \dots, x_n)$, une suite $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset C^k(\Omega)$, où k est un entier, et des fonctions $u, g_l : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, avec $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ et $|l| \leq k$, tels que

$$u_\nu(x) \rightarrow u(x), \quad \forall x \in \Omega$$

et pour tout sous-ensemble compact $K \subset \Omega$ et pour tout $l \in \mathbb{N}^n$ tel que $|l| \leq k$

$$\frac{\partial^{l_1+\dots+l_n} u_\nu}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} \rightarrow g_l \quad \text{uniformément dans } K.$$

Alors $u \in C^k(\Omega)$ et, pour tout $l \in \mathbb{N}^n$ tel que $|l| \leq k$,

$$\frac{\partial^{l_1+\dots+l_n} u(x)}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} = g_l(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

19.6.3 Exercices sur les EDP

Exercice 19.8 Soient $f \in L^1(0, \pi)$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(y) \sin(ny) dy$$

et, pour $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}.$$

(i) Montrer que $u(x, t)$ est bien définie, c'est à dire que la suite des sommes partielles converge.

(ii) Montrer que $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ où $\mathbb{R}_+^* = \{t > 0\}$ et satisfait

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & x \in]0, \pi[, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

(iii) Si, de plus, $f \in C^4(\mathbb{R})$, 2π -périodique et impaire, alors

$$u(x, t) \rightarrow f(x) \quad \text{uniformément quand } t \rightarrow 0.$$

Remarque. Ce résultat reste vrai si $f \in C^1(\mathbb{R})$, mais la preuve est plus compliquée (cf. corrigé).

Exercice 19.9 Soient $f \in L^1$, $\widehat{f} \in L^1$ et

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x - 4\pi^2 \xi^2 t} d\xi$$

(i) Montrer que $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ où $\mathbb{R}_+^* = \{t > 0\}$ et satisfait

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(ii) Montrer que

$$u(x, t) \rightarrow f(x) \quad \text{uniformément quand } t \rightarrow 0.$$

Exercice 19.10 Soient $\alpha \in L^1(0, \pi)$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \alpha(t) \sin(nt) dt$$

et

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sinh(n\pi)} [\sinh n(\pi - y)] \sin(nx).$$

(i) Montrer que $u \in C^\infty([0, \pi] \times]0, \pi])$ et satisfait

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & x, y \in]0, \pi[\\ u(x, \pi) = 0 & x \in]0, \pi[\\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 & y \in]0, \pi[. \end{cases}$$

(ii) Montrer que si, de plus, $\alpha \in C^3(\mathbb{R})$ (le résultat est vrai si $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$, mais nous ne le démontrerons pas), 2π -périodique et impaire, alors

$$u(x, y) \rightarrow \alpha(x) \quad \text{uniformément quand } y \rightarrow 0.$$

Indication. Montrer que pour tout $y > 0$

$$\left| \frac{\sinh(n(\pi - y))}{\sinh(n\pi)} - 1 \right| \leq 2ny.$$

Exercice 19.11 (i) Trouver, formellement et sous forme intégrale, $u = u(x, t)$ solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = u_t + u_{xxxx} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(ii) Montrer que, si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors $u \in C(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$. En fait $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$, mais on supposera cela sans démonstration.

(iii) Montrer que si $y \geq 0$, alors

$$0 \leq 1 - e^{-y} \leq y.$$

(iv) Montrer que si $g(\xi) = \xi^4 \widehat{f}(\xi)$ est telle que $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$u(x, t) \rightarrow f(x) \quad \text{uniformément quand } t \rightarrow 0.$$

Exercice 19.12 (i) Trouver, formellement, à l'aide des séries de Fourier $u = u(x, t)$ solution de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = u & x \in]0, \pi[, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in [0, \pi] \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

(ii) Montrer que, si $f \in L^1(0, \pi)$, alors la fonction u , obtenue formellement dans la première question, est $C^0([0, \pi[\times]0, \infty[)$. En fait, pour la même raison que précédemment, on peut montrer que $u \in C^\infty([0, \pi[\times]0, \infty[)$, mais on admettra ceci sans démonstration.

(iii) Soit $f \in C^4(\mathbb{R})$ une fonction 2π -périodique et paire. On rappelle (cf. Exercice 17.10) qu'alors les coefficients de Fourier (en cosinus) a_n de f sont tels qu'il existe une constante γ vérifiant

$$|a_n| \leq \frac{\gamma}{n^4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En déduire que la fonction u , trouvée dans la première question, vérifie

$$u(x, t) \rightarrow f(x) \quad \text{uniformément quand } t \rightarrow 0.$$

Exercice 19.13 Soit $u : [0, \pi] \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$. On dénote les dérivées partielles de u par u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt} et u_{tt} . Soit $f \in C^3(\mathbb{R})$, 2π -périodique et paire. Soit le problème

$$(P) \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & (x, t) \in]0, \pi[\times]0, +\infty[\\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & t \in [0, +\infty[\\ u(x, 0) = f(x) & x \in [0, \pi] \\ u_t(x, 0) = 0 & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

- (i) Trouver formellement une solution u de (P).
 (ii) Montrer (à l'aide des résultats de l'Exercice 17.11) que la solution u trouvée formellement est $C^2([0, \pi] \times [0, +\infty[)$.
 (iii) Montrer (à l'aide des résultats de l'Exercice 17.11) que la solution u trouvée formellement est telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} |u(x, t) - f(x)| = 0$$

uniformément pour $x \in [0, \pi]$.

Exercice 19.14 Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

- (i) Trouver, formellement et sous forme intégrale, une solution $u = u(x, y)$ de

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u(x, y) \rightarrow 0 & y \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

On rappelle que si $\lambda \neq 0$ alors la solution $v = v(t)$ de

$$\begin{cases} v'' - \lambda^2 v = 0 & \text{si } t > 0 \\ v(0) = \mu & \text{si } t = 0 \\ v(t) \rightarrow 0 & \text{si } t \rightarrow +\infty \end{cases}$$

est donnée par

$$v(t) = \mu e^{-|\lambda|t}.$$

- (ii) Montrer que la solution trouvée formellement dans la question précédente est telle que

$$u(x, y) \rightarrow f(x) \quad \text{uniformément quand } y \rightarrow 0.$$

Exercice 19.15 (i) Soit $f \in L^1(0, \pi)$ et

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx.$$

Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|a_n| \leq c \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Montrer que si $f \in C^4([0, \pi])$ et

$$f'(0) = f'(\pi) = f'''(0) = f'''(\pi) = 0,$$

alors il existe une constante $c > 0$ (cf. Exercice 17.10) telle que

$$|a_n| \leq \frac{c}{n^4} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

(ii) Trouver, formellement, une solution $u = u(x, t)$ de

$$\begin{cases} \frac{1}{1+3t^2} u_t = u_{xx} & (x, t) \in]0, \pi[\times]0, +\infty[\\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & t \in [0, +\infty[\\ u(x, 0) = f(x) & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

(iii) Montrer que si $f \in L^1(0, \pi)$ la solution trouvée formellement est telle que $u \in C([0, \pi] \times]0, +\infty[)$. On peut montrer (mais on ne le fera pas) de la même façon qu'en fait $u \in C^\infty([0, \pi] \times]0, +\infty[)$.

(iv) Montrer que si, de plus, $f \in C^4([0, \pi])$ et

$$f'(0) = f'(\pi) = f'''(0) = f'''(\pi) = 0,$$

alors

$$u(x, t) \rightarrow f(x) \quad \text{uniformément (en } x) \text{ quand } t \rightarrow 0.$$

Exercice 19.16 Soit $f \in C^4([1, e])$ (où e est tel que $\log e = 1$), avec

$$f(1) = f(e) = f'(1) = f'(e) = f''(1) = f''(e) = f'''(1) = f'''(e) = 0$$

Soit $u : [1, e] \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$, solution de

$$(P_1) \quad \begin{cases} u_t = x^2 u_{xx} + 3x u_x & (x, t) \in]1, e[\times]0, +\infty[\\ u(1, t) = u(e, t) = 0 & t \in [0, +\infty[\\ u(x, 0) = f(x) & x \in [1, e] \end{cases}$$

où on a dénoté les dérivées partielles de u par u_t, u_x et u_{xx} .

(i) Soit $U = U(y, t)$ et on pose

$$u(x, t) = \frac{U(\log x, t)}{x}.$$

Montrer que l'équation $u_t = x^2 u_{xx} + 3x u_x$ devient alors

$$U_t = U_{yy} - U.$$

Que devient alors le problème (P_1) pour la fonction $U = U(y, t)$. On dénotera le problème pour U par (P_2) .

(ii) Trouver, formellement, une solution U de (P_2) , puis u de (P_1) .

(iii) Montrer que la solution trouvée à la question précédente est $C^\infty([1, e] \times]0, +\infty[)$.
On pourra se contenter de montrer que $u \in C([1, e] \times]0, +\infty[)$.

(iv) Montrer que la solution u trouvée formellement est telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} |u(x, t) - f(x)| = 0 \quad \text{quand } t \rightarrow 0, \text{ uniformément pour } x \in [1, e].$$

Remarque. On admettra (cf. Exercice 17.10) que si $g \in C^4([\alpha, \beta])$, avec

$$g(\alpha) = g(\beta) = g'(\alpha) = g'(\beta) = g''(\alpha) = g''(\beta) = g'''(\alpha) = g'''(\beta) = 0,$$

alors les coefficients de Fourier en sinus, b_n , de g sont tels qu'il existe une constante γ vérifiant

$$|b_n| \leq \frac{\gamma}{n^4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Exercice 19.17 Soient $c \leq 1$ et $f \in C^1([0, \pi])$, avec

$$f(0) = f(\pi) = 0.$$

Soit $u : [0, \pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, y)$, solution de

$$(P) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + cu = 0 & (x, y) \in]0, \pi[\times]0, \pi[\\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 & y \in [0, \pi] \\ u_y(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad u_y(x, \pi) = 0 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

où on a noté les dérivées partielles de u par u_x, u_y, u_{xx} et u_{yy} .

(i) Trouver formellement une solution de (P) quand $c < 1$.

(ii) Quand $c = 1$, trouver formellement, comme précédemment, une solution de (P). Quelle condition faut-il rajouter sur f pour que le problème soit bien posé ? Et dans ce cas, que peut-on dire de l'unicité ?

(iii) Montrer que la solution trouvée à la question (i) (dans le cas $c < 1$) est telle que $u \in C([0, \pi] \times]0, \pi])$.

Suggestion et rappel. 1) On sait que les solutions de

$$w''(t) + \mu w(t) = 0$$

sont données par (où a et b sont des constantes)

$$w(t) = \begin{cases} a \cos(t\sqrt{\mu}) + b \sin(t\sqrt{\mu}) & \text{si } \mu > 0 \\ a + bt & \text{si } \mu = 0 \\ a \cosh(t\sqrt{|\mu|}) + b \sinh(t\sqrt{|\mu|}) & \text{si } \mu < 0. \end{cases}$$

2) On rappelle que

$$\cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y = \cosh(x - y).$$

3) Pour établir le point (iii) de l'exercice, on pourra d'abord montrer le fait suivant. Soient $0 < \epsilon < \pi$ et $\alpha_n > 0$ une suite monotone telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty.$$

Prouver qu'il existe n_0 , un entier suffisamment grand, et une constante $\gamma = \gamma(\epsilon, n_0) > 0$ telle que

$$0 < \frac{\cosh((\pi - y)\alpha_n)}{\sinh(\pi\alpha_n)} \leq \gamma e^{-\alpha_n y} \leq \gamma e^{-\alpha_n \epsilon}, \quad \forall y \in [\epsilon, \pi] \text{ et } \forall n \geq n_0.$$

Exercice 19.18 Soient $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

(i) Trouver, formellement et sous forme intégrale, une solution $u = u(x, t)$ de

$$\begin{cases} u_t + u_{xxxx} + u = 0 & x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $u_t = \partial u / \partial t$ et $u_{xxxx} = \partial^4 u / \partial x^4$.

(ii) Montrer que la solution trouvée formellement dans la question précédente est telle que

$$u(x, t) \rightarrow f(x) \quad \text{uniformément quand } t \rightarrow 0.$$

Exercice 19.19 (i) Soit $f \in L^1(0, 2\pi)$. Trouver formellement $u = u(x, t)$ solution de

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - (1 + 2t)u & x \in]0, 2\pi[, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(2\pi, t) & t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) & t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in]0, 2\pi[\end{cases}$$

(ii) Montrer que si $f \in C^4(\mathbb{R})$ et 2π -périodique, alors pour tout $x \in [0, 2\pi]$,

$$u(x, t) \rightarrow f(x) \quad \text{quand } t \rightarrow 0.$$

On rappelle, si nécessaire, que, si $\alpha \geq 1$, alors, pour tout $0 \leq t \leq 1$,

$$0 \leq 1 - e^{-\alpha t - t^2} \leq 3\alpha t.$$

Exercice 19.20 Soit $t > 0$ et

$$L^t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi c^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4c^2 t}}.$$

(i) En se rappelant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi y^2} dy = 1$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L^t(x) dx = 1.$$

(ii) Montrer (à l'aide du théorème de la convergence dominée) que pour tout $\delta > 0$ on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\int_{|x| \geq \delta} L^t(x) dx \right] = 0.$$

(iii) Soient $f \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et

$$u(x, t) = \begin{cases} (f * L^t)(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0 \\ f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \text{ et } t = 0. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} |u(x, t) - f(x)| = 0.$$

Exercice 19.21 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 \neq 0$. Soit $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ tel que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

(i) Trouver formellement $u = u(x, t)$ solution de

$$\begin{cases} a^2 u_t - b^2 u_{tt} - u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R} \text{ et } t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u(x, t) \rightarrow 0 & t \rightarrow +\infty \end{cases}$$

où on a noté, comme d'habitude $u_t = \partial u / \partial t$, $u_{tt} = \partial^2 u / \partial t^2$ et $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$.

(ii) Montrer que la solution trouvée formellement dans la question précédente est $C^0(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ et que

$$u(x, t) \rightarrow f(x) \quad \text{uniformément quand } t \rightarrow 0.$$

19.7 Corrigés

Exercice 19.1 En appliquant le rappel, l'équation

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \in]0, L[$$

admet, en fonction du signe de λ , les solutions générales (uniques) suivantes

$$y(x) = \begin{cases} A e^{\sqrt{-\lambda}x} + B e^{-\sqrt{-\lambda}x} & \text{si } \lambda < 0 \\ Ax + B & \text{si } \lambda = 0 \\ A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x) & \text{si } \lambda > 0. \end{cases}$$

(i) Soient les conditions de bord $y(0) = y(L) = 0$.

Cas 1 : $\lambda \leq 0$. On vérifie facilement qu'alors on a nécessairement $A = B = 0$. Par conséquent, seule la solution triviale $y \equiv 0$ satisfait le problème (19.24) pour $\lambda \leq 0$.

Cas 2 : $\lambda > 0$. On a donc $y(0) = A = 0$ et $y(L) = B \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$. La seule possibilité pour que la solution soit non-triviale ($B \neq 0$) est

$$\begin{aligned} B \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 &\Leftrightarrow \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\lambda}L = n\pi, \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2. \end{aligned}$$

En conclusion, il existe des solutions non triviales de (19.24) si $\lambda = (n\pi/L)^2$, et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. De plus les solutions sont alors données par

$$y_n(x) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L],$$

où α_n est une constante arbitraire.

(ii) Soient les conditions de bord $y'(0) = y'(L) = 0$. Le raisonnement est analogue au précédent et nous ne rentrons pas dans les détails. On obtient des solutions non-triviales pour $\lambda = (n\pi/L)^2$, y compris $n = 0$, données par

$$y_n(x) = \beta_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad x \in [0, L],$$

où β_n est une constante arbitraire. ♠

Exercice 19.2 (i) Le raisonnement est en tout point semblable à celui de l'exercice précédent.

(ii) Il suffit d'effectuer le calcul. ♠

Exercice 19.3 Soit

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \xi t} u(t) dt.$$

On a donc, en prenant la transformée de Fourier de l'équation,

$$\widehat{u}(\xi) + \widehat{u}(\xi) \widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$$

et ainsi

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{1 + \widehat{f}(\xi)}.$$

Par conséquent, en utilisant la formule d'inversion de Fourier, on obtient

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{g}}{1 + \widehat{f}}\right)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi t} \frac{\widehat{g}(\xi)}{1 + \widehat{f}(\xi)} d\xi.$$

On dénote par

$$h(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{1 + \widehat{f}(\xi)} \quad \text{et} \quad H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi t} h(\xi) d\xi.$$

Pour que la solution u trouvée formellement soit continue, il suffit de supposer que

- $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, pour que \widehat{f} et \widehat{g} aient un sens,
- $\xi \rightarrow |h(\xi)|$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, pour que $H \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ (cf. Théorème 18.2 (i)) et $H * f$ soit bien défini,
- $|\widehat{g}| \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C^0(\mathbb{R})$ pour que (cf. Théorème 18.5)

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi x} \widehat{g}(\xi) d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En effet

$$H(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) u(t-s) ds = g(t).$$

$$H(t) + (H * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi t} h(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi(t-s)} h(\xi) d\xi \right] f(s) ds \right\}$$

et ainsi (en permutant les intégrales)

$$H + H * f = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi x} h(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \xi s} f(s) ds \right] e^{2\pi i \xi t} h(\xi) d\xi \right\}.$$

On a donc bien montré que

$$H + H * f = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi t} h(\xi) [1 + \widehat{f}(\xi)] d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi t} \widehat{g}(\xi) d\xi = g. \quad \spadesuit$$

Exercice 19.4 Soit

$$\widehat{u}(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \xi x} u(x) dx.$$

On a donc, en prenant la transformée de Fourier de l'équation,

$$(2\pi i \xi) \widehat{u}(\xi) + \widehat{u}(\xi) \widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$$

et ainsi

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{2\pi i \xi + \widehat{f}(\xi)}.$$

Notons par h le membre de droite, à savoir

$$h(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{2\pi i \xi + \widehat{f}(\xi)}.$$

Par conséquent, en utilisant la formule d'inversion de Fourier, on obtient

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}(h)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi x} h(\xi) d\xi. \quad (19.26)$$

Appelons H le membre de droite, à savoir

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi x} h(\xi) d\xi.$$

Pour que la solution u , trouvée formellement dans (19.26), soit C^1 , il suffit de supposer que

- $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, pour que \widehat{f} et \widehat{g} aient un sens,
- $\xi \rightarrow |h(\xi)|$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, pour que $H \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ (cf. Théorème 18.2 (i)) et $H * f$ soit bien défini,
- $\xi \rightarrow |\xi h(\xi)|$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, pour que $H' \in C^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ (cf. Théorème 18.2 (i) et (iv)),
- $|\widehat{g}| \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in C^0(\mathbb{R})$ pour que (cf. Théorème 18.5)

$$g(x) = \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi x} \widehat{g}(\xi) d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} H'(x) + (H * f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi i e^{2\pi i \xi x} \xi h(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi(x-y)} h(\xi) d\xi \right] f(y) dy \right\} \end{aligned}$$

et donc (en permutant les intégrales)

$$\begin{aligned} &H' + H * f \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi i e^{2\pi i \xi x} \xi h(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \xi y} f(y) dy \right] e^{2\pi i \xi x} h(\xi) d\xi \right\}. \end{aligned}$$

On a ainsi bien trouvé

$$H' + H * f = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi x} h(\xi) \left[2\pi i \xi + \widehat{f}(\xi) \right] d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \xi x} \widehat{g}(\xi) d\xi = g. \quad \spadesuit$$

Exercice 19.5 (i) On procède formellement. On écrit

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n \cos(nx) + g_n \sin(nx))$$

et on cherche une solution de la forme

$$u(x) = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n \cos(nx) + v_n \sin(nx)).$$

On observe que

$$u'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-n u_n \sin(nx) + n v_n \cos(nx))$$

$$u(x + \pi) = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} ((-1)^n u_n \cos(nx) + (-1)^n v_n \sin(nx))$$

et donc

$$\begin{aligned} u'(x) + u(x) + u(x + \pi) &= u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n v_n + (1 + (-1)^n) u_n) \cos(nx)] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} [(-n u_n + (1 + (-1)^n) v_n) \sin(nx)]. \end{aligned}$$

En remettant dans l'équation et en égalant les coefficients on déduit que

$$u_0 = \frac{f_0}{2}, \quad n v_n + (1 + (-1)^n) u_n = f_n, \quad -n u_n + (1 + (-1)^n) v_n = g_n$$

et par conséquent, en posant $a = 1 + (-1)^n$,

$$u_0 = \frac{f_0}{2}, \quad u_n = \frac{a f_n - n g_n}{n^2 + a^2}, \quad v_n = \frac{n f_n + a g_n}{n^2 + a^2}.$$

(ii) Comme $f \in C^2$, on déduit qu'il existe une constante γ_1 telle que

$$|f_n| + |g_n| \leq \frac{\gamma_1}{n^2}, \quad \forall n \geq 1.$$

On a ainsi qu'il existe une constante γ_2 telle que

$$|u_n| + |v_n| \leq \frac{\gamma_2}{n^3}, \quad \forall n \geq 1.$$

De ceci on obtient que si

$$F_N u(x) = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^N (u_n \cos(nx) + v_n \sin(nx)),$$

alors $F_N u \rightarrow u$ et $(F_N u)' \rightarrow u'$ uniformément et le résultat suit. ♠

Exercice 19.6 (i) Comme on sait que $|f_n| \leq 1$, on a, quand $n = 0$, que

$$|4in + f_n + 2(-1)^n| = |f_0 + 2| \geq 2 - |f_0| \geq 1$$

alors que, quand $n \neq 0$, on trouve immédiatement que

$$|4in + f_n + 2(-1)^n| \geq 4|n| - |f_n| - 2 \geq 1.$$

(ii) On écrit

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e^{in x} \quad \text{où} \quad u_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x) e^{-in x} dx$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{i n x} \quad \text{où} \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i n x} dx$$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n e^{i n x} \quad \text{où} \quad g_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-i n x} dx.$$

On observe que le terme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) u(t)] dt = (f * u)(x).$$

On se rappelle (cf. Exercice 17.13), par ailleurs, que les coefficients de Fourier de $(f * u)$ sont $f_n u_n$. En remplaçant dans l'équation on trouve

$$4i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n u_n e^{i n x} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n u_n e^{i n x} + 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e^{i n x} e^{i n \pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n e^{i n x}$$

et donc

$$(4i n + f_n + 2(-1)^n) u_n = g_n.$$

Sachant, par (i), que $(4i n + f_n + 2(-1)^n) \neq 0$ pour tout n , on infère que les coefficients de u sont donnés par

$$u_n = \frac{g_n}{4i n + f_n + 2(-1)^n}.$$

(iii) Comme $g \in C^3([-\pi, \pi])$, on a qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que $|g_n| \leq \gamma/|n|^3$ et donc, en invoquant (i) et (ii),

$$|u_n| \leq \frac{\gamma}{|n|^3}.$$

On a ainsi que les séries formelles de u et de sa dérivée convergent uniformément. ♠

Exercice 19.7 (i) On commence par remarquer que les g_i sont continues dans Ω puisqu'elles sont limites uniformes de fonctions continues. Ainsi, il suffit de montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{dans } \Omega$$

pour montrer que $u \in C^1(\Omega)$. Soit $1 \leq i \leq n$ et $a \in \Omega$. On a, pour t suffisamment petit,

$$u_n(a + t e_i) - u_n(a) = \int_0^t \frac{\partial u_n}{\partial x_i}(a + s e_i) ds.$$

Laissant tendre n vers l'infini dans l'équation précédente, il vient

$$u(a + t e_i) - u(a) = \int_0^t g_i(a + s e_i) ds,$$

où on a utilisé que $\partial u / \partial x_i$ converge (localement) uniformément vers g_i pour permuter la limite et l'intégrale. Puisque g_i est continue, il s'ensuit que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(a + t e_i) - u(a)}{t} = g_i(a).$$

(ii) Soit $x_0 \in \Omega$ donné et soit $\delta > 0$ assez petit pour que l'on ait convergence uniforme de ∇u_n vers ∇u dans la boule $B_\delta(x_0)$. On va montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{|h| < \delta} |u_n(x_0 + h) - u(x_0 + h)| \right\} = 0. \quad (19.27)$$

Soit $|h| < \delta$. On a

$$\begin{aligned} |u_n(x_0 + h) - u(x_0 + h)| &\leq |[u_n(x_0 + h) - u(x_0 + h)] - [u_n(x_0) - u(x_0)]| \\ &\quad + |u_n(x_0) - u(x_0)|. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} &|[u_n(x_0 + h) - u(x_0 + h)] - [u_n(x_0) - u(x_0)]| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} [u_n(x_0 + t h) - u(x_0 + t h)] dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 \langle \nabla u_n(x_0 + t h) - \nabla u(x_0 + t h); h \rangle dt \right| \end{aligned}$$

on déduit que

$$\begin{aligned} &|u_n(x_0 + h) - u(x_0 + h)| \\ &\leq \delta \int_0^1 \left\{ \sup_{t \in [0,1]} |\nabla u_n(x_0 + t h) - \nabla u(x_0 + t h)| dt \right\} + |u_n(x_0) - u(x_0)| \\ &\leq \delta \sup_{y \in B_\delta(x_0)} |\nabla u_n(y) - \nabla u(y)| + |u_n(x_0) - u(x_0)|. \end{aligned}$$

Puisque $u_n(x_0)$ converge vers $u(x_0)$ et puisque ∇u_n converge uniformément vers ∇u dans $B_\delta(x_0)$ on a bien que (19.27) est vérifié. ♠

Exercice 19.8 (i) Puisque $f \in L^1$, il existe une constante C tel que

$$|b_n| \leq C \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soit, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Puisque (par exemple, grâce à la règle de d'Alembert)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 t} < \infty$$

on déduit que

$$|u(x, t) - u_N(x, t)| \leq C \sum_{n=N+1}^{\infty} e^{-n^2 t} \rightarrow 0.$$

(ii) Il est clair que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $u_N \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$. Posons, pour tout $l, m \in \mathbb{N}$,

$$u_N^{(l,m)}(x, t) = \frac{\partial^{l+m} u_N(x, t)}{\partial x^l \partial t^m} = \sum_{n=1}^N b_n \frac{\partial^l \sin(nx)}{\partial x^l} \frac{\partial^m e^{-n^2 t}}{\partial t^m}$$

et

$$g_{l,m}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{\partial^l \sin(nx)}{\partial x^l} \frac{\partial^m e^{-n^2 t}}{\partial t^m}.$$

On montre de la même manière que dans (i) que les $g_{l,m}$ sont bien définis. Par le Théorème 19.12, il suffit de montrer que pour tout $l, m \in \mathbb{N}$, la suite $u_N^{(l,m)}$ converge uniformément vers $g_{l,m}$ dans tout sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, pour avoir $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ et

$$\frac{\partial^{l+m} u(x, t)}{\partial x^l \partial t^m} = g_{l,m}(x, t).$$

Soit K un tel compact ; il existe donc $\delta = \delta_K > 0$ tel que

$$t > \delta \quad \text{pour tout } (x, t) \in K.$$

On remarque également que, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k e^{-n^2 \delta} = 0. \quad (19.28)$$

Il s'ensuit, pour $(x, t) \in K$,

$$\begin{aligned} \left| u_N^{(l,m)}(x, t) - g_{l,m}(x, t) \right| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n \frac{\partial^l \sin(nx)}{\partial x^l} \frac{\partial^m e^{-n^2 t}}{\partial t^m} \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |b_n| n^{l+2m} e^{-n^2 \delta} \leq C \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{l+2m} e^{-n^2 \delta} \end{aligned}$$

et donc

$$\left| u_N^{(l,m)}(x, t) - g_{l,m}(x, t) \right| \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

A partir de là, il est trivial de voir que u satisfait l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in]0, \pi[, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

(iii) Puisque f est impaire, 2π -périodique et C^4 , on sait, par l'Exercice 17.10 et par le cours que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) \quad \text{et} \quad |b_n| \leq \frac{C}{n^4},$$

où $C > 0$ est une constante. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |u(x, t) - f(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) (e^{-n^2 t} - 1) \right| \leq C \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - e^{-n^2 t}}{n^4} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t}{n^2} \leq 2Ct \end{aligned}$$

et donc

$$|u(x, t) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow 0.$$

Voici une preuve pour le cas plus général où $f \in C^1(\mathbb{R})$. Dans ce cas, on sait, par des résultats du cours (voir notamment dans la démonstration du théorème de convergence uniforme des séries de Fourier), que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| < \infty$$

d'où

$$|u(x, t) - f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) (e^{-n^2 t} - 1) \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| (1 - e^{-n^2 t}).$$

Montrons

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| (1 - e^{-n^2 t}) \right\} = 0.$$

Pour tout $t > 0$, soit $h^t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$h^t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| (1 - e^{-n^2 t}) \chi_{[n, n+1[}(x).$$

On remarque que

$$\int_{\mathbb{R}} h^t = \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| (1 - e^{-n^2 t}),$$

que

$$0 \leq h^t \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| \chi_{[n, n+1[} \in L^1(\mathbb{R})$$

et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} h^t(x) = 0.$$

Utilisant le théorème de la convergence dominée, il vient alors que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} h^t = 0$$

ce qui termine la preuve. ♠

Exercice 19.9 Puisque $f, \widehat{f} \in L^1$, alors par le théorème de la transformée inverse de Fourier (cf. Théorème 18.5), f est égale *presque partout* à une fonction continue, autrement dit, la classe d'équivalence des fonctions égales presque partout à f admet un *représentant continu*. Sans perte de généralité, quitte à redéfinir f sur un ensemble de mesure nulle, on peut donc supposer que, de plus, $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(i) Posons

$$u_N(x, t) = \int_{-N}^N \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x - 4\pi^2 c^2 \xi^2 t} d\xi.$$

On remarque que, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|\xi| > N} |\xi|^k e^{-4\pi^2 c^2 \xi^2 \delta} = 0. \quad (19.29)$$

Puisque

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1},$$

on obtient immédiatement que

$$u_N(x, t) \rightarrow u(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*.$$

Du cours d'analyse de première année on sait que, que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $u_N \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ et que pour $l, m \in \mathbb{N}$

$$u_N^{(l, m)}(x, t) = \frac{\partial^{l+m} u_N(x, t)}{\partial x^l \partial t^m} = \int_{-N}^N \widehat{f}(\xi) \frac{\partial^l e^{2\pi i \xi x}}{\partial x^l} \frac{\partial^m e^{-4\pi^2 c^2 \xi^2 t}}{\partial t^m} d\xi.$$

Posons

$$g_{l, m}(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \frac{\partial^l (e^{2\pi i \xi x})}{\partial x^l} \frac{\partial^m (e^{-4\pi^2 c^2 \xi^2 t})}{\partial t^m} d\xi$$

et montrons que $u_N^{(l, m)}$ converge uniformément vers $g_{l, m}$ dans tout sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, ce qui prouvera, par le Théorème 19.12, que $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ et que pour tout $l, m \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial^{l+m} u(x, t)}{\partial x^l \partial t^m} = g_{l, m}(x, t).$$

Soit K un tel compact; il existe donc $\delta = \delta_K > 0$ tel que

$$t > \delta \text{ pour tout } (x, t) \in K.$$

Il s'ensuit, pour tout $(x, t) \in K$,

$$\begin{aligned} \left| u_N^{(l,m)}(x, t) - g_{l,m}(x, t) \right| &= \left| \int_{|\xi| > N} \widehat{f}(\xi) \frac{\partial^l (e^{2\pi i \xi x})}{\partial x^l} \frac{\partial^m (e^{-4\pi^2 c^2 \xi^2 t})}{\partial t^m} d\xi \right| \\ &\leq \int_{|\xi| > N} |\widehat{f}(\xi)| (2\pi)^l |\xi|^l (2\pi c)^{2m} |\xi|^{2m} e^{-4\pi^2 c^2 \xi^2 t} d\xi \\ &\leq C \int_{|\xi| > N} |\xi|^{l+2m} e^{-4\pi^2 c^2 \xi^2 t} d\xi \end{aligned}$$

où on a utilisé (19.29) avec $k = l + 2m$ et $C > 0$ est une constante indépendante de (x, t) . On a ainsi

$$\left| u_N^{(l,m)}(x, t) - g_{l,m}(x, t) \right| \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty$$

Il est ensuite immédiat de voir que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*.$$

De plus, par la formule d'inversion de la transformée de Fourier et le choix de f continue, on a que

$$u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(ii) On obtient aussi que

$$\begin{aligned} |u(x, t) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} (e^{-4\pi^2 c^2 \xi^2 t} - 1) d\xi \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| |e^{-4\pi^2 c^2 \xi^2 t} - 1| d\xi. \end{aligned}$$

Remarquant que

$$|\widehat{f}(\xi)| |e^{-4\pi^2 c^2 \xi^2 t} - 1| \leq 2 |\widehat{f}(\xi)| \in L^1(\mathbb{R})$$

et que, pour tout ξ fixé,

$$\lim_{t \rightarrow 0} |\widehat{f}(\xi)| |e^{-4\pi^2 c^2 \xi^2 t} - 1| = 0$$

on obtient le résultat par le théorème de la convergence dominée. ♠

Exercice 19.10 (i) Puisque $\alpha \in L^1$, il existe une constante C tel que

$$|a_n| \leq C \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soit, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$u_N(x, y) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\sinh(n\pi)} \sinh(n(\pi - y)) \sin(nx).$$

En remarquant que pour tout $y \in]0, \pi]$

$$\frac{\sinh(n(\pi - y))}{\sinh(n\pi)} = e^{-ny} \underbrace{\frac{1 - e^{-2n(\pi - y)}}{1 - e^{-2n\pi}}}_{\leq 1} \leq e^{-ny} \quad (19.30)$$

on voit facilement que

$$u_N(x, y) \rightarrow u(x, y).$$

Il est clair, que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $u_N \in C^\infty([0, \pi] \times]0, \pi])$ et que pour $l, m \in \mathbb{N}$,

$$u_N^{(l, m)}(x, y) = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\sinh(n\pi)} \frac{\partial^l \sin(nx)}{\partial x^l} \frac{\partial^m \sinh(n(\pi - y))}{\partial y^m}.$$

Posons

$$g_{l, m}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sinh(n\pi)} \frac{\partial^l \sin(nx)}{\partial x^l} \frac{\partial^m \sinh(n(\pi - y))}{\partial y^m}$$

et montrons que $u_N^{(l, m)}$ converge uniformément vers $g_{l, m}$ dans tout sous-ensemble compact $K \subset [0, \pi] \times]0, \pi]$, ce qui prouvera, par le Théorème 19.12, que

$$u \in C^\infty([0, \pi] \times]0, \pi]) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^{l+m} u(x, y)}{\partial x^l \partial y^m} = g_{l, m}(x, y), \quad \forall l, m \in \mathbb{N}.$$

Soit K un tel compact; il existe donc $\delta = \delta_K > 0$ tel que

$$y > \delta \quad \text{pour tout} \quad (x, y) \in K.$$

On remarque que, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{\infty} n^k \frac{\sinh(n(\pi - \delta))}{\sinh(n\pi)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^{\infty} n^k \frac{\cosh(n(\pi - \delta))}{\sinh(n\pi)} = 0. \quad (19.31)$$

On a également que, si $\delta \leq y \leq \pi$,

$$0 \leq \sinh(n(\pi - y)) \leq \sinh(n(\pi - \delta))$$

et

$$0 \leq \cosh(n(\pi - y)) \leq \cosh(n(\pi - \delta)).$$

Il s'ensuit, pour $(x, y) \in K$,

$$\begin{aligned} \left| u_N^{(l, m)}(x, y) - g_{l, m}(x, y) \right| &\leq \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{\sinh(n\pi)} \frac{\partial^l \sin(nx)}{\partial x^l} \frac{\partial^m \sinh(n(\pi - y))}{\partial y^m} \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n^{l+m} \frac{\cosh(n(\pi - y)) + \sinh(n(\pi - y))}{\sinh(n\pi)} \\ &\leq C \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{l+m} \frac{\cosh(n(\pi - \delta)) + \sinh(n(\pi - \delta))}{\sinh(n\pi)} \end{aligned}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de (x, t) et on a utilisé (19.31) avec $k = l + m$. On a donc

$$\left| u_N^{(l,m)}(x, y) - g_{l,m}(x, y) \right| \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

A partir de là, il est trivial de voir que u satisfait l'équation

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & x, y \in]0, \pi[\\ u(x, \pi) = 0 & x \in]0, \pi[\\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 & y \in]0, \pi[. \end{cases}$$

(ii) Puisque α est impaire, 2π -périodique et C^3 , on sait (cf. Exercice 17.10) que

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{et} \quad |a_n| \leq \frac{C}{n^3}$$

où $C > 0$ est une constante. Ensuite, pour tout $y \in]0, \pi]$, l'inégalité (19.30) nous donne

$$\left| \frac{\sinh(n(\pi - y))}{\sinh(n\pi)} - 1 \right| \leq 2(1 - e^{-ny}) \leq 2ny.$$

Il s'ensuit que pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$\begin{aligned} |u(x, y) - \alpha(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sinh(n(\pi - y))}{\sinh(n\pi)} - 1 \right) a_n \sin(nx) \right| \\ &\leq y \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| n \leq C y \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2Cy \end{aligned}$$

et ainsi

$$|u(x, y) - \alpha(x)| \rightarrow 0 \quad \text{quand } y \rightarrow 0.$$

Voici une preuve pour le cas plus général où $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$. Dans ce cas, on sait que

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nx) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < \infty.$$

Par (19.30) on trouve que

$$\begin{aligned} |u(x, y) - \alpha(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sinh(n(\pi - y))}{\sinh(n\pi)} - 1 \right) a_n \sin(nx) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| (1 - e^{-ny}). \end{aligned}$$

Montrons

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| (1 - e^{-ny}) \right\} = 0.$$

Pour tout $y \in]0, \pi]$, soit $h_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$h_y(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| (1 - e^{-ny}) \chi_{[n, n+1[}(x).$$

On remarque que

$$\int_{\mathbb{R}} h_y = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| (1 - e^{-ny}),$$

que

$$0 \leq h_y \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \chi_{[n, n+1[} \in L^1(\mathbb{R})$$

et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{y \rightarrow 0} [h_y(x)] = 0.$$

Utilisant le théorème de la convergence dominée, il vient alors que

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} h_y = 0,$$

ce qui termine la preuve. ♠

Exercice 19.11 (i) On appelle

$$v(\xi, t) = \mathfrak{F}(u)(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(y, t) e^{-2\pi i \xi y} dy$$

(c'est-à-dire qu'on considère t comme un paramètre et on applique la transformée de Fourier en x). On a

$$\mathfrak{F}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)(\xi, t) = (2\pi i \xi)^4 \mathfrak{F}(u)(\xi, t) = (2\pi \xi)^4 v(\xi, t)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(y, t) e^{-2\pi i \xi y} dy = \mathfrak{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)(\xi, t).$$

On pose

$$\widehat{f}(\xi) = \mathfrak{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy.$$

En prenant la transformée de Fourier (en x) des deux membres de l'équation, on a

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t) = -(2\pi \xi)^4 v(\xi, t) & t > 0 \\ v(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi). \end{cases}$$

Le problème précédent a comme solution évidente

$$v(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) e^{-(2\pi \xi)^4 t}.$$

On applique à la fonction ci-dessus la transformée de Fourier inverse (en x), ce qui nous donne comme solution

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x - (2\pi \xi)^4 t} d\xi.$$

(ii) On doit montrer que si $(x_\nu, t_\nu) \rightarrow (x, t)$, alors $u(x_\nu, t_\nu) \rightarrow u(x, t)$. Soient

$$g_\nu(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x_\nu - (2\pi \xi)^4 t_\nu} \quad \text{et} \quad g(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x - (2\pi \xi)^4 t}.$$

On trouve que

$$|g_\nu(\xi)|, |g(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi)| \quad \text{et} \quad g_\nu(\xi) \rightarrow g(\xi) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}.$$

Par le théorème de la convergence dominée, on obtient que

$$u(x_\nu, t_\nu) \rightarrow u(x, t).$$

(iii) Soit

$$h(y) = y - 1 + e^{-y}.$$

On a que $h(0) = 0$ et $h'(y) = 1 - e^{-y} \geq 0$ si $y \geq 0$. Le résultat suit immédiatement.

(iv) On a

$$\begin{aligned} |u(x, t) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} \left[e^{-(2\pi \xi)^4 t} - 1 \right] d\xi \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)| \left| 1 - e^{-(2\pi \xi)^4 t} \right| d\xi \\ &\leq (2\pi)^4 t \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)| \xi^4 d\xi \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow 0. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

Exercice 19.12 (i) *Etape 1.* On sépare les variables

$$u(x, t) = v(x) w(t)$$

et on trouve les équations

$$\begin{cases} v'' + \lambda v = 0 & x \in]0, \pi[\\ v'(0) = v'(\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad w' = -(\lambda - 1)w.$$

Les valeurs propres du premier problème sont $\lambda = n^2$ (y compris $n = 0$) et les fonctions propres sont $v_n(x) = \cos(nx)$. Avec ce choix de λ on trouve $w_n(t) = e^{-(n^2-1)t}$. Et donc la solution générale du système est

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} e^t + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) e^{-(n^2-1)t}.$$

Etape 2. On trouve alors les coefficients a_n en développant f en série de Fourier en cosinus, à savoir

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(ii) Comme $f \in L^1(0, \pi)$, on a que $|a_n| \leq \alpha$ (une constante). On a donc que

$$\left| a_n \cos(nx) e^{-(n^2-1)t} \right| \leq \alpha e^{-(n^2-1)t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Et donc tant que $t \geq t_0 > 0$, la série converge uniformément et absolument et de même pour les dérivées de n'importe quel ordre.

(iii) On obtient

$$u(x, t) - f(x) = \frac{a_0}{2} (e^t - 1) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) (e^{-(n^2-1)t} - 1).$$

Observer que

$$0 \leq \left| e^{-(n^2-1)t} - 1 \right| = 1 - e^{-(n^2-1)t} \leq (n^2 - 1)t, \quad n = 1, 2, \dots$$

et, comme $f \in C^4$, que (γ étant une constante)

$$|a_n| \leq \frac{\gamma}{n^4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

En regroupant tous ces résultats on trouve

$$|u(x, t) - f(x)| \leq t \left[\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| (n^2 - 1) \right] \leq t \left[\frac{|a_0|}{2} + \gamma \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2 - 1)}{n^4} \right].$$

et donc l'assertion. ♠

Exercice 19.13 (i) *Etape 1 (Séparations des variables).* On cherche des solutions de

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & (x, t) \in]0, \pi[\times]0, +\infty[\\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & t \in [0, +\infty[\end{cases} \quad (19.32)$$

de la forme $u(x, t) = v(x) w(t)$. On a

$$\begin{cases} v(x) w''(t) = v''(x) w(t) \Leftrightarrow \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda = \frac{w''(t)}{w(t)} \\ u_x(0, t) = v'(0) w(t) = u_x(\pi, t) = v'(\pi) w(t) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda v(x) = 0 \\ v'(0) = v'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (19.33)$$

et

$$w''(t) + \lambda w(t) = 0. \quad (19.34)$$

Les solutions non triviales de (19.33) sont données par $\lambda = n^2$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$ et

$$v_n(x) = \cos(nx) \quad (n = 0 \Rightarrow v_0(x) = 1).$$

Les w correspondants, solutions de (19.34) sont donnés par

$$w_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \quad \left(n = 0 \Rightarrow w_0(t) = \frac{a_0}{2} + b_0 t\right).$$

En résumant la solution générale de (19.32) est donnée par

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + b_0 t + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)] \cos(nx).$$

Etape 2 (Condition initiale). On veut de plus

$$u_t(x, 0) = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n b_n) \cos(nx) = 0$$

ce qui implique que $b_n = 0$ et donc

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) \cos(nx).$$

Finalement on veut aussi

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) = f(x).$$

Il suffit donc de choisir

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

(ii) On pose pour N un entier

$$u^N(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nt) \cos(nx).$$

On a clairement que $u^N \in C^\infty([0, \pi] \times [0, +\infty[)$ et que, pour tout N ,

$$\begin{cases} u_{tt}^N = u_{xx}^N & (x, t) \in]0, \pi[\times]0, +\infty[\\ u_x^N(0, t) = u_x^N(\pi, t) = 0 & t \in [0, +\infty[\\ u_t^N(x, 0) = 0 & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Par ailleurs

$$u(x, t) - u^N(x, t) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \cos(nt) \cos(nx)$$

et donc

$$|u(x, t) - u^N(x, t)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|.$$

Par l'Exercice 17.11 on déduit que u est continue, car

$$u^N \rightarrow u \quad \text{uniformément quand } N \rightarrow \infty.$$

On procède de même pour les dérivées premières et secondes. Par exemple on a que u_{tt} est continue car

$$u_{tt}(x, t) - u_{tt}^N(x, t) = - \sum_{n=N+1}^{+\infty} n^2 a_n \cos(nt) \cos(nx).$$

et donc, en utilisant à nouveau l'Exercice 17.11,

$$|u_{tt}(x, t) - u_{tt}^N(x, t)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} n^2 |a_n| \rightarrow 0 \quad \text{uniformément quand } N \rightarrow \infty.$$

(iii) Par ailleurs

$$\begin{aligned} u(x, t) - f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nt) \cos(nx) - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n [\cos(nt) - 1] \cos(nx) \end{aligned}$$

et donc

$$|u(x, t) - f(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| [1 - \cos(nt)].$$

Comme $0 \leq 1 - \cos(nt) \leq n^2 t^2$, on a

$$|u(x, t) - f(x)| \leq t^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 |a_n|.$$

on déduit de l'Exercice 17.11 que

$$u(\cdot, t) \rightarrow f \quad \text{uniformément quand } t \rightarrow 0. \quad \spadesuit$$

Exercice 19.14 (i). On dénote par $v(\xi, y)$ la transformée de Fourier en x (y jouant le rôle d'un paramètre) de $u(x, y)$, par abus de notations on écrira $\mathfrak{F}(u)$, i.e.

$$v(\xi, y) = \mathfrak{F}(u)(\xi, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

on a de plus que

$$v(\xi, 0) = \mathfrak{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi).$$

Les propriétés des transformées de Fourier nous permettent d'écrire

$$\begin{cases} \mathfrak{F}(u_{xx})(\xi, y) = (2\pi i \xi)^2 \mathfrak{F}(u)(\xi, y) = -4\pi^2 \xi^2 v(\xi, y) \\ \mathfrak{F}(u_{yy})(\xi, y) = v_{yy}(\xi, y). \end{cases}$$

En revenant au problème donné, on applique la transformée de Fourier (en x) aux deux membres de l'équation et on se ramène au système suivant

$$\begin{cases} v_{yy}(\xi, y) - 4\pi^2 \xi^2 v(\xi, y) = 0 & y > 0 \\ v(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) & \xi \in \mathbb{R} \\ v(\xi, y) \rightarrow 0 & y \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

En considérant ξ comme un paramètre (ici on suppose que $\xi \neq 0$), on trouve que la solution est donnée par

$$v(\xi, y) = \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi|\xi|y}.$$

La solution du problème est donc obtenue en appliquant la transformée de Fourier inverse

$$u(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}(v(\xi, y))(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi|\xi|y} e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

(ii) Montrons maintenant que

$$u(x, y) \rightarrow f(x) \quad \text{uniformément quand } y \rightarrow 0.$$

On trouve

$$\begin{aligned} |u(x, y) - f(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)| \left| e^{-2\pi|\xi|y} e^{2\pi i \xi x} - e^{2\pi i \xi x} \right| d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)| \left(1 - e^{-2\pi|\xi|y} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Si on note

$$s_y(\xi) = |\widehat{f}(\xi)| \left(1 - e^{-2\pi|\xi|y} \right) \leq |\widehat{f}(\xi)|$$

on a que $s_y \rightarrow 0$ quand $y \rightarrow 0$. Comme $|\widehat{f}| \in L^1(\mathbb{R})$, on déduit, par le théorème de la convergence dominée, le résultat souhaité. ♠

Exercice 19.15 (i) Etape 1. Comme $f \in L^1(0, \pi)$ on a

$$|a_n| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(x) \cos(nx)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(x)| dx = \frac{2}{\pi} \|f\|_{L^1}$$

et donc il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|a_n| \leq c \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Etape 2. On a, en intégrant par parties que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \left[2 f(x) \frac{\sin(nx)}{n\pi} \right]_0^\pi - \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi f'(x) \sin(nx) dx \\ &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^\pi f'(x) \sin(nx) dx. \end{aligned}$$

En intégrant par parties à nouveau

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^\pi f'(x) \sin(nx) dx = \left[2 f'(x) \frac{\cos(nx)}{n^2\pi} \right]_0^\pi - \frac{2}{n^2\pi} \int_0^\pi f''(x) \cos(nx) dx \\ &= -\frac{2}{n^2\pi} \int_0^\pi f''(x) \cos(nx) dx. \end{aligned}$$

Intégrant par parties une troisième fois on trouve

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{2}{n^2\pi} \int_0^\pi f''(x) \cos(nx) dx = -\left[2 f''(x) \frac{\sin(nx)}{n^3\pi} \right]_0^\pi + \frac{2}{n^3\pi} \int_0^\pi f'''(x) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{n^3\pi} \int_0^\pi f'''(x) \sin(nx) dx. \end{aligned}$$

Finalement en intégrant, à nouveau, par parties on obtient

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{n^3\pi} \int_0^\pi f^{(3)}(x) \sin(nx) dx = -\left[2 f^{(3)}(x) \frac{\cos(nx)}{n^4\pi} \right]_0^\pi + \frac{2}{n^4\pi} \int_0^\pi f^{(4)}(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{n^4\pi} \int_0^\pi f^{(4)}(x) \cos(nx) dx. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|a_n| \leq \frac{2}{n^4\pi} \int_0^\pi |f^{(4)}(x) \cos(nx)| dx = \frac{2}{n^4\pi} \int_0^\pi |f^{(4)}(x)| dx = \frac{2}{n^4\pi} \|f^{(4)}\|_{L^1}$$

et donc le résultat.

(ii) *Etape 1 (Séparations des variables).* On cherche des solutions de

$$\begin{cases} \frac{1}{1+3t^2} u_t = u_{xx} & (x, t) \in]0, \pi[\times]0, +\infty[\\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 & t \in [0, +\infty[\end{cases} \quad (19.35)$$

de la forme $u(x, t) = v(x) w(t)$. On a

$$\begin{cases} \frac{v(x)w'(t)}{1+3t^2} = v''(x)w(t) \Leftrightarrow \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda = \frac{w'(t)}{(1+3t^2)w(t)} \\ u_x(0, t) = v'(0)w(t) = u_x(\pi, t) = v'(\pi)w(t) = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda v(x) = 0 \\ v'(0) = v'(\pi) = 0 \end{cases} \quad (19.36)$$

et

$$w'(t) + \lambda(1 + 3t^2)w(t) = 0. \quad (19.37)$$

Les solutions non triviales de (19.36) sont données par $\lambda = n^2$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$ et

$$v_n(x) = \cos(nx).$$

Les w correspondants, solutions de (19.37), sont donnés par

$$w_n(t) = e^{-n^2(t+t^3)}.$$

En résumant la solution générale de (19.35) est donnée par

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) e^{-n^2(t+t^3)}.$$

Etape 2 (Condition initiale). On veut de plus

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) = f(x).$$

Il suffit donc de choisir

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx.$$

(iii) On pose pour N un entier

$$u^N(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) e^{-n^2(t+t^3)}.$$

On a clairement que $u^N \in C^\infty([0, \pi] \times [0, +\infty[)$ et que, pour tout N ,

$$\begin{cases} \frac{1}{1+3t^2} u_t^N = u_{xx}^N & (x, t) \in]0, \pi[\times]0, +\infty[\\ u_x^N(0, t) = u_x^N(\pi, t) = 0 & t \in [0, +\infty[. \end{cases}$$

Par ailleurs

$$u(x, t) - u^N(x, t) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n \cos(nx) e^{-n^2(t+t^3)}$$

et donc

$$|u(x, t) - u^N(x, t)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| e^{-n^2(t+t^3)}.$$

Si on prend $\alpha > 0$ quelconque, on a, pour tout $(x, t) \in [0, \pi] \times [\alpha, +\infty[$, que

$$|u(x, t) - u^N(x, t)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| e^{-n^2(\alpha+\alpha^3)} \leq c \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-n^2(\alpha+\alpha^3)}.$$

On déduit alors que

$$u^N \rightarrow u \quad \text{uniformément sur } [0, \pi] \times [\alpha, +\infty[\text{ quand } N \rightarrow \infty$$

et donc, comme $\alpha > 0$ est arbitraire, $u \in C([0, \pi] \times]0, +\infty[)$.

(iv) Par ailleurs

$$\begin{aligned} u(x, t) - f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) e^{-n^2(t+t^3)} - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left[e^{-n^2(t+t^3)} - 1 \right] \cos(nx) \end{aligned}$$

et donc

$$|u(x, t) - f(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \left[1 - e^{-n^2(t+t^3)} \right].$$

Comme $0 \leq 1 - e^{-n^2(t+t^3)} \leq n^2(t+t^3)$, on a

$$|u(x, t) - f(x)| \leq (t+t^3) \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 |a_n|$$

et par (i)

$$|u(x, t) - f(x)| \leq c(t+t^3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

On a donc bien montré que

$$u(x, t) \rightarrow f(x) \quad \text{uniformément (en } x) \text{ quand } t \rightarrow 0. \quad \spadesuit$$

Exercice 19.16 (i) On a clairement que

$$u_t(x, t) = \frac{U_t(\log x, t)}{x}, \quad u_x(x, t) = -\frac{U(\log x, t)}{x^2} + \frac{U_y(\log x, t)}{x^2}$$

et

$$u_{xx}(x, t) = \frac{2U(\log x, t)}{x^3} - \frac{U_y(\log x, t)}{x^3} - \frac{2U_y(\log x, t)}{x^3} + \frac{U_{yy}(\log x, t)}{x^3}$$

et donc, comme $u_t = x^2 u_{xx} + 3x u_x$, on trouve bien

$$U_t = U_{yy} - U.$$

Le problème (P_1) devient ainsi

$$(P_2) \quad \begin{cases} U_t = U_{yy} - U & (y, t) \in]0, 1[\times]0, +\infty[\\ U(0, t) = U(1, t) = 0 & t \in [0, +\infty[\\ U(y, 0) = e^y f(e^y) & y \in [0, 1]. \end{cases}$$

(ii) Donc on trouve une solution u de (P_1) en trouvant une solution U de (P_2) et en posant

$$u(x, t) = \frac{U(\log x, t)}{x}.$$

On cherche alors une solution de (P_2) par séparation de variables. C'est à dire qu'on cherche des solutions de

$$(P_3) \quad \begin{cases} U_t = U_{yy} - U & (y, t) \in]0, 1[\times]0, +\infty[\\ U(0, t) = U(1, t) = 0 & t \in [0, +\infty[\end{cases}$$

de la forme $U(y, t) = v(y)w(t)$. Ceci nous conduit à

$$\frac{w'}{w} + 1 = -\lambda = \frac{v''}{v}$$

et donc aux deux problèmes

$$(P_4) \quad \begin{cases} v'' + \lambda v = 0 & y \in]0, 1[\\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

et

$$(P_5) \quad \{w' + (\lambda + 1)w = 0 \quad t \in [0, +\infty[.$$

Les solutions (v, λ) non triviales de (P_4) sont alors

$$\lambda = (n\pi)^2 \text{ avec } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad v_n(y) = \sin(n\pi y).$$

Les solutions correspondantes de (P_5) sont donc

$$w_n(t) = \exp\left(-\left(1 + (n\pi)^2\right)t\right).$$

Formellement la solution générale de (P_3) est donc donnée par

$$U(y, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi y) \exp\left(-\left(1 + (n\pi)^2\right)t\right).$$

Comme on veut aussi que $U(y, 0) = e^y f(e^y)$ on déduit que les b_n sont les coefficients de Fourier en sinus de $e^y f(e^y)$. On a donc

$$U(y, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\pi y) \exp\left(-\left(1 + (n\pi)^2\right)t\right)$$

avec

$$b_n = 2 \int_0^1 e^y f(e^y) \sin(n\pi y) dy.$$

La solution formelle de (P_1) est par conséquent

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{\sin(n\pi \log x)}{x} \exp\left(-\left(1 + (n\pi)^2\right)t\right)$$

avec

$$b_n = 2 \int_0^1 e^y f(e^y) \sin(n\pi y) dy.$$

(iii) On pose

$$u^N(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n \frac{\sin(n\pi \log x)}{x} \exp\left(-\left(1 + (n\pi)^2\right)t\right)$$

et on observe immédiatement que $u^N \in C^\infty([1, e] \times]0, +\infty[)$. Soit donc $T > S > 0$. Pour $(x, t) \in K = [1, e] \times [S, T]$ on obtient donc que

$$u(x, t) - u^N(x, t) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} b_n \frac{\sin(n\pi \log x)}{x} \exp\left(-\left(1 + (n\pi)^2\right)t\right)$$

et donc, comme $x \geq 1$,

$$|u(x, t) - u^N(x, t)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |b_n| \exp\left(-\left(1 + (n\pi)^2\right)S\right).$$

Comme $f \in L^1(1, e)$, on a qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que $|b_n| \leq \gamma$ et par conséquent

$$|u(x, t) - u^N(x, t)| \leq \gamma \sum_{n=N+1}^{+\infty} \exp\left(-\sqrt{1 + (n\pi)^2}S\right) \rightarrow 0 \quad \text{uniformément sur } K.$$

On déduit donc l'assertion, à savoir que $u \in C([1, e] \times]0, +\infty[)$.

(iv) Pour $x \in [1, e]$ on a

$$u(x, t) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{\sin(n\pi \log x)}{x} \exp\left(-\left(1 + (n\pi)^2\right)t\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{\sin(n\pi \log x)}{x}$$

et donc, en se rappelant que $x \geq 1$,

$$|u(x, t) - f(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| \left[1 - \exp\left(-\left(1 + (n\pi)^2\right)t\right)\right].$$

Comme,

$$0 \leq 1 - \exp\left(-\left(1 + (n\pi)^2\right)t\right) \leq \left(1 + (n\pi)^2\right)t \leq 2(n\pi)^2 t,$$

on déduit que

$$|u(x, t) - f(x)| \leq 2\pi^2 t \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 |b_n|.$$

Soit $g(y) = e^y f(e^y)$. On déduit des propriétés de f que $g \in C^4([0, 1])$, avec

$$g(0) = g(1) = g'(0) = g'(1) = g''(0) = g''(1) = g'''(0) = g'''(1) = 0,$$

et donc

$$|b_n| \leq \frac{\gamma}{n^4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

On a donc bien montré que

$$|u(x, t) - f(x)| \leq 2\gamma\pi^2 t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow 0, \text{ uniformément pour } x \in [1, e]. \quad \spadesuit$$

Exercice 19.17 (i) *Etape 1 (séparation des variables)*. On va résoudre tout d'abord le problème

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + cu = 0 & (x, y) \in]0, \pi[\times]0, \pi[\\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 & y \in [0, \pi] \end{cases} \quad (19.38)$$

et en cherchant des solutions de la forme

$$u(x, y) = v(x)w(y).$$

On trouve

$$\begin{cases} v''(x)w(y) + v(x)w''(y) + cv(x)w(y) = 0 \\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases}$$

et par conséquent

$$\begin{cases} \frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda = -\frac{w''(y) + cw(y)}{w(y)} \\ v(0) = v(\pi) = 0. \end{cases}$$

On déduit alors les deux systèmes

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda v(x) = 0 & x \in]0, \pi[\\ v(0) = v(\pi) = 0 \end{cases} \quad (19.39)$$

et

$$w''(y) + (c - \lambda)w(y) = 0. \quad (19.40)$$

On sait que les solutions non triviales de (19.39) sont données par

$$\lambda = n^2 \geq 1 \quad \text{et} \quad v_n(x) = \sin(nx)$$

tandis que les solutions de (19.40) sont données par (noter que comme $c < 1$ et $n^2 \geq 1$ on a que $(n^2 - c) > 0$)

$$w_n(y) = a_n \cosh(y\sqrt{n^2 - c}) + b_n \sinh(y\sqrt{n^2 - c}).$$

Comme l'équation (19.38) est linéaire, on a que sa solution générale est donnée (on rappelle que le raisonnement est purement heuristique) par

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cosh(y\sqrt{n^2 - c}) + b_n \sinh(y\sqrt{n^2 - c}) \right] \sin(nx). \quad (19.41)$$

Etape 2 (conditions aux limites). Pour résoudre (P) il faut encore satisfaire aux deux conditions aux limites

$$u_y(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad u_y(x, \pi) = 0.$$

Pour cela on dérive (19.41) par rapport à y

$$u_y(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^2 - c}) \left[a_n \sinh(y\sqrt{n^2 - c}) + b_n \cosh(y\sqrt{n^2 - c}) \right] \sin(nx).$$

On choisit alors les constantes b_n pour que $u_y(x, 0) = f(x)$, c'est à dire

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (\sqrt{n^2 - c}) \sin(nx)$$

et donc

$$b_n = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{n^2 - c}} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) dx. \quad (19.42)$$

Les coefficients a_n sont obtenus en écrivant (comme on veut $u_y(x, \pi) = 0$)

$$0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n^2 - c} \left[a_n \sinh(\pi\sqrt{n^2 - c}) + b_n \cosh(\pi\sqrt{n^2 - c}) \right] \sin(nx)$$

et ainsi

$$\sqrt{n^2 - c} \left[a_n \sinh(\pi\sqrt{n^2 - c}) + b_n \cosh(\pi\sqrt{n^2 - c}) \right] = 0.$$

On infère donc que

$$a_n = -b_n \frac{\cosh(\pi\sqrt{n^2 - c})}{\sinh(\pi\sqrt{n^2 - c})}.$$

La solution est donc de la forme

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \left[-\frac{\cosh(\pi\sqrt{n^2 - c})}{\sinh(\pi\sqrt{n^2 - c})} \cosh(y\sqrt{n^2 - c}) + \sinh(y\sqrt{n^2 - c}) \right] \sin(nx) \end{aligned}$$

ou encore

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{-b_n \cosh((\pi - y) \sqrt{n^2 - c})}{\sinh(\pi \sqrt{n^2 - c})} \right] \sin(nx). \quad (19.43)$$

(ii) Dans le cas $c = 1$ et que $\lambda = n^2 = 1$, on voit que dans (19.40) la solution est donnée par

$$w_1(y) = a_1 + b_1 y.$$

La solution générale (comparer à (19.41)) est alors

$$\begin{aligned} u(x, y) &= (a_1 + b_1 y) \sin x \\ &+ \sum_{n=2}^{+\infty} \left[a_n \cosh(y \sqrt{n^2 - 1}) + b_n \sinh(y \sqrt{n^2 - 1}) \right] \sin(nx) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} u_y(x, y) &= b_1 \sin x \\ &+ \sum_{n=2}^{+\infty} (\sqrt{n^2 - 1}) \left[a_n \sinh(y \sqrt{n^2 - 1}) + b_n \cosh(y \sqrt{n^2 - 1}) \right] \sin(nx). \end{aligned}$$

Comme on veut que

$$u_y(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad u_y(x, \pi) = 0$$

on déduit de l'équation $u_y(x, 0) = f(x)$, comme précédemment, que

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx & \text{si } n = 1 \\ \frac{2}{\pi \sqrt{n^2 - 1}} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) \, dx & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

En revenant alors à l'équation $u_y(x, \pi) = 0$ on infère que $b_1 = 0$ c'est à dire que pour que le problème soit résoluble il faut avoir

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = 0.$$

Pour $n \geq 2$, on obtient, comme précédemment, que

$$a_n = -b_n \frac{\cosh(\pi \sqrt{n^2 - 1})}{\sinh(\pi \sqrt{n^2 - 1})}$$

alors que, pour $n = 1$, la constante a_1 est quelconque. La solution est alors donnée, comme dans (19.43), par

$$u(x, y) = a_1 \sin x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{-b_n \cosh((\pi - y) \sqrt{n^2 - 1})}{\sinh(\pi \sqrt{n^2 - 1})} \right] \sin(nx).$$

On voit immédiatement que dans ce cas il y a une infinité de solutions dépendant du choix du coefficient $a_1 \in \mathbb{R}$.

(iii) 1) Commençons par prouver qu'il existe n_0 , un entier suffisamment grand, et une constante $\gamma = \gamma(\epsilon, n_0) > 0$ telle que

$$0 < \frac{\cosh((\pi - y)\alpha_n)}{\sinh(\pi\alpha_n)} \leq \gamma e^{-\alpha_n y} \leq \gamma e^{-\alpha_n \epsilon}, \quad \forall y \in [\epsilon, \pi] \text{ et } \forall n \geq n_0.$$

On obtient en effet

$$\frac{\cosh((\pi - y)\alpha_n)}{\sinh(\pi\alpha_n)} = \frac{e^{(\pi-y)\alpha_n} (1 + e^{-2(\pi-y)\alpha_n})}{e^{\pi\alpha_n} (1 - e^{-2\pi\alpha_n})} = \frac{e^{-\alpha_n y} (1 + e^{-2(\pi-y)\alpha_n})}{1 - e^{-2\pi\alpha_n}}$$

et donc (se rappeler que $\pi - y > 0$)

$$\frac{\cosh((\pi - y)\alpha_n)}{\sinh(\pi\alpha_n)} \leq \frac{2}{1 - e^{-2\pi\alpha_n}} e^{-\alpha_n y}.$$

Comme $\alpha_n \rightarrow \infty$ on trouve bien

$$0 < \frac{\cosh((\pi - y)\alpha_n)}{\sinh(\pi\alpha_n)} \leq \gamma e^{-\alpha_n y}$$

et finalement comme $y \geq \epsilon > 0$, on a immédiatement l'inégalité souhaitée.

2) Montrons finalement que, quand $c < 1$, $u \in C([0, \pi] \times]0, \pi])$. Soit

$$u_N(x, y) = \sum_{n=1}^N \left[\frac{-b_n \cosh((\pi - y)\sqrt{n^2 - c})}{\sinh(\pi\sqrt{n^2 - c})} \right] \sin(nx).$$

Clairement u_N est continue et pour conclure que u est continue, il suffit de montrer que, pour tout $\epsilon > 0$,

$$u_N \rightarrow u \quad \text{uniformément dans } [0, \pi] \times [\epsilon, \pi].$$

On a donc

$$u_N(x, y) - u(x, y) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left[\frac{-b_n \cosh((\pi - y)\sqrt{n^2 - c})}{\sinh(\pi\sqrt{n^2 - c})} \right] \sin(nx).$$

On déduit alors (en se rappelant que $y \geq \epsilon$) que, pour N suffisamment grand,

$$|u_N(x, y) - u(x, y)| \leq \gamma \sum_{n=N+1}^{+\infty} |b_n| e^{-\epsilon\sqrt{n^2 - c}}$$

Comme f est continue (il suffit ici de $f \in L^1(\mathbb{R})$) on a de (19.42) qu'il existe une constante γ_1 telle que

$$|b_n| \leq \frac{\gamma_1}{\sqrt{n^2 - c}}.$$

On a ainsi prouvé que

$$|u_N(x, y) - u(x, y)| \leq \gamma \gamma_1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{e^{-\epsilon \sqrt{n^2 - c}}}{\sqrt{n^2 - c}}$$

et, par conséquent, la continuité uniforme. ♠

Exercice 19.18 (i) On dénote par $v(\xi, t)$ la transformée de Fourier en x (t jouant le rôle d'un paramètre) de $u(x, t)$, par abus de notations on écrira $\mathfrak{F}(u)$, i.e.

$$v(\xi, t) = \mathfrak{F}(u)(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-2\pi i \xi x} dx$$

on a de plus que

$$v(\xi, 0) = \mathfrak{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi).$$

Les propriétés des transformées de Fourier nous permettent d'écrire

$$\begin{cases} \mathfrak{F}(u_{xxxx})(\xi, t) = (2\pi i \xi)^4 \mathfrak{F}(u)(\xi, t) = (2\pi \xi)^4 v(\xi, t) \\ \mathfrak{F}(u_t)(\xi, t) = v_t(\xi, t). \end{cases}$$

En revenant au problème donné, on applique la transformée de Fourier (en x) aux deux membres de l'équation et on se ramène au système suivant

$$\begin{cases} v_t(\xi, t) = -[(2\pi \xi)^4 + 1] v(\xi, t) & t > 0 \\ v(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

En considérant ξ comme un paramètre, on trouve que la solution est donnée par

$$v(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) e^{-[(2\pi \xi)^4 + 1]t}.$$

La solution du problème est donc obtenue en appliquant la transformée de Fourier inverse

$$u(x, t) = \mathfrak{F}^{-1}(v(\xi, t))(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-[(2\pi \xi)^4 + 1]t} e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

Noter que l'intégrande est clairement $L^1(\mathbb{R})$ et donc le membre de droite est bien défini.

(ii) Montrons maintenant que

$$u(x, t) \rightarrow f(x) \quad \text{uniformément quand } t \rightarrow 0.$$

Comme $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et $|\widehat{f}| \in L^1(\mathbb{R})$, on a par la formule d'inversion de Fourier que

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}(\widehat{f})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

En combinant les deux formules on déduit que

$$\begin{aligned} |u(x, t) - f(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)| \left| e^{-[(2\pi\xi)^4+1]t} e^{2\pi i \xi x} - e^{2\pi i \xi x} \right| d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)| \left(1 - e^{-[(2\pi\xi)^4+1]t} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Si on note

$$s_t(\xi) = |\widehat{f}(\xi)| \left(1 - e^{-[(2\pi\xi)^4+1]t} \right) \leq |\widehat{f}(\xi)|$$

on a que $s_t \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$. Comme $|\widehat{f}| \in L^1(\mathbb{R})$, on déduit, par le théorème de la convergence dominée, le résultat souhaité. ♠

Exercice 19.19 (i) *Etape 1 (Séparation des variables)*. On commence par résoudre le problème

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - (1+2t)u & x \in]0, 2\pi[, t > 0 \\ u(0, t) = u(2\pi, t) & t > 0 \\ u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) & t > 0. \end{cases} \quad (19.44)$$

On cherche alors des solutions de la forme $u(x, t) = v(x)w(t)$. Les conditions aux limites deviennent

$$v(0) = v(2\pi) = v'(0) = v'(2\pi).$$

L'équation différentielle s'écrit alors

$$u_t = v(x)w'(t) = u_{xx} - (1+2t)u = v''(x)w(t) - (1+2t)v(x)w(t),$$

d'où

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda = \frac{w'(t) + (1+2t)w(t)}{w(t)}.$$

Les problèmes qu'on doit résoudre deviennent alors

$$\begin{cases} v''(x) + \lambda v(x) = 0 & x \in]0, 2\pi[\\ v(0) = v(2\pi) = v'(0) = v'(2\pi) \end{cases} \quad (19.45)$$

et

$$w'(t) + (\lambda + 1 + 2t)w(t) = 0. \quad (19.46)$$

On sait que les solutions non triviales de (19.45) sont données par

$$\lambda = n^2 \quad \text{et} \quad v_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Les solutions de (19.46), pour $\lambda = n^2$, sont alors

$$w_n(t) = e^{-(n^2+1)t-t^2}.$$

La solution générale de (19.44) est donc

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] e^{-(n^2+1)t-t^2}.$$

Comme on veut $u(x, 0) = f(x)$, on choisit

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) dy$$

et si $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \cos(ny) dy \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \sin(ny) dy.$$

(ii) Calculons

$$u(x, t) - f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] [e^{-(n^2+1)t-t^2} - 1].$$

Comme, pour tout $0 \leq t \leq 1$,

$$\left| e^{-(n^2+1)t-t^2} - 1 \right| = 1 - e^{-(n^2+1)t-t^2} \leq 3(n^2+1)t$$

on déduit, pour tout $0 \leq t \leq 1$, que

$$|u(x, t) - f(x)| \leq 3t \sum_{n=0}^{+\infty} [|a_n| + |b_n|] (n^2+1)$$

Par ailleurs, comme $f \in C^4$, on a qu'il existe une constante $\gamma_1 > 0$ telle que

$$|a_n| + |b_n| \leq \frac{\gamma_1}{n^4}, \quad \text{si } n \geq 1.$$

En conclusion ($\gamma_2, \gamma_3 > 0$ étant des constantes), pour tout $0 \leq t \leq 1$,

$$|u(x, t) - f(x)| \leq \gamma_2 t \left[|a_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^4} \right] \leq \gamma_3 t$$

et le résultat suit. ♠

Exercice 19.20 (i) Un changement de variable $x = y \sqrt{4\pi c^2 t}$ donne immédiatement le résultat.

(ii) Appelons, pour $t > 0$,

$$\chi_t(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y| \geq \frac{\delta}{\sqrt{4\pi c^2 t}} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que $\chi_t \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$. En faisant le changement de variable $x = y \sqrt{4\pi c^2 t}$ on trouve que

$$\int_{|x| \geq \delta} L^t(x) dx = \int_{|y| \geq \frac{\delta}{\sqrt{4\pi c^2 t}}} e^{-\pi y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_t(|y|) e^{-\pi y^2} dy.$$

On note que $0 \leq v_t(y) = \chi_t(|y|) e^{-\pi y^2} \leq g(y) = e^{-\pi y^2}$ et que $g \in L^1(\mathbb{R})$. On peut alors appliquer le théorème de la convergence dominée pour déduire que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\int_{|x| \geq \delta} L^t(x) dx \right] = 0.$$

(iii) Comme f est bornée, il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f étant continue, on peut trouver, pour tout $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ tel que

$$|x - \xi| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(\xi)| < \epsilon.$$

On obtient donc, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} & |u(x, t) - f(x)| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} L^t(x - \xi) [f(\xi) - f(x)] d\xi \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} L^t(x - \xi) |f(\xi) - f(x)| d\xi \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} |u(x, t) - f(x)| &\leq 2M \int_{|x - \xi| \geq \delta} L^t(x - \xi) d\xi + \epsilon \int_{|x - \xi| < \delta} L^t(x - \xi) d\xi \\ &\leq 2M \int_{|y| \geq \delta} L^t(y) dy + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} L^t(y) dy. \end{aligned}$$

En passant à la limite en t et en invoquant le fait que ϵ est arbitraire on a le résultat. ♠

Exercice 19.21 (i) On dénote par $v(\xi, t)$ la transformée de Fourier en x (t jouant le rôle d'un paramètre) de $u(x, t)$, on trouve donc

$$v(\xi, t) = \mathfrak{F}(u)(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-2\pi i \xi x} dx \quad \text{et} \quad v(\xi, 0) = \mathfrak{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi).$$

Les propriétés des transformées de Fourier nous permettent d'écrire

$$\begin{cases} \mathfrak{F}(u_{xx})(\xi, t) = (2\pi i \xi)^2 \mathfrak{F}(u)(\xi, t) = -4\pi^2 \xi^2 v(\xi, t) \\ \mathfrak{F}(u_t)(\xi, t) = v_t(\xi, t) \quad \text{et} \quad \mathfrak{F}(u_{tt})(\xi, t) = v_{tt}(\xi, t). \end{cases}$$

En appliquant la transformée de Fourier (en x) aux deux membres de l'équation, on se ramène au système suivant

$$\begin{cases} a^2 v_t - b^2 v_{tt} + 4\pi^2 \xi^2 v(\xi, t) = 0 & t > 0 \\ v(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) & x \in \mathbb{R} \\ v(\xi, t) \rightarrow 0 & t \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Cas 1 : $b \neq 0$. L'équation caractéristique est alors

$$z^2 - \frac{a^2}{b^2} z - \frac{4\pi^2 \xi^2}{b^2} = 0$$

qui a deux racines réelles distinctes, à savoir

$$z_{\pm} = z_{\pm}(\xi) = \frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 + 16b^2\pi^2\xi^2}}{2b^2}.$$

Au vu des conditions en 0 et à l'infini, on déduit que

$$v(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) e^{z_{-}(\xi)t} \quad \text{où} \quad z_{-}(\xi) = \frac{a^2 - \sqrt{a^4 + 16b^2\pi^2\xi^2}}{2b^2}.$$

La solution du problème est donc obtenue en appliquant la transformée de Fourier inverse

$$u(x, t) = \mathfrak{F}^{-1}(v(\xi, t))(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{z_{-}(\xi)t + 2\pi i \xi x} d\xi.$$

Cas 2 : $b = 0$. L'équation est alors

$$\begin{cases} a^2 v_t + 4\pi^2 \xi^2 v(\xi, t) = 0 & t > 0 \\ v(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi) & x \in \mathbb{R} \\ v(\xi, t) \rightarrow 0 & t \rightarrow +\infty \end{cases}$$

et a comme solution (noter qu'elle est la même que précédemment si on laisse $b \rightarrow 0$)

$$v(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) e^{z_{-}(\xi)t} \quad \text{où} \quad z_{-}(\xi) = \frac{-4\pi^2 \xi^2}{a^2}$$

et ainsi

$$u(x, t) = \mathfrak{F}^{-1}(v(\xi, t))(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{z_{-}(\xi)t + 2\pi i \xi x} d\xi.$$

(ii) Montrons maintenant que u est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. Soit donc $(x_\nu, t_\nu) \rightarrow (x, t)$, avec $t_\nu, t \geq 0$. On obtient

$$|u(x_\nu, t_\nu) - u(x, t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{f}(\xi) \right| \left| e^{z_{-}(\xi)t_\nu + 2\pi i \xi x_\nu} - e^{z_{-}(\xi)t + 2\pi i \xi x} \right| d\xi.$$

Posons

$$g(\xi, x_\nu, t_\nu, x, t) = \left| \widehat{f}(\xi) \right| \left| e^{z_{-}(\xi)t_\nu + 2\pi i \xi x_\nu} - e^{z_{-}(\xi)t + 2\pi i \xi x} \right|$$

et observons que $g(\xi, x_\nu, t_\nu, x, t) \rightarrow 0$ quand $(x_\nu, t_\nu) \rightarrow (x, t)$. Comme, par ailleurs $z_{-}(\xi) \leq 0$ et $t_\nu, t \geq 0$, on trouve que

$$0 \leq g(\xi, x_\nu, t_\nu, x, t) \leq \left| \widehat{f}(\xi) \right| \left(e^{z_{-}(\xi)t_\nu} + e^{z_{-}(\xi)t} \right) \leq 2 \left| \widehat{f}(\xi) \right|.$$

Comme $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ on peut appliquer le théorème de la convergence dominée pour déduire que

$$u(x_\nu, t_\nu) \rightarrow u(x, t).$$

(iii) Montrons finalement que

$$u(x, t) \rightarrow f(x) \quad \text{uniformément quand } t \rightarrow 0.$$

Comme $f \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on a par la formule d'inversion de Fourier que

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}(\widehat{f})(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi.$$

En combinant les deux formules on déduit que

$$\begin{aligned} |u(x, t) - f(x)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)| \left| e^{z_-(\xi)t + 2\pi i \xi x} - e^{2\pi i \xi x} \right| d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)| \left(1 - e^{z_-(\xi)t} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Si on note (comme $z_-(\xi) < 0$)

$$s_t(\xi) = |\widehat{f}(\xi)| \left(1 - e^{z_-(\xi)t} \right) \leq |\widehat{f}(\xi)|$$

on a que $s_t \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$. Comme $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on déduit, par le théorème de la convergence dominée, le résultat souhaité. ♠

Cinquième partie

Equations différentielles
ordinaires

Chapitre 20

Introduction

20.1 Le problème

Le problème consiste à trouver une fonction

$$y :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, \quad y = y(t),$$

satisfaisant une équation différentielle, par exemple,

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad t \in]a, b[$$

où

$$f :]a, b[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

On considèrera plus souvent des systèmes du premier ordre où il s'agit de trouver des fonctions

$$x :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

satisfaisant, par exemple, pour tout $t \in]a, b[$

$$x'(t) = g(t, x(t)) \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1(t) = g_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x'_n(t) = g_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

où

$$g :]a, b[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Noter que la seconde formulation est plus générale que la première. En effet si on pose

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \\ \vdots \\ x_{n-1} = y^{(n-2)} \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n(t) = f(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

on a bien réduit l'équation à un système.

20.2 Exemples

(i) Oscillateur harmonique

$$y'' + p^2 y = 0$$

(par exemple, le mouvement d'un pendule linéarisé dans le plan).

(ii) Pendule non linéaire

$$y'' + p^2 \sin y = 0.$$

(iii) Deuxième loi de Newton

$$x'' = \frac{1}{m} F(x(t))$$

où

$$x :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

et $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est le champ de forces. Si ce champ est conservatif alors il existe

$$V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad F = -\text{grad } V$$

et V est l'énergie potentielle.

(iv) Loi de Kepler Même chose que précédemment, mais avec

$$F(x) = -\frac{x}{|x|^3} \quad \text{et} \quad V(x) = \frac{1}{|x|}.$$

(v) Equation de Hill L'équation décrit le mouvement de la lune

$$y''(t) + (a + bq(t))y(t) = 0$$

où $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction périodique.

(vi) Systèmes Hamiltoniens On a

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad H = H(t, p, q),$$

qui est l'Hamiltonien et pour $i = 1, \dots, n$

$$\begin{cases} p'_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}(t, p, q) \\ q'_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}(t, p, q). \end{cases}$$

(vii) Equations de Lorenz Equation simplifiée de la mécanique des fluides

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = bx - y - xz \\ z' = xy - cz \end{cases}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(viii) Equation hypergéométrique

$$t(1-t)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)t]y' - \alpha\beta y = 0.$$

(ix) Equation de Bessel

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - n^2) y = 0.$$

(x) Modèle proie-prédateur

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = (cx - d)y. \end{cases}$$

20.3 Problèmes considérés

On considère en général deux grands types de problèmes (ici nous ne parlons que du premier).

(i) Problème de Cauchy Dans le cas de systèmes on considère le problème (avec $t_0 \in]a, b[$)

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & t \in]a, b[\\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

On étudiera l'existence (locale ou globale), l'unicité, la stabilité (comportement asymptotique)...

(ii) Problème aux limites Par exemple dans le cas des équations du deuxième ordre

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) & t \in]a, b[\\ y(a) = y_0 \text{ et } y(b) = y_1. \end{cases}$$

Chapitre 21

Le Problème de Cauchy

21.1 Le théorème de Picard

Soit

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

On dénote indifféremment par $|\cdot|$ une norme sur \mathbb{R}^n ou sur \mathbb{R}^N .

On commence par rappeler la notion de fonction lipschitzienne.

Définition 21.1 (i) On dit que f est **Lipschitzienne** dans Ω , si $\exists \gamma > 0$ telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq \gamma |x - y|, \quad \forall x, y \in \Omega.$$

(ii) On dit que f est **localement Lipschitzienne** dans Ω si, pour tout compact $K \subset \Omega$, $f|_K$ est Lipschitzienne.

Exemples (i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est localement Lipschitzienne sur \mathbb{R} mais pas Lipschitzienne.

(ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$ est Lipschitzienne sur \mathbb{R} .

(iii) $f(x) = \sqrt{|x|}$ n'est pas localement Lipschitzienne sur \mathbb{R} . ♠

Proposition 21.2 Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$$

(i) Si f est localement Lipschitzienne dans Ω alors $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

(ii) Si f est $C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$, alors f est localement Lipschitzienne sur Ω .

Le théorème général d'existence et d'unicité est le suivant.

Théorème 21.3 (Théorème de Picard) Soient $I =]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Soit la fonction

$$f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f = f(t, x),$$

telle que

- $f \in C(I \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ i.e. f est continue dans les deux variables ;
- $x \rightarrow f(t, x)$ est localement Lipschitzienne, $\forall t \in I$; plus précisément ceci veut dire que $\forall J \subset I$ compact, $\forall K \subset \Omega$ compact, $\exists \gamma = \gamma(J, K) > 0$ tel que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \gamma |x - y|, \quad \forall t \in J, \forall x, y \in K.$$

Alors les deux résultats suivants ont lieu.

Existence. \exists un intervalle compact $I_0 \subset I$ tel que $t_0 \in \text{int } I_0$ et $\exists x : I_0 \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x \in C^1(I_0; \mathbb{R}^n)$ tels que

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \forall t \in I_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (21.1)$$

Unicité. De plus si $\exists J \subset I$ un intervalle fermé tel que $t_0 \in \text{int } J$ et $\exists y \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$ satisfaisant

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in J \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

alors

$$y(t) = x(t), \quad \forall t \in I_0 \cap J.$$

Remarque La partie existence du théorème (mais pas celle d'unicité, cf. l'exemple (ii) ci dessous et Exercice 21.2) reste vraie si on suppose seulement $f \in C(I \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ et c'est alors le Théorème de Cauchy-Peano, mais qui est plus délicat à démontrer. ♠

Exemples (i) Soient $n = 1$, $I = \Omega = \mathbb{R}$, $f(t, x) = x^2$

$$\begin{cases} x'(t) = [x(t)]^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

En intégrant de $[0, t]$, on a

$$\frac{dx}{x^2} = dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x(t)} + 1 = t \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{1-t}.$$

On s'aperçoit que, même si f est localement Lipschitzienne, en général il n'y a pas de solution globale (i.e. $I_0 = I$) ici $I_0 \subset]-\infty, 1[$.

(ii) Soient

$$\begin{cases} x'(t) = \sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

i.e. $f(t, x) = \sqrt{|x|}$ qui n'est pas localement Lipschitzienne sur \mathbb{R} et on a deux solutions

$$x_1(t) \equiv 0 \quad \text{et} \quad x_2(t) = \frac{t^2}{4}. \quad \spadesuit$$

Démonstration (Théorème de Picard). On divise la démonstration en quatre étapes.

Etape 1 (Equation intégrale). Transformation en une équation intégrale.

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (21.2)$$

On remarque que trouver une solution $x \in C^1(I; \Omega)$ de (21.1) est équivalent à trouver une solution $x \in C(I; \Omega)$ de (21.2).

- Noter que (21.1) \Rightarrow (21.2) est évident.

- De plus (21.2) \Rightarrow (21.1) est évident une fois qu'on s'est aperçu que toute solution de (21.2) est nécessairement C^1 .

Etape 2 (Définition de T). On commence par fixer les constantes.

1) On choisit $r > 0$ tel que

$$[t_0 - r, t_0 + r] \subset I \quad \text{et} \quad \overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$$

où

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\} \quad \text{et} \quad \overline{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}.$$

2) On définit $M = M(r, x_0)$ par

$$M = \sup \{|f(t, x)| : t \in [t_0 - r, t_0 + r], x \in \overline{B}_r(x_0)\}.$$

3) On choisit ensuite $\gamma = \gamma(r, t_0, x_0)$ tel que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \gamma |x - y|, \quad \forall t \in [t_0 - r, t_0 + r], \quad \forall x, y \in \overline{B}_r(x_0).$$

4) On pose

$$\delta = \min \left\{ r, \frac{r}{M}, \frac{1}{2\gamma} \right\} \quad \text{et} \quad I_0 = [t_0 - \delta, t_0 + \delta].$$

5) Soit

$$X = \{x \in C(I_0; \mathbb{R}^n) : |x(t) - x_0| \leq r, \quad \forall t \in I_0\} = C(I_0; \overline{B}_r(x_0))$$

muni de la norme

$$\|x\|_X = \sup_{t \in I_0} |x(t)|.$$

Noter que c'est un espace métrique complet.

6) On définit finalement, pour tout $x \in X$,

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

On va montrer que

$$T : X \rightarrow X.$$

Soit donc

$$y = y(t) = Tx(t)$$

on a évidemment que $y \in C(I_0; \mathbb{R}^n)$; de plus, $\forall t \in I_0$,

$$|y(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \right|.$$

Comme

$$(s, x(s)) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \overline{B}_r(x_0) \subset [t_0 - r, t_0 + r] \times \overline{B}_r(x_0)$$

on a que

$$|f(s, x(s))| \leq M$$

et donc

$$|y(t) - x_0| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq r \quad \Rightarrow \quad y \in \overline{B}_r(x_0).$$

Conclusion : $y \in X = C(I_0; \overline{B}_r(x_0))$ et donc

$$T : X \rightarrow X.$$

Etape 3 (Contraction). Montrons que T est contractant de constante $1/2$, c'est à dire que

$$\|Tx - Ty\|_X \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X. \quad (21.3)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\|_X &= \sup_{t \in I_0} \{|Tx(t) - Ty(t)|\} \\ &= \sup_{t \in I_0} \left| \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s))) ds \right| \\ &\leq \gamma \sup_{t \in I_0} \left| \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds \right| \\ &\leq \gamma \sup_{t \in I_0} \left| \int_{t_0}^t \sup_{s \in I_0} |x(s) - y(s)| ds \right| \end{aligned}$$

ce qui implique (on utilise la définition de δ)

$$\|Tx - Ty\|_X \leq \gamma \sup_{t \in I_0} |t - t_0| \|x - y\|_X \leq \gamma\delta \|x - y\|_X \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_X.$$

On a donc bien montré (21.3). Par le théorème du point fixe de Banach $\exists ! \bar{x} \in X$ tel que

$$T\bar{x} = \bar{x}$$

c'est à dire

$$\bar{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \bar{x}(s)) ds, \quad \forall t \in I_0.$$

On a donc que \bar{x} solution de (21.1).

Etape 4 (Unicité). Ceci est une conséquence immédiate du fait que le théorème du point fixe donne une solution unique de (21.2) et donc de (21.1). ■

21.2 Propriétés qualitatives des solutions

Lemme 21.4 (Lemme de Grönwall) Soient $I =]\alpha, \beta[$, $u : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, $t_0 \in]\alpha, \beta[$ et $a, b \geq 0$. Si

$$0 \leq u(t) \leq a + b \left| \int_{t_0}^t u(s) ds \right|, \quad \forall t \in I$$

alors

$$0 \leq u(t) \leq a e^{b|t-t_0|}, \quad \forall t \in I.$$

Remarque cf. Exercice 21.4 pour une généralisation de ce lemme. ♠

Démonstration On divise la démonstration en deux étapes.

Etape 1 : $a > 0$. On définit

$$v(t) = a + b \left| \int_{t_0}^t u(s) ds \right|.$$

Noter que $v \in C^1$ sauf en $t = t_0$ et on a

$$\begin{aligned} (i) \quad v'(t) &= \begin{cases} bu(t) & \text{si } t > t_0 \\ -bu(t) & \text{si } t < t_0 \end{cases} \\ (ii) \quad 0 &\leq u(t) \leq v(t) \\ (iii) \quad 0 &< v(t_0) = a \leq v(t), \quad \forall t. \end{aligned}$$

Cas 1 : $t > t_0$. On a alors

$$0 \leq \frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{bu(t)}{v(t)} \leq b$$

ce qui implique, en intégrant,

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{ds} (\log v(s)) ds \leq b(t - t_0)$$

et donc

$$\log v(t) - \log v(t_0) = \log v(t) - \log a \leq b(t - t_0)$$

soit finalement

$$v(t) \leq a e^{b(t-t_0)}, \quad \forall t > t_0.$$

Comme $u \leq v$ par (ii) on a le résultat.

Cas 2 : $t = t_0$. Ce cas est trivial.

Cas 3 : $t < t_0$. On procède comme dans le cas 1

$$0 \geq \frac{v'(t)}{v(t)} = -\frac{b u(t)}{v(t)} \geq -b \quad \Rightarrow \quad 0 \leq -\frac{v'}{v} \leq b$$

et en intégrant

$$\int_t^{t_0} -\frac{v'(s)}{v(s)} ds \leq b(t_0 - t)$$

soit

$$\log v(t) - \log v(t_0) = \log v(t) - \log a \leq b(t_0 - t) = b|t - t_0|$$

et donc

$$v(t) \leq a e^{b|t-t_0|}.$$

Comme $u \leq v$ par (ii) on a le résultat.

Etape 2 : $a = 0$. On choisit alors une suite $a_n > 0$, $a_n \rightarrow a = 0$ et on applique le résultat. On a en effet

$$0 \leq u(t) \leq a + b \left| \int_{t_0}^t u(s) ds \right| \leq a_n + b \left| \int_{t_0}^t u(s) ds \right|$$

et on trouve par l'Etape 1

$$0 \leq u(t) \leq a_n e^{b|t-t_0|}.$$

D'où le résultat ($u \equiv 0$). ■

Théorème 21.5 Soient $I =]\alpha, \beta[$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et

- $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue
- $x \rightarrow f(t, x)$ est Lipschitzienne de constante b , c'est à dire que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq b|x - y|, \quad \forall t \in I, \forall x, y \in \Omega.$$

Soient $y = y(t)$, $z = z(t)$ deux solutions de

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_1] \subset I$$

alors

$$|y(t) - z(t)| \leq |y(t_0) - z(t_0)| e^{b(t-t_0)}, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Remarque On retrouve en particulier l'unicité des solutions du problème de Cauchy. ♠

Démonstration Soit

$$u(t) = |y(t) - z(t)|.$$

Noter que

$$y(t) - z(t) = y(t_0) - z(t_0) + \int_{t_0}^t [f(s, y(s)) - f(s, z(s))] ds.$$

Ce qui implique

$$0 \leq u(t) \leq |y(t_0) - z(t_0)| + b \left| \int_{t_0}^t u(s) ds \right|.$$

On applique alors le lemme de Grönwall et on a le résultat. ■

21.3 Prolongement maximal

On considère ici, comme d'habitude,

- $I =]\alpha, \beta[$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe
- $f \in C^0(I \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ et

$$x \rightarrow f(t, x) \text{ localement Lipschitzienne } \forall t$$

(au sens défini dans le Théorème de Picard).

Soit le problème, où $t_0 \in J =]a, b[\subset I$ et $x_0 \in \Omega$,

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in J \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (21.4)$$

Définition 21.6 (i) Soit $x :]a, b[\subset I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de (21.4). On dit que $y :]a, c[\rightarrow \mathbb{R}^n$ est un **prolongement à droite** de x si

- $c \in I$ et $c > b$,
- y satisfait (21.4) (en particulier $y \in C^1([a, c[; \Omega))$),
- $y(t) = x(t)$, $\forall t \in]a, b[$.

(ii) Idem pour le **prolongement à gauche**.

(iii) On dit que y est un **prolongement maximal** de x si on ne peut pas la prolonger.

Théorème 21.7 Soient I, Ω, f comme ci-dessus et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Toute solution de (21.4) admet un prolongement maximal. L'intervalle maximal correspondant J est ouvert ($J =]a, b[\subset I$ et $t_0 \in J$) et la solution correspondante est alors $x \in C^1(J; \Omega)$ et satisfait

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in J \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

De plus deux possibilités peuvent se produire :

- (i) $a = \alpha$ et $b = \beta$ (i.e. x est une solution globale) ;
- (ii) $\forall K \subset \Omega$ compact, $\exists t \in]a, b[$ tel que $x(t) \notin K$.

Remarque La deuxième condition est équivalente à dire qu'il existe $\{t_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ une suite telle que $t_\nu \rightarrow a$ ou $t_\nu \rightarrow b$ et

$$\text{dist}(x(t_\nu), \partial\Omega) \rightarrow 0.$$

Elle est en fait un peu plus précise. On peut écrire si $b < \beta$ (idem si $a > \alpha$), alors $\forall K \subset \Omega$ compact et $\forall \epsilon > 0$ suffisamment petit $\exists t \in]a, b[$ tel que $x(t) \notin K$ et $0 < b - t < \epsilon$. ♠

Démonstration On divise la démonstration en deux étapes.

Etape 1. On considère toutes les solutions y de (21.4) définies sur un intervalle ouvert $I_y =]a_y, b_y[$ avec $t_0 \in]a_y, b_y[$ et on appelle X l'ensemble de ces solutions, c'est à dire

$$X = \left\{ y \in C^1(I_y; \Omega) : y \text{ solution de } \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I_y \\ y(t_0) = x_0. \end{cases} \right\}.$$

On note, par le Théorème de Picard, que X est non vide (car la solution trouvée là est, en particulier, définie sur l'ouvert $\text{int } I_0$). On définit alors

$$a = \inf_{y \in X} a_y \quad \text{et} \quad b = \sup_{y \in X} b_y.$$

On a grâce au théorème de Picard que

$$\alpha \leq a < t_0 < b \leq \beta.$$

On va montrer qu'il existe une solution sur $[t_0, b[$ qu'on ne peut pas prolonger à droite (et idem sur $]a, t_0]$). Soient $b_n \nearrow b$ et x_n la solution correspondante (c'est à dire $b_n = b_{x_n}$ et on remarque que par construction $x_{n+1} = x_n$ sur $[t_0, b_n[$). Pour tout $t \in [t_0, b[$ on définit (comme il existe n tel que $t < b_n$)

$$x(t) = x_n(t);$$

par unicité des solutions la fonction x est bien définie et satisfait $x \in X$ c'est à dire

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [t_0, b[\\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Cas 1 : $b = \beta$. Si c'est le cas, il n'y a rien faire car on a défini x sur le plus grand intervalle possible de la forme $[t_0, b[$.

Cas 2 : $b < \beta$. La solution x n'est pas prolongeable à droite de b . Si cela était le cas cela voudrait dire, en particulier, que $x(b) \in \Omega$. Et, par conséquent, on aurait par le Théorème de Picard une solution définie sur $]b - \epsilon, b + \epsilon[$ de

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in]b - \epsilon, b + \epsilon[\\ y(b) = x(b). \end{cases}$$

ce qui contredirait la définition de

$$b = \sup_{y \in X} b_y.$$

On a ainsi montré qu'il existe un prolongement maximal et que l'intervalle correspondant est ouvert à droite (et idem à gauche).

Etape 2. Il reste à montrer que (i) ou (ii) a lieu. On suppose que (i) n'a pas lieu et montrons alors, par contradiction, que (ii) est vraie. Supposons que $b < \beta$ (idem pour $a > \alpha$) et supposons donc, par l'absurde, qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que

$$x(t) \in K, \quad \forall t \in [t_0, b[.$$

On va montrer que ceci contredit la maximalité de $]a, b[$. Comme $b < \beta$ et que K est compact, $\exists M > 0$ tel que

$$|f(t, x)| \leq M, \quad \forall t \in [t_0, b[\quad \text{et} \quad \forall x \in K.$$

On a alors $\forall t_1, t_2 \in [t_0, b[$ que

$$|x(t_2) - x(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} x'(s) ds \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s)) ds \right| \leq M |t_2 - t_1|.$$

Donc x est uniformément continue sur $[t_0, b[$ et donc on peut définir la limite en b qu'on dénote par $x(b) \in K \subset \Omega$. Le même argument que dans le Cas 2 de l'Etape 1 montre qu'on a alors violé la maximalité du prolongement. ■

Corollaire 21.8 Soit $f :]\alpha, \beta[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et localement Lipschitzienne en x . Soient $g, h \in C([\alpha, \beta[; \mathbb{R}_+)$ telles que

$$|f(t, x)| \leq g(t) |x| + h(t), \quad \forall t \in]\alpha, \beta[\quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors $\forall (t_0, x_0) \in]\alpha, \beta[\times \mathbb{R}^n$, il existe une et une seule solution $x \in C^1([\alpha, \beta[; \mathbb{R}^n)$ (i.e. globalement définie) telle que

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & \forall t \in]\alpha, \beta[\\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Voyons deux exemples importants (surtout le premier).

Exemple Le cas linéaire

$$f(t, x) = A(t)x + b(t)$$

où

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1^1(t) & \cdots & a_n^1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n(t) & \cdots & a_n^n(t) \end{pmatrix} = (a_j^i(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$a_j^i \in C([\alpha, \beta])$ et $b \in C([\alpha, \beta]; \mathbb{R}^n)$, alors $f = f(t, x)$ satisfait aux hypothèses du corollaire. Il suffit de prendre

$$g(t) = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{|a_j^i(t)|\}, \quad h(t) = |b(t)|.$$

Il existe donc une solution globale. ♠

Exemple *Le pendule non linéaire*

$$y'' + \sin y = 0$$

on pose

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\sin x_1 \end{cases}$$

et donc

$$f(t, x_1, x_2) = (x_2, -\sin x_1).$$

Il existe donc une solution globale. ♠

Démonstration (Corollaire 21.8). Soit

$$x \in C^1([t_-, t_+]; \mathbb{R}^n)$$

un prolongement maximal unique de $(t_0 \in]t_-, t_+])$

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Supposons que $t_+ < \beta$ (idem si $t_- > \alpha$) et on va montrer que ceci est absurde.

Si $t_+ < \beta$, alors par le théorème on a

$$\limsup_{t \rightarrow t_+} |x(t)| = +\infty. \quad (21.5)$$

Soient

$$p = \max \{g(t) : t \in [t_0, t_+]\} \quad \text{et} \quad q = \max \{h(t) : t \in [t_0, t_+]\}.$$

On a alors $\forall t \in [t_0, t_+]$

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_0| + \int_{t_0}^t |x'(s)| ds = |x_0| + \int_{t_0}^t |f(s, x(s))| ds \\ &\leq |x_0| + \int_{t_0}^t (p|x(s)| + q) ds \leq |x_0| + q(t_+ - t_0) + p \int_{t_0}^t |x(s)| ds. \end{aligned}$$

On déduit alors de l'inégalité de Grönwall que

$$|x(t)| \leq (|x_0| + q(t_+ - t_0)) e^{p(t-t_0)}.$$

Et donc

$$\limsup_{t \rightarrow t_+} |x(t)| < \infty.$$

Ce qui est en contradiction avec (21.5). ■

21.4 Système linéaire à coefficients constants

On va considérer ici des équations différentielles de la forme

$$x'(t) = Ax(t)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On rappelle pour cela quelques faits élémentaires.

Définition 21.9 Soit $|\cdot|$ une norme (en général la norme euclidienne) sur \mathbb{R}^n et soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, on définit alors

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \left\{ \frac{|Ax|}{|x|} \right\} = \max_{|x|=1} \{|Ax|\}.$$

Proposition 21.10 Si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, alors

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \text{et} \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Si de plus $m \in \mathbb{N}$, alors

$$\|A^m\| \leq \|A\|^m.$$

Démonstration cf. Exercice 21.7. ■

Théorème 21.11 Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et on définit pour $p \in \mathbb{N}$

$$S_p = \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!}.$$

Les assertions suivantes ont lieu.

(i) La série S_p converge absolument, quand $p \rightarrow \infty$, vers

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

et en particulier

$$\|e^A\| \leq e^{\|A\|}.$$

(ii) Si $B = PAP^{-1}$, alors

$$e^B = P e^A P^{-1}.$$

(iii) e^A est inversible et

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

(iv) Si $AB = BA$, alors

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Démonstration cf. Exercice 21.8. ■

Remarque Si $AB \neq BA$, alors en général $e^{A+B} \neq e^A e^B$ (cf. Exercice 21.8).
♠

Considérons le problème

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (21.6)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ou $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$).

Théorème 21.12 *Le problème (21.6) admet une et une seule solution donnée par*

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

Démonstration *Etape 1.* Montrons tout d'abord que

$$\frac{d}{dt} [e^{At}] = A e^{At} = e^{At} A.$$

En effet, comme $(At)(Ah) = (Ah)(At)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [e^{At}] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - I}{h} \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} A^n - I \right] \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \left[A + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{h^{n-1} A^n}{n!} \right] = e^{At} \cdot A. \end{aligned}$$

Comme de plus A commute avec n'importe quelle A^k , on déduit que

$$A e^{At} = e^{At} A$$

et donc l'Etape 1 est terminée.

Etape 2. Vérifions maintenant le résultat. On a

$$x(0) = e^0 x_0 = I x_0 = x_0$$

$$x'(t) = \frac{d}{dt} [e^{At} x_0] = A [e^{At} x_0] = A x(t).$$

Ceci termine la démonstration. ■

Remarque Calculer l'exponentielle d'une matrice est en général un processus difficile. Il convient dans ce contexte d'utiliser la *décomposition de Jordan*. On considère le système

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

et on écrit (Λ étant la forme de Jordan de A)

$$A = P\Lambda P^{-1}.$$

Puis on pose

$$y = P^{-1}x \quad \text{et} \quad y_0 = P^{-1}x_0$$

et le système devient alors

$$\begin{cases} y'(t) = \Lambda y(t) \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (21.7)$$

Ce système est, en général, beaucoup plus facile à résoudre et on récupère x en posant

$$x = Py.$$

Voyons comment ceci se traduit dans le cas $n = 2$.

Cas 1 : les deux valeurs propres de Λ sont réelles et distinctes (ou bien elles sont égales, mais la multiplicité géométrique est 2). Alors

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

Les solutions de (21.7) sont alors données par

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} y_0 = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} (y_0)_1 \\ e^{\lambda_2 t} (y_0)_2 \end{pmatrix}.$$

Cas 2 : les deux valeurs propres de Λ sont égales, mais la multiplicité géométrique est 1. Alors

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e^{\Lambda t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Les solutions (21.7) sont alors données par

$$y(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} y_0 = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} (y_0)_1 \\ t(y_0)_1 + (y_0)_2 \end{pmatrix}.$$

Cas 3 : les deux valeurs propres de Λ sont complexes (et donc conjuguées complexes). Alors

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e^{\Lambda t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Les solutions (21.7) sont alors données par

$$y(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} y_0 = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} (y_0)_1 \cos(\beta t) + (y_0)_2 \sin(\beta t) \\ -(y_0)_1 \sin(\beta t) + (y_0)_2 \cos(\beta t) \end{pmatrix}. \quad \spadesuit$$

On déduit comme corollaire (mais il est plus rapide de le démontrer comme dans l'Exercice 21.9).

Théorème 21.13 Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) et $y = y(t)$ satisfaisant

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0.$$

Soient

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

le polynôme caractéristique et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ les racines de p avec leur multiplicité n_1, \dots, n_s . Alors

$$y(t) = t^k e^{\lambda_i t}$$

est solution de l'équation différentielle pour tout $k = 0, 1, \dots, n_i - 1$. De plus toute combinaison linéaire de telles solutions est aussi solution.

21.5 Système linéaire à coefficients variables

On considère le système $A(t) = (a_j^i(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(t) = (b_i(t)) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t), & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (21.8)$$

On va commencer par considérer le cas $b \equiv 0$.

On a vu que si $A(t) = A = \text{constante}$ alors la solution de (21.8) est donnée par

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

Ce ne sera plus vrai en général si A est variable sauf dans le cas $n = 1$.

Exemple $n = 1$. La solution de (21.8) est donnée par (cf. Exercice 21.6 (iii))

$$x(t) = \exp \left\{ \int_0^t A(s) ds \right\} x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad \spadesuit$$

Considérons maintenant le cas général

Proposition 21.14 Soient

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1^1(t) & \dots & a_n^1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n(t) & \dots & a_n^n(t) \end{pmatrix} = (a_j^i(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

où $a_j^i \in C(\mathbb{R})$. L'ensemble des solutions (maximales) de

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (21.9)$$

est un sous-espace vectoriel V de dimension n de $C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$.

Démonstration Le fait que V est un espace vectoriel est immédiat. Montrons qu'il a dimension n . Soient

$$x_1^0, \dots, x_n^0 \in \mathbb{R}^n$$

des vecteurs linéairement indépendants et considérons alors, pour $j = 1, \dots, n$, les solutions de

$$\begin{cases} (x_j)'(t) = A(t) x_j(t) & t \in \mathbb{R} \\ x_j(0) = x_j^0. \end{cases}$$

On va montrer qu'alors (si $x_j = x_j(t)$)

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subset C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$$

forme une base de V dans $C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ comme souhaité.

(i) Montrons l'indépendance linéaire. Supposons que pour $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ on ait

$$y = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n = 0,$$

ce qui veut dire que

$$\beta_1 x_1(t) + \dots + \beta_n x_n(t) = 0.$$

Donc en particulier en $t = 0$

$$\beta_1 x_1^0 + \dots + \beta_n x_n^0 = 0$$

et donc comme $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ sont des vecteurs indépendants, on trouve

$$\beta_1 = \dots = \beta_n = 0.$$

(ii) Montrons maintenant que $\{x_1, \dots, x_n\}$ génère V . Soit y solution de

$$y'(t) = A(t) y(t).$$

A voir qu'on peut trouver $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(t) = \beta_1 x_1(t) + \dots + \beta_n x_n(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Comme $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ forme une base de \mathbb{R}^n on peut sûrement trouver $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$y(0) = \beta_1 x_1^0 + \dots + \beta_n x_n^0.$$

La fonction $z = z(t)$ définie par

$$z(t) = \beta_1 x_1(t) + \dots + \beta_n x_n(t)$$

est solution de (21.9) et $z \in V$. De plus par unicité des solutions (comme $z(0) = y(0)$) on a

$$z \equiv y$$

comme souhaité. ■

Définition 21.15 (i) Soient $\{x_1, \dots, x_n\} \subset C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ un ensemble de n solutions de

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad (21.10)$$

où

$$x_j = x_j(t) = \begin{pmatrix} x_j^1(t) \\ \vdots \\ x_j^n(t) \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n.$$

On dénote par

$$F(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & \cdots & x_n^1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n(t) & \cdots & x_n^n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

et cette matrice est appelée **matrice de solutions**.

(ii) Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ est une base de V , l'espace vectoriel des solutions, on l'appelle système fondamental de solutions de (21.10). De plus F est alors appelée **matrice fondamentale** de (21.10). Si enfin

$$F(0) = I$$

on dit que F est la **matrice fondamentale principale** de (21.10).

(iii) Le **Wronskien** de (21.10) est défini par

$$W(t) = \det[F(t)], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemple Si $A(t) \equiv A$, alors

$$F(t) = e^{At}$$

est une matrice fondamentale principale. ♠

On a alors la proposition suivante.

Proposition 21.16 (i) La matrice $F = F(t)$ satisfait

$$F'(t) = A(t)F(t)$$

(ii) F est une matrice fondamentale de (21.10) si et seulement si $\exists t_0 \in \mathbb{R}$ avec

$$\det F(t_0) \neq 0.$$

En particulier si $\exists t_0$ comme ci-dessus alors

$$\det F(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(iii) Si F_1 et F_2 sont des matrices fondamentales alors $\exists C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible (et constante) telle que

$$F_2(t) = F_1(t)C, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Démonstration (i) Evident.

(ii) (\Leftarrow) Si $\det F(t_0) \neq 0$, alors par la proposition 21.14 (et sa démonstration) on voit que $\{x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)\}$ forme une base de \mathbb{R}^n et ainsi $\{x_1, \dots, x_n\}$ forme une base de $V \Rightarrow F$ est une matrice fondamentale de (21.10).

(\Rightarrow) Si F est une matrice fondamentale de (21.10), alors

$$\det F(t) \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

et donc en particulier en $t = t_0$.

(iii) On commence par fixer t_0 . Puis on choisit $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ou $\mathbb{C}^{n \times n}$) inversible telle que

$$F_2(t_0) = F_1(t_0)C$$

(i.e. $C = [F_1(t_0)]^{-1} [F_2(t_0)]$). Par unicité des solutions on trouve que

$$F_2(t) = F_1(t)C, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En effet

$$\begin{cases} F_2'(t) = A(t)F_2(t) \\ F_2(t_0) = F_2(t_0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} [F_1(t)C]' = F_1'(t)C = A(t)[F_1(t)C] \\ F_1(t_0)C = F_2(t_0). \end{cases}$$

Ceci termine la démonstration. ■

Théorème 21.17 (Théorème de Liouville ou formule d'Abel) Soient

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1^1(t) & \cdots & a_n^1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n(t) & \cdots & a_n^n(t) \end{pmatrix} = (a_j^i(t))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

avec $a_j^i \in C(\mathbb{R})$. Soit $F(t)$ une matrice de solutions de

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

alors

$$W(t) = \det[F(t)] = W(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \text{trace}(A(s)) ds \right\}.$$

Remarques (i) En particulier si on forme la matrice F à partir de

$$\begin{cases} x_i'(t) = A(t)x_i(t) & i = 1, \dots, n \\ x_i(0) = e_i & i = 1, \dots, n \end{cases}$$

on trouve $F(0) = I$ et donc

$$\det F(t) = \exp \left\{ \int_0^t \text{trace}(A(s)) ds \right\}.$$

(ii) Si $n = 1$, le résultat est trivial et correspond (cf. Exercice 21.6 (iii)) à ce qui a été vu au début du paragraphe.

(iii) Quand $A(t) = A$, on déduit le théorème (cf. Exercice 21.8 (iii)) du fait que

$$\det(e^A) = e^{\text{trace } A} \quad \text{et} \quad F(t) = e^{At} F(t_0). \quad \spadesuit$$

Démonstration *Etape 1.* On écrit

$$F(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) = \begin{pmatrix} x_1^1(t) & \cdots & x_n^1(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n(t) & \cdots & x_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$x_j'(t) = A(t)x_j(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (x_j^1)'(t) \\ \vdots \\ (x_j^n)'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j^1 \\ \vdots \\ x_j^n \end{pmatrix}$$

c'est à dire (pour le cas $n = 2$, cf. plus bas)

$$(x_j^i)'(t) = \sum_{k=1}^n a_k^i(t) x_j^k(t).$$

Cas particulier : $n = 2$.

$$\begin{cases} (x_1^1)' = a_1^1 x_1^1 + a_2^1 x_1^2, & (x_2^1)' = a_1^1 x_2^1 + a_2^1 x_2^2, \\ (x_1^2)' = a_1^2 x_1^1 + a_2^2 x_1^2, & (x_2^2)' = a_1^2 x_2^1 + a_2^2 x_2^2. \end{cases}$$

Etape 2 (pour le cas $n = 2$, cf. plus bas). En calculant le déterminant de F on a

$$\frac{d}{dt} [\det F(t)] = \sum_{i=1}^n \det \begin{bmatrix} x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dt}(x_1^i) & \cdots & \frac{d}{dt}(x_n^i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = \sum_{i,k=1}^n \det \begin{bmatrix} x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k^i x_1^k & \cdots & a_k^i x_n^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

On voit donc qu'à moins que $k = i$, on a toujours deux lignes qui sont identiques et donc le déterminant est égale à 0. Par conséquent

$$\frac{d}{dt} [\det F(t)] = \sum_{i=1}^n a_i^i [\det F(t)] = \text{trace } A(t) \cdot \det F(t).$$

En intégrant on a le résultat.

Cas particulier : $n = 2$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\det F(t)] &= \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1^1 x_1^1 + a_2^1 x_1^2 & a_1^1 x_2^1 + a_2^1 x_2^2 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ a_1^2 x_1^1 + a_2^2 x_1^2 & a_1^2 x_2^1 + a_2^2 x_2^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\det F(t)] &= a_1^1 \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} + a_2^1 \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} + a_1^2 \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^1 & x_2^1 \end{vmatrix} + a_2^2 \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} \\ &= [a_1^1 + a_2^2] \det F(t) \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. ■

On discute finalement le cas inhomogène (cf. Exercice 21.6)

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où $a_{ij}, b_i \in C(\mathbb{R})$

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{et} \quad b(t) = (b_1(t), \dots, b_n(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème 21.18 Soit $F = F(t)$ la matrice fondamentale principale de

$$x'(t) = A(t)x(t),$$

alors

$$x(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(s)b(s)ds.$$

En particulier si $A(t) \equiv A$ (et donc $F(t) = e^{At}$) on a

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds.$$

Exemple Si $n = 1$ on a $A(t) = a(t) \in \mathbb{R}$ et donc

$$F(t) = \exp\left\{\int_0^t a(s)ds\right\}$$

ce qui implique

$$x(t) = \exp\left\{\int_0^t a(s)ds\right\} \left[x_0 + \int_0^t b(s) \exp\left\{-\int_0^s a(r)dr\right\} ds \right]. \quad \spadesuit$$

Démonstration La démonstration est faite dans l'Exercice 21.6. ■

21.6 Exercices

Exercice 21.1 Soient $p, q \in C(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Résoudre

$$\begin{cases} x'(t) + p(t)x(t) = q(t), & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (21.11)$$

Indication : Multiplier par $e^{\int_0^t p(s)ds}$ la première équation de (21.11).

Exercice 21.2 Montrer que l'équation

$$\begin{cases} x'(t) = |x(t)|^{2/3}, & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

admet une infinité de solutions. Comparer avec le résultat d'unicité du théorème de Picard.

Indication : Considérer $c > 0$ et

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq c \\ (t-c)^3/27 & \text{si } t > c. \end{cases}$$

Définition 21.19 (Intégrale première) Soient $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe et $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Soit $x \in C^1(I; \Omega)$ une solution de

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in I. \quad (21.12)$$

On dit que $h \in C^1(I \times \Omega)$ est une intégrale première de (21.12) si toute solution $x \in C^1(J; \mathbb{R}^n)$, $J \subset I$ intervalle ouvert, de (21.12) satisfait

$$\frac{d}{dt} [h(t, x(t))] = 0, \quad \forall t \in J.$$

Exercice 21.3 (i) Sous les mêmes hypothèses que la définition précédente, montrer que h est une intégrale première de (21.12) si et seulement si

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial h}{\partial x_i}(t, x) f_i(t, x) \right] = 0, \quad \forall (t, x) \in I \times \Omega.$$

(ii) Soient $H = H(u, v) \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$. On note par

$$H_u(u, v) = \left(\frac{\partial H}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial u_n} \right) \quad \text{et} \quad H_v(u, v) = \left(\frac{\partial H}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial v_n} \right).$$

Soit alors le système Hamiltonien

$$\begin{cases} u'(t) = H_v(u(t), v(t)) \\ v'(t) = -H_u(u(t), v(t)). \end{cases}$$

Montrer que l'Hamiltonien H est une intégrale première du système.

(iii) Soient $\varphi, \psi \in C^0(\mathbb{R})$ avec $\psi(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit l'équation

$$y''(t) = \frac{\varphi(y(t))}{\psi(y'(t))}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Transformer l'équation en un système et en trouver une intégrale première.

Exercice 21.4 Soient $f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues et $a \geq 0$. Montrer que si

$$0 \leq f(t) \leq a + \int_{\alpha}^t f(s)g(s)ds, \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$$

alors

$$f(t) \leq a \exp \left\{ \int_{\alpha}^t g(s)ds \right\}, \quad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Indication : Procéder comme dans la démonstration du lemme de Grönwall (Lemme 21.4).

Exercice 21.5 Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne. Montrer qu'alors toute solution de

$$x'(t) = f(x(t))$$

est soit strictement monotone soit constante.

Exercice 21.6 (Variations des constantes) Soient $A = A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $b = b(t) \in \mathbb{R}^n$ des applications dont toutes les composantes sont continues et soit $x = x(t)$ la solution de

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (21.13)$$

(i) Montrer que si $F = F(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice fondamentale de

$$\begin{cases} F'(t) = A(t)F(t) \\ F(0) = I \end{cases}$$

alors la solution de (21.13) est donnée par

$$x(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_0^t (F(s))^{-1}b(s)ds. \quad (21.14)$$

(ii) Que devient cette formule si $A(t) \equiv A$ (c'est à dire que la matrice est à coefficients constants) ?

(iii) Que devient la formule (21.14) dans le cas $n = 1$?

Exercice 21.7 (Normes de matrices) Soit $|\cdot|$ une norme sur \mathbb{R}^n et soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice. On définit

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \left[\frac{|Ax|}{|x|} \right].$$

Montrer que si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \|A^n\| \leq \|A\|^n.$$

Exercice 21.8 (Exponentielle de matrices) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice. On définit

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Montrer les propriétés suivantes.

- (i) La série est bien définie et $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.
- (ii) Si $B = PAP^{-1}$, alors $e^B = Pe^AP^{-1}$.
- (iii) $\det(e^A) = e^{\text{trace } A}$.
- (iv) Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$. Trouver un contre-exemple si $AB \neq BA$.

Indication : utiliser le fait que

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=m} a_j b_k \right).$$

$$(v) \quad e^{-A} = [e^A]^{-1}.$$

Exercice 21.9 Soit

$$p = p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

où $a_i \in \mathbb{R}$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ les racines de p , pas nécessairement distinctes.

(i) Montrer que

$$a_k = (-1)^{n-k} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-k} \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-k}}$$

pour $k = 0, \dots, n-1$.

(ii) Soit $D : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ l'opérateur de différentiation, c'est à dire que

$$Dx = x', \quad \forall x \in C^\infty(\mathbb{R}).$$

On note alors

$$p(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0$$

pour

$$p(D)x = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x.$$

Montrer que

$$p(D)x = (D - \lambda_1) \cdots (D - \lambda_n)x.$$

(iii) Soit $\mu \in \mathbb{C}$. Montrer, par induction, que

$$(D - \mu)^{k+1} [t^k e^{\mu t}] = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(iv) En déduire que si $\mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{C}$ sont les racines distinctes de p avec leurs multiplicités respectives n_1, \dots, n_s , alors

$$y = y(t) = t^k e^{\mu_i t}$$

est solution de l'équation différentielle

$$p(D)y = 0, \quad \forall k = 0, \dots, n_i - 1.$$

(v) En utilisant ce qui précède, montrer que l'équation

$$x^{(4)} + 4x^{(3)} + 5x'' + 4x' + 4x = 0$$

admet pour solution

$$x = x(t) = (\alpha + \beta t) e^{-2t} + \gamma \cos t + \delta \sin t$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ sont des constantes.

Exercice 21.10 Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ localement Lipschitziennes, avec $0 < g \leq f$. Soient des intervalles $I, J \subset \mathbb{R}$ et $x = x(t)$ et $y = y(t)$ des solutions aux problèmes

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), & t \in I \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y'(t) = g(y(t)), & t \in J \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(i) Soient

$$G(t) = \int_0^t \frac{1}{g(s)} ds \quad \text{et} \quad F(t) = \int_0^t \frac{1}{f(s)} ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Calculer $F \circ x(t)$ et $G \circ y(t)$ et en déduire explicitement les solutions x, y .

(ii) Montrer que si x est une solution globale (définie sur \mathbb{R}), alors y est aussi une solution globale.

Indication : Montrer que $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, en déduire que $G(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et conclure.

Exercice 21.11 Soit $x = x(t)$ une solution de l'équation

$$\begin{cases} x''(t) = -|x(t)|, & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 1, & x'(0) = 0. \end{cases}$$

(i) Montrer que x est l'unique solution du problème.

(ii) Montrer que x est paire et strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Indication : poser $z(t) = x(-t)$.

(iii) Montrez que x a exactement un zéro sur \mathbb{R}_+ .

Indication : Il faut montrer séparément que x possède au plus un zéro, et au moins un zéro. Pour ce dernier, procéder par l'absurde et expliciter la solution (absurde) x sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 21.12 (i) Soient $\lambda > 0$ et $u \in C^1(\mathbb{R})$ avec, pour tout $t \geq 0$,

$$u(t) \geq 0 \quad \text{et} \quad u'(t) \leq \lambda u(t).$$

Montrer que

$$u(t) \leq u(0)e^{\lambda t} \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) On dénote le produit scalaire de deux vecteurs x et y par

$$\langle x; y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

et la norme associée par $|x| = (\langle x; x \rangle)^{1/2}$. Soient $\lambda > 0$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ vérifiant

$$\langle f(x); x \rangle \leq \lambda |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) & \text{si } t > 0 \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Montrer que le problème ci-dessus admet une solution globale (c'est à dire pour tout $t > 0$).

Exercice 21.13 Soient (x_0, y_0) tels que

$$x_0^2 + y_0^2 \leq 1.$$

Soient $x = x(t)$ et $y = y(t)$ satisfaisant

$$\begin{cases} x' = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = -x + y(1 - x^2 - y^2) \\ x(0) = x_0 \quad \text{et} \quad y(0) = y_0. \end{cases} \quad (21.15)$$

(i) Soit $0 \leq c \leq 1$. Vérifier que la fonction

$$u(t) = \frac{ce^t}{\sqrt{1-c^2+c^2e^{2t}}}$$

satisfait

$$\begin{cases} u' = u(1-u^2) & t \in \mathbb{R} \\ u(0) = c. \end{cases}$$

(ii) Montrer que le problème (21.15) a une solution unique et, en passant en coordonnées polaires, trouver cette solution.

(iii) Soit

$$\Gamma = \left\{ a \in \mathbb{R}^2 : |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1 \right\}$$

et soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ la solution de (21.15). Evaluer

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\gamma(t), \Gamma) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\gamma(t), \Gamma)$$

où

$$\text{dist}(\gamma, \Gamma) = \min_{a \in \Gamma} \{|\gamma - a|\}.$$

Exercice 21.14 Soit le problème, $y = y(t)$,

$$\begin{cases} y'' + \sin^2 y = 0, & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = 0. \end{cases} \quad (21.16)$$

(i) Discuter l'existence et l'unicité des solutions de (21.16).

(ii) Montrer que la solution est concave, paire et atteint son maximum en 0.

Exercice 21.15 Soient $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $f = -\text{grad } F$. Soit le problème, $y = y(t)$,

$$\begin{cases} y''(t) = f(y(t)), & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(0) = y_1. \end{cases} \quad (21.17)$$

(i) Discuter l'existence et l'unicité des solutions de (21.17).

(ii) Soient y une solution de (21.17) sur un intervalle $]a, b[$ et

$$H(t) = \frac{1}{2} |y'(t)|^2 + F(y(t))$$

où pour $y \in \mathbb{R}^n$ on dénote la norme Euclidienne par $|\cdot|$ à savoir

$$|y|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Montrer que H est constante sur $]a, b[$.

(iii) Montrer que, s'il existe une constante M telle que

$$F(y) \geq M \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

alors la solution de (21.17) est globale. On pourra procéder par contradiction, tout en utilisant (ii).

21.7 Corrigés

Exercice 21.1 En multipliant l'équation par $e^{\int_0^s p(z)dz}$ on a

$$e^{\int_0^s p(z)dz} (x'(s) + p(s)x(s)) = e^{\int_0^s p(z)dz} q(s)$$

et donc

$$\frac{d}{ds} \left(x(s) e^{\int_0^s p(z)dz} \right) = e^{\int_0^s p(z)dz} q(s)$$

et en intégrant

$$x(t) e^{\int_0^t p(s)ds} - x_0 = \int_0^t \frac{d}{ds} \left(x(s) e^{\int_0^s p(z)dz} \right) ds = \int_0^t e^{\int_0^s p(z)dz} q(s) ds$$

ce qui implique

$$x(t) = x_0 e^{-\int_0^t p(s)ds} + e^{-\int_0^t p(s)ds} \left(\int_0^t e^{\int_0^s p(z)dz} q(s) ds \right). \spadesuit$$

Exercice 21.2 Il suffit de vérifier que toutes les fonctions données dans l'indication sont bien des solutions du problème de Cauchy. Noter que le Théorème de Picard ne peut s'appliquer à ce problème, car la fonction $f(x) = |x|^{2/3}$ n'est pas lipschitzienne autour de 0. En effet, si c'était le cas, on aurait une constante $L > 0$ telle que

$$|x|^{2/3} \leq L|x| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|x|^{1/3}} \leq L$$

pour tout x dans un certain voisinage de 0, ce qui est absurde. \spadesuit

Exercice 21.3 (i) Soit $x(t)$ une solution de (21.12). On a alors

$$\frac{d}{dt} [h(t, x(t))] = \frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i = 0;$$

h est donc bien une intégrale première.

Inversement soient h une intégrale première de (21.12) et $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Soit $x(t)$ une solution de (21.12) avec $x(t_0) = x_0$ (l'existence d'une telle solution est assurée par le Théorème de Cauchy-Peano, cf. Remarque qui suit le Théorème de Picard). On a donc

$$0 = \frac{d}{dt} [h(t, x(t))] = \frac{\partial h}{\partial t} (t, x(t)) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} (t, x(t)) \frac{dx_i}{dt}.$$

En évaluant l'équation précédente en t_0 on obtient

$$\frac{\partial h}{\partial t} (t_0, x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} (t_0, x_0) f_i(t_0, x_0) = 0$$

d'où le résultat.

(ii) On a

$$\frac{d}{dt} [H(u(t), v(t))] = H_u \cdot u' + H_v \cdot v' = \sum_{i=1}^n (H_{u_i} \cdot u'_i + H_{v_i} \cdot v'_i) = 0.$$

(iii) On pose $x_1(t) = y(t)$ et $x_2(t) = y'(t)$. On obtient alors le système

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) \\ \varphi(x_1(t)) = \psi(x_2(t)) x'_2(t) \end{cases}$$

et donc, en multipliant la dernière équation par $x'_1 = x_2$,

$$\varphi(x_1) x'_1 = x_2 \psi(x_2) x'_2. \quad (21.18)$$

Si on pose, pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$\Psi(x_2) = \int_0^{x_2} t \psi(t) dt \quad \text{et} \quad \Phi(x_1) = \int_0^{x_1} \varphi(t) dt$$

l'équation (21.18) devient donc

$$(\Psi(x_2(t)))' = (\Phi(x_1(t)))'.$$

Il suffit alors de choisir

$$h(t, x) = h(t, x_1, x_2) = \Psi(x_2) - \Phi(x_1). \quad \spadesuit$$

Exercice 21.4 Soit

$$u(t) = a + \int_{\alpha}^t f(s) g(s) ds.$$

Noter que

$$u'(t) = f(t) g(t) \quad \text{et} \quad u(\alpha) = a.$$

Par hypothèse $0 \leq f(t) \leq u(t)$. Comme g est positive, on déduit que

$$u'(t) \leq u(t) g(t)$$

et donc

$$u'(t) \exp \left\{ - \int_{\alpha}^t g(s) ds \right\} \leq u(t) \left[g(t) \exp \left\{ - \int_{\alpha}^t g(s) ds \right\} \right].$$

En intégrant cette dernière inégalité on déduit que

$$\frac{d}{dt} \left[u(t) \exp \left\{ - \int_{\alpha}^t g(s) ds \right\} \right] \leq 0$$

et ainsi

$$u(t) \exp \left\{ - \int_{\alpha}^t g(s) ds \right\} - u(\alpha) \leq 0.$$

En conclusion on a bien montré que

$$f(t) \leq u(t) \leq a \exp \left\{ \int_{\alpha}^t g(s) ds \right\}. \quad \spadesuit$$

Exercice 21.5 Soit $x(t)$ une fonction telle que

$$x'(t) = f(x(t))$$

et non-strictement monotone, c'est à dire qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x'(t_0) = 0$. Posons $x_0 = x(t_0)$ et considérons le problème de Cauchy

$$x'(t) = f(x(t)) \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0.$$

On constate que l'application constante $x \equiv x_0$ en est l'unique solution, par le Théorème de Picard, puisque f est Lipschitzienne. Ainsi, toute solution de l'équation différentielle qui n'est pas strictement monotone est constante. \spadesuit

Exercice 21.6 (i) On a bien

$$x(0) = x_0.$$

Vérifions donc l'équation

$$x'(t) = F'(t)x_0 + F'(t) \int_0^t F^{-1}(s)b(s)ds + F(t)F^{-1}(t)b(t).$$

Comme $F'(t)x_0 = A(t)F(t)x_0$ et

$$F'(t) \int_0^t F^{-1}(s)b(s)ds = A(t)F(t) \int_0^t F^{-1}(s)b(s)ds$$

on déduit bien que

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t) \left[F(t)x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(s)b(s)ds \right] + b(t) \\ &= A(t)x(t) + b(t). \end{aligned}$$

La démonstration est ainsi complète.

(ii) Si $A(t) \equiv A$, on a $F(t) = e^{At}$ et donc (cf. Exercice 21.8 (v))

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds.$$

(iii) Si $n = 1$, on a $F(t) = e^{\int_0^t A(s)ds}$. \spadesuit

Exercice 21.7 (i) Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx|$$

on obtient que $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

(ii) Si $Bx \neq 0$, on a

$$\frac{|ABx|}{|x|} = \frac{|ABx|}{|Bx|} \frac{|Bx|}{|x|} \leq \|A\| \|B\|$$

et donc

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

(iii) En choisissant $B = A$ dans (ii), on a $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. Le cas général suit par induction. ♠

Exercice 21.8 (i) Nous allons montrer que la suite

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$$

est de Cauchy, et donc convergente. Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $m < n$, nous avons, par l'Exercice 21.7,

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|.$$

En utilisant le fait que $e^{\|A\|}$ est une série convergente, donc de Cauchy, nous avons directement que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\|S_n - S_m\| < \epsilon \quad \text{pour } n, m \text{ assez grands}$$

et de plus,

$$\|e^A\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}.$$

(ii) Il est facile de voir que

$$B^k = (PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$$

et donc $e^B = Pe^AP^{-1}$.

(iii) On sait par le cours d'algèbre linéaire que $A = PTP^{-1}$ avec T une matrice triangulaire supérieure et $P, T \in \mathbb{C}^{n \times n}$. On sait également que $\text{trace } A = \text{trace } T$ (car la trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres). Utilisant le point (ii), on a

$$\det(e^A) = \det(e^{PTP^{-1}}) = \det(Pe^TP^{-1}) = \det(e^T).$$

Ensuite, on remarque que

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow e^T = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

d'où

$$\det(e^T) = e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\text{trace } T} = e^{\text{trace } A}.$$

(iv) On se rappelle que

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=m} a_j b_k \right).$$

On obtient ainsi que

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{B^m}{m!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=m} \frac{A^j}{j!} \frac{B^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A+B)^m}{m!} = e^{A+B}. \end{aligned}$$

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a directement

$$AB = B \neq 0 = BA,$$

$$e^A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule facilement

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on remarque que pour tout $k \geq 1$,

$$(A+B)^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi que

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= I + \sum_{k \geq 1} \frac{(A+B)^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} & \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

(v) En choisissant $B = -A$ dans (iv), on a $e^{-A} = [e^A]^{-1}$. ♠

Exercice 21.9 (i) Puisque

$$p(t) = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n),$$

on obtient directement le résultat.

(ii) Utilisant le point précédent, on vérifie sans peine que

$$\begin{aligned} & (D - \lambda_1) \cdots (D - \lambda_n) x \\ &= x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^{n-k} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-k} \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_{n-k}} \right) x^{(k)} \end{aligned}$$

et donc

$$(D - \lambda_1) \cdots (D - \lambda_n) x = x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}.$$

(iii) On procède par induction. Si $k = 0$, on a trivialement

$$(D - \mu) e^{\mu t} = (e^{\mu t})' - \mu e^{\mu t} = \mu e^{\mu t} - \mu e^{\mu t} = 0.$$

On suppose le résultat vérifié pour k et on le montre pour $k + 1$.

$$\begin{aligned} (D - \mu)^{k+1} (t^k e^{\mu t}) &= (D - \mu)^k [(D - \mu) (t^k e^{\mu t})] \\ &= (D - \mu)^k [k t^{k-1} e^{\mu t} + t^k \mu e^{\mu t} - t^k \mu e^{\mu t}] \\ &= \underbrace{k(D - \mu)^k (t^{k-1} e^{\mu t})}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

(iv) Le résultat suit immédiatement des points (ii) et (iii).

(v) Les racines du polynôme

$$p(t) = t^4 + 4t^3 + 5t^2 + 4t + 4$$

sont -2 , i et $-i$, respectivement de multiplicité 2, 1 et 1. On a du point (iv) que

$$y_1(t) = e^{-2t}, \quad y_2(t) = t e^{-2t}, \quad y_3(t) = e^{it}, \quad y_4(t) = e^{-it}$$

sont des solutions de l'équation différentielle et donc par linéarité on a

$$y(t) = (a + bt)e^{-2t} + c e^{it} + d e^{-it}; \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

est la solution générale de l'équation. Si on veut une solution réelle on trouve alors

$$y(t) = (\alpha + \beta t) e^{-2t} + \gamma \cos t + \delta \sin t; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}. \quad \spadesuit$$

Exercice 21.10 (i) Puisque f et g sont localement Lipschitziennes, par le Théorème de Picard, x et y sont les uniques solutions des problèmes énoncés. Montrons que $x(t) = F^{-1}(t)$ et $y(t) = G^{-1}(t)$. Il y a deux façons élémentaires de le voir.

- D'une part

$$F \circ x(t) = \int_0^{x(t)} \frac{1}{f(s)} ds = \int_0^t \frac{x'(u)}{f(x(u))} du = \int_0^t du = t$$

d'où $x(t) = F^{-1}(t)$. On montre de même que $y(t) = G^{-1}(t)$.

- D'autre part $F^{-1}(0) = 0$ et

$$(F^{-1})'(t) = \frac{1}{F'(F^{-1}(t))} = f(F^{-1}(t))$$

et de même pour $G^{-1}(t)$.

(ii) Puisque x est définie sur tout \mathbb{R} et que $F(x(t)) = t$, il s'ensuit directement que

$$F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Puisque $G(0) = 0$ et que G est continue (car g est Lipschitzienne), il suffit de voir que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} G(t) = \pm\infty$$

pour avoir $G(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Soit $y > 0$. Par ce qui précède, il existe $t = t(y) > 0$ tel que $F(t) = y$. Puisque $g \leq f$, alors

$$G(t) \geq F(t) = y.$$

Autrement dit, G devient arbitrairement grand, et donc $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = \infty$. On montre la seconde limite de façon similaire. Enfin, par le point (i), on conclut

$$y(\mathbb{R}) = G^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}. \quad \spadesuit$$

Exercice 21.11 (i) Transformant l'équation en un système on a

$$\begin{cases} (x_1, x_2)'(t) = (x_2(t), -|x_1(t)|), \\ (x_1, x_2)(0) = (1, 0). \end{cases}$$

Posant $f(x_1, x_2) = (x_2, -|x_1|)$, on obtient que

$$\begin{aligned} \|f(x_1, x_2) - f(y_1, y_2)\| &= \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (|x_1| - |y_1|)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_2 - y_2)^2 + (x_1 - y_1)^2} = \|(x_1, x_2) - (y_1, y_2)\|. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que f est Lipschitzienne et donc par le Théorème de Picard la solution x est unique.

(ii) Posant $z(t) = x(-t)$, on a que

$$z''(t) = x''(-t) = -|x(-t)| = -|z(t)|$$

et

$$z(0) = 1, \quad z'(0) = 0.$$

Par unicité on a que $z = x$ est donc x est pair. Ensuite, rappelant que $x(0) = 1$,

$$x'(t) = \int_0^t x''(s) ds = - \int_0^t |x(s)| ds \leq 0,$$

avec égalité si et seulement si $t = 0$, d'où la décroissance stricte de u sur \mathbb{R}_+ .

(iii) La décroissance stricte de x sur \mathbb{R}_+ implique que x a au plus un zéro sur \mathbb{R}_+ . Supposons par l'absurde que $x > 0$ sur $[0, \infty[$. Alors

$$\begin{cases} x''(t) = -x(t), & t > 0 \\ x(0) = 1, & x'(0) = 0. \end{cases}$$

Par unicité, $x(t) = \cos t$ sur $[0, \infty[$ ce qui est absurde. ♠

Exercice 21.12 (i) Il suffit d'observer que

$$\frac{d}{dt} [e^{-\lambda t} u(t)] = e^{-\lambda t} u'(t) - \lambda e^{-\lambda t} u(t) = e^{-\lambda t} [u'(t) - \lambda u(t)] \leq 0$$

et d'intégrer pour avoir le résultat (noter que cette démonstration n'utilise pas le fait que $u(t) \geq 0$).

(ii) Tout d'abord le Théorème de Picard nous assure qu'il existe une et une seule solution pour autant que t soit petit. Par ailleurs en multipliant scalairement l'équation par $x(t)$ et en utilisant l'hypothèse on a que

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} |x(t)|^2 \right] = \langle x'(t); x(t) \rangle = \langle f(x(t)); x(t) \rangle \leq \lambda |x(t)|^2.$$

En utilisant la première question on trouve donc que

$$\frac{1}{2} |x(t)|^2 \leq \frac{1}{2} |x_0|^2 e^{\lambda t}.$$

On voit donc de cette inégalité que, comme f est définie sur tout \mathbb{R}^n , la solution existe pour tout $t > 0$. ♠

Exercice 21.13 (i) Il suffit de faire le calcul. Noter, par ailleurs que si $c > 1$, alors la fonction u n'est pas définie sur \mathbb{R} mais seulement sur $]T, +\infty[$ où T est tel que

$$1 - c^2 + c^2 e^{2T} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T = \log \sqrt{c^2 - 1} - \log c.$$

(ii) Le problème (21.15) a une solution unique (par le Théorème de Picard) car le membre de droite est C^∞ et donc localement Lipschitzien. En écrivant $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ (i.e. $r^2 = x^2 + y^2$ et $\operatorname{tg} \theta = y/x$) on trouve

$$\begin{aligned} rr' &= xx' + yy' = x[y + x(1 - x^2 - y^2)] + y[-x + y(1 - x^2 - y^2)] \\ &= r^2(1 - r^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \theta} \theta' &= (\operatorname{tg} \theta)' = \left(\frac{y}{x} \right)' = \frac{xy' - yx'}{y^2} \\ &= \frac{x[-x + y(1 - x^2 - y^2)] - y[y + x(1 - x^2 - y^2)]}{y^2} \\ &= \frac{-[x^2 + y^2]}{y^2} = \frac{-r^2}{r^2 \cos^2 \theta} = \frac{-1}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

et donc, en posant $x_0 = r_0 \cos \theta_0$ et $y_0 = r_0 \sin \theta_0$ (par hypothèse $r_0 \leq 1$),

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2) \\ \theta' = -1 \\ r(0) = r_0 \quad \text{et} \quad \theta(0) = \theta_0. \end{cases}$$

Les solutions sont donc de la forme

$$r(t) = \frac{r_0 e^t}{\sqrt{1 - r_0^2 + r_0^2 e^{2t}}} \quad \text{et} \quad \theta(t) = \theta_0 - t.$$

En coordonnées cartésiennes on a

$$x(t) = \frac{r_0 e^t}{\sqrt{1 - r_0^2 + r_0^2 e^{2t}}} \cos(\theta_0 - t) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{r_0 e^t}{\sqrt{1 - r_0^2 + r_0^2 e^{2t}}} \sin(\theta_0 - t).$$

Un calcul immédiat montre bien que la solution ci-dessus vérifie (21.15).

(iii) On obtient immédiatement que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\gamma(t), \Gamma) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x_0^2 + y_0^2 \leq 1 \\ 1 & \text{si } x_0^2 + y_0^2 = 0 \end{cases}$$

et

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\gamma(t), \Gamma) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x_0^2 + y_0^2 < 1. \end{cases} \spadesuit$$

Exercice 21.14 (i) Le problème peut être réécrit sous forme de système en posant $x = (x_1, x_2)$

$$x_1 = y, \quad x_2 = y' \quad \text{et} \quad f(x) = (x_2, -\sin^2 x_1).$$

On a ainsi

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)), & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = (1, 0). \end{cases}$$

On note que f est localement (et même globalement) Lipschitzienne et satisfait

$$|f(x)| = \sqrt{x_2^2 + \sin^2 x_1} \leq \sqrt{1 + x_2^2} \leq |x| + 1;$$

par conséquent (grâce au Théorème de Picard et au Corollaire 21.8) la solution existe, est unique et est globale.

(ii) Comme $y'' = -\sin^2 y \leq 0$, on a que y est concave et sa dérivée y' est donc décroissante. Comme par ailleurs y' est strictement décroissante au voisinage de 0 (car $y''(0) = -\sin^2 y(0) < 0$) et $y'(0) = 0$, on déduit que le maximum de la fonction est bien atteint en 0.

Montrons maintenant que la fonction est paire. Soit

$$z(t) = y(-t).$$

Observer que z est aussi solution de (21.16). Par unicité des solutions on déduit donc que $z \equiv y$ et donc y est paire. ♠

Exercice 21.15 (i) Le problème peut être réécrit sous forme de système en posant

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ x_1 &= y, \quad x_2 = y' \quad \text{et} \quad g(x) = (x_2, f(x_1)). \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{cases} x'(t) = g(x(t)) \\ x(0) = (y_0, y_1). \end{cases}$$

On note que $g \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et est donc localement Lipschitzienne ; par conséquent (grâce au théorème de Picard) la solution existe et est unique dans un intervalle maximal un intervalle $]a, b[$.

(ii) En dérivant H et en utilisant (21.17), on trouve immédiatement que

$$\frac{d}{dt}H(t) = \langle y'(t); y''(t) \rangle + \langle \text{grad } F(y(t)); y'(t) \rangle = 0.$$

(iii) On sait qu'il existe une solution $y \in C^2([a, b]; \mathbb{R}^n)$ définie sur un intervalle ouvert maximal $]a, b[$. Montrons que $a = -\infty$ et $b = +\infty$. On va montrer seulement que $b = +\infty$ (le fait que $a = -\infty$ est établi de manière totalement analogue). Supposons par l'absurde que $b < +\infty$. Alors on sait, par le Théorème 21.7, qu'il existe une suite $t_n \rightarrow b$ telle que

$$|x(t_n)|^2 = |y(t_n)|^2 + |y'(t_n)|^2 \rightarrow +\infty. \quad (21.19)$$

Comme $F(y) \geq M$, on a que

$$\frac{1}{2}|y'(t)|^2 + M \leq \frac{1}{2}|y'(t)|^2 + F(y(t))$$

et comme par (ii) on sait que

$$\frac{1}{2}|y'(t)|^2 + F(y(t)) = \frac{1}{2}|y'(0)|^2 + F(y(0)) = \frac{1}{2}|y_1|^2 + F(y_0),$$

on déduit que

$$\frac{1}{2}|y'(t)|^2 \leq \frac{1}{2}|y_1|^2 + F(y_0) - M$$

et donc il existe une constante γ telle que

$$|y'(t)| \leq \gamma \quad \forall t \in [0, b[.$$

On infère, par conséquent, que

$$|y(t) - y_0| = \left| \int_0^t y'(t) \right| \leq \gamma t \quad \forall t \in [0, b[.$$

On a donc obtenu que

$$\limsup_{t_n \rightarrow b} |x(t_n)|^2 = \limsup_{t_n \rightarrow b} \left[|y(t_n)|^2 + |y'(t_n)|^2 \right] \leq (|y_0| + \gamma b)^2 + \gamma^2$$

ce qui contredit (21.19) et le fait que $b < +\infty$. ♠

Chapitre 22

Séries formelles et fonctions spéciales

22.1 Introduction

Soit l'équation

$$u^{(n)}(z) + p_{n-1}(z)u^{(n-1)}(z) + \cdots + p_1(z)u'(z) + p_0(z)u(z) = 0$$

et chaque p_j , $j = 0, \dots, n-1$, est le quotient de fonctions analytiques.

Exemples (i) Equation *hypergéométrique* :

$$\begin{aligned} z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u &= 0 \\ \Leftrightarrow u'' + \frac{[\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]}{z(1-z)}u' - \frac{\alpha\beta}{z(1-z)}u &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Equation de *Bessel* :

$$z^2 u'' + z u' + (z^2 - n^2)u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u'' + \frac{1}{z}u' + \frac{(z^2 - n^2)}{z^2}u = 0.$$

(iii) Equation *hypergéométrique confluente* :

$$z u'' + (c - z)u' - a u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u'' + \frac{(c - z)}{z}u' - \frac{a}{z}u = 0.$$

(iv) Equation d'*Airy* :

$$u'' + z u = 0.$$

(v) Equation de *Legendre* :

$$(1 - z^2)u'' - 2zu' + n(n+1)u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u'' - \frac{2z}{(1 - z^2)}u' + \frac{n(n+1)}{(1 - z^2)}u = 0.$$

(vi) Equation *homogène d'Euler* :

$$z^2 u'' + \alpha z u' + \beta u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u'' + \frac{\alpha}{z} u' + \frac{\beta}{z^2} u = 0.$$

(vii) Equation de *Laguerre* :

$$z u'' + (1 - z) u' + \alpha u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u'' + \frac{(1 - z)}{z} u' + \frac{\alpha}{z} u = 0.$$

(viii) Equation de *Hermite* :

$$u'' - 2z u' + \alpha u = 0. \quad \spadesuit$$

Ces équations (en général du 2ème ordre) sont très utiles en physique mathématique et apparaissent souvent comme des solutions d'équations aux dérivées partielles ayant certaines symétries.

Les solutions de ces équations différentielles sont souvent appelées fonctions spéciales, par opposition aux fonctions élémentaires (e^z , $\sin z$, $\arcsin z$, \dots).

L'étude de ces fonctions spéciales a une très vieille histoire qui commence au 18^{ème} siècle avec les travaux d'Euler, Gauss, Abel, Riemann, Jacobi, Fuchs, Hermite, Legendre, Kummer, H.A. Schwarz, Klein, Jordan, Hilbert, Poincaré, Malgrange, Deligne (médaillé fields) ... + 21^{ème} problème de Hilbert.

On va essentiellement se concentrer sur les équations du deuxième ordre.

22.2 Séries formelles

On va commencer par un calcul explicatif

$$u''(z) + p(z) u'(z) + q(z) u(z) = 0.$$

Supposons que p et q soient analytiques au voisinage de $z = 0$ i.e.

$$p(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k z^k$$

$$q(z) = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k z^k.$$

On cherche alors une solution sous la forme

$$u(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k$$

et donc

$$u'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k u_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) u_{k+1} z^k$$

$$u''(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) u_k z^{k-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1) u_{k+2} z^k.$$

On remet dans l'équation

$$u''(z) + p(z)u'(z) + q(z)u(z) = 0$$

et on égale les coefficients à zéros.

Exemples (i) Pour $q \in \mathbb{R}$ fixé, considérons

$$u'' + qu = 0$$

et on trouve alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} [(k+2)(k+1)u_{k+2} + qu_k] z^k = 0.$$

On va choisir u_k défini par récurrence avec u_0 et u_1 arbitraires. On trouve

$$u_{k+2} = -\frac{q}{(k+2)(k+1)} u_k = +\frac{q^2}{(k+2)(k+1)(k)(k-1)} u_{k-2} \dots$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{q}{2.1} u_0, & u_4 &= -\frac{q}{4.3} u_2 = \frac{q^2}{4!} u_0 \\ u_6 &= -\frac{q}{6.5} u_4 = \frac{-q^3}{6!} u_0 & \Rightarrow & u_{2k} = \frac{(-1)^k q^k}{(2k)!} u_0 \end{aligned}$$

et de même pour les coefficients impaires

$$u_3 = -\frac{q}{3.2} u_1 \quad \Rightarrow \quad u_{2k+1} = (-1)^k \frac{q^k}{(2k+1)!} u_1$$

et ainsi

$$u(z) = u_0 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{q^k}{(2k)!} z^{2k} + u_1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{q^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

Si $q = \lambda^2 > 0$, on obtient donc

$$u(z) = u_0 \cos(\lambda z) + \frac{u_1}{\lambda} \sin(\lambda z).$$

(ii) Equation *hypergéométrique* :

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0.$$

Si $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$, la solution au voisinage de 0 est donnée (cf. Section 13.6) par la fonction hypergéométrique définie par

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)} \frac{z^k}{k!}$$

(avec la convention que quand $k=0$ le coefficient est 1). On écrit aussi

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

où pour $n \in \mathbb{N}$ on a défini $(\alpha)_0 = 1$ et

$$(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1).$$

De plus la série converge pour $|z| < 1$ car, par le critère de d'Alembert,

$$\frac{\left| \frac{(\alpha)_{k+1}(\beta)_{k+1}}{(\gamma)_{k+1}} \right| \frac{|z|^{k+1}}{(k+1)!}}{\left| \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k} \right| \frac{|z|^k}{k!}} = \frac{|\alpha+k||\beta+k|}{|\gamma+k|(k+1)} |z| \rightarrow |z|, \quad \text{si } k \rightarrow \infty.$$

Si $\alpha = \beta = \gamma = 1$, on trouve alors

$$F(1, 1, 1, z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$$

qui est la série *géométrique* (d'où le nom).

(iii) Equation de *Bessel* :

$$z^2 u'' + z u' + (z^2 - n^2) u = 0.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, la solution est donnée (cf. Section 13.7, où ceci a été vérifié pour $n=0$) par la fonction de Bessel

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)! 2^{2k}} z^{2k}$$

qui converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

(iv) Série *divergente partout* :

$$z^2 u'' + (3z-1) u' + u = 0.$$

On trouve que

$$u(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k! z^k$$

est solution formelle de l'équation. En effet

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)k!z^k + 3 \sum_{k=1}^{+\infty} k k! z^k - \sum_{k=1}^{+\infty} k k! z^{k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} k! z^k \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} [k(k-1)k! + 3k k! - (k+1)(k+1)! + k!] z^k + [3z - (1+4z) + 1 + z] \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} k! [k(k-1) + 3k - (k+1)^2 + 1] z^k = 0. \end{aligned}$$

D'où $u(z)$ est bien solution formelle, mais par contre la série diverge $\forall z \neq 0$. ♠

Théorème 22.1 Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et

$$Lu(z) = u^{(n)}(z) + p_{n-1}(z)u^{(n-1)}(z) + \cdots + p_1(z)u'(z) + p_0(z)u(z).$$

tels que les coefficients p_i soient analytiques au voisinage de z_0 et que le rayon de convergence de chacune des séries soit au moins $r_0 > 0$. Soit le problème

$$Lu(z) = 0, \quad \text{avec } u(z_0) = a_0, \dots, u^{(n-1)}(z_0) = a_{n-1}$$

alors il existe une (et une seule) solution u qui est analytique et dont le rayon de convergence est au moins r_0 c'est à dire

$$u(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k (z - z_0)^k, \quad \forall |z - z_0| < r_0.$$

De plus pour $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$u_k = \frac{a_k}{k!}$$

et pour $k \geq n$ les u_k dépendent uniquement de a_0, \dots, a_{n-1} et sont obtenus par dérivation formelle de la série.

Ce procédé justifie celui effectué sur l'équation à coefficient constant ou sur l'hypergéométrique mais en $z_0 \neq 0, 1$ ou sur Bessel en $z_0 \neq 0$ ou pour la série divergente partout mais en $z_0 \neq 0$. Plus loin on verra que ce théorème peut être démontré dans le cas de certaines singularités (il est facile de voir que même en $z_0 = 0$, F ou J_0 convergent).

Avant de démontrer le théorème on commence par le rappel suivant.

Rappel sur les séries (i) Si

$$C(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k \quad \text{et} \quad \Gamma(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k z^k$$

avec $|c_k| \leq \gamma_k$, $\forall k$ (en particulier γ_k est un réel positif) et si $\sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k z^k$ converge pour $|z| < r$ alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k \quad \text{converge pour } |z| < r.$$

(ii) Si $C(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ converge pour $|z| < r$ alors toutes les dérivées de C convergent pour $|z| < r$ et les dérivées peuvent être calculées par dérivation formelle.

(iii) Si $C(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ pour $|z| < r_0$ et si $r < r_0$, alors il existe $M = M(r)$ tel que

$$|c_k| r^k \leq M, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(trivialement car la série converge). ♠

On montre maintenant le théorème.

Démonstration On va montrer le théorème dans le cas $n = 2$ et $z_0 = 0$ (idem dans le cas général). Donc on a

$$\begin{cases} u''(z) + p_1(z)u'(z) + p_0(z)u(z) = 0 \\ p_1(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k z^k \quad \text{et} \quad p_0(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k z^k, \quad |z| < r_0 \\ u(0) = a_0 \quad \text{et} \quad u'(0) = a_1. \end{cases} \quad (22.1)$$

Etape 1 (calcul formel). Supposons qu'il existe une solution de (22.1) qui converge pour $|z| < r_0$

$$u(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k \quad \text{pour } |z| < r_0$$

alors nécessairement

$$u(0) = u_0 = a_0 \quad \text{et} \quad u'(0) = u_1 = a_1.$$

De plus

$$u'(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) u_{k+1} z^k \quad \text{et} \quad u''(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1) u_{k+2} z^k$$

et ainsi

$$\begin{aligned} p_0(z)u(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k z^k \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^k \beta_{k-j} u_j \right) z^k \\ p_1(z)u'(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k z^k \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) u_{k+1} z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^k \alpha_{k-j} (j+1) u_{j+1} \right) z^k. \end{aligned}$$

En remettant dans l'équation, on trouve

$$Lu(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[(k+2)(k+1)u_{k+2} + \sum_{j=0}^k ((j+1)u_{j+1}\alpha_{k-j} + u_j\beta_{k-j}) \right] z^k = 0$$

et ainsi, pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$(k+2)(k+1)u_{k+2} = - \sum_{j=0}^k [(j+1)u_{j+1}\alpha_{k-j} + u_j\beta_{k-j}]. \quad (22.2)$$

Etape 2 (convergence). Montrons que si u_k ($k \geq 2$) est défini par (22.2) alors la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k, \quad \text{converge pour } |z| < r_0. \quad (22.3)$$

Soit $r < r_0$ alors il existe M tel que

$$|\alpha_j| r^j, \quad |\beta_j| r^j \leq M$$

En utilisant ceci dans (22.2) on a

$$\begin{aligned} (k+2)(k+1)|u_{k+2}| &\leq M \sum_{j=0}^k [(j+1)|u_{j+1}| + |u_j|] r^{j-k} \\ &\leq \frac{M}{r^k} \sum_{j=0}^k [(j+1)|u_{j+1}| + |u_j|] r^j \\ &\leq \frac{M}{r^k} \sum_{j=0}^k [(j+1)|u_{j+1}| + |u_j|] r^j + M|u_{k+1}| r. \end{aligned}$$

On définit alors

$$\gamma_0 = |u_0|, \quad \gamma_1 = |u_1|$$

et γ_k par récurrence de la façon suivante

$$(k+2)(k+1)\gamma_{k+2} = \frac{M}{r^k} \sum_{j=0}^k [(j+1)\gamma_{j+1} + \gamma_j] r^j + M\gamma_{k+1} r. \quad (22.4)$$

Il est immédiat de voir, par induction, que $\gamma_k \geq |u_k|$. Il reste donc à montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k z^k, \quad \text{converge pour } |z| < r \quad (22.5)$$

pour avoir (22.3). Revenons à (22.4), on a

$$\begin{cases} k(k+1)\gamma_{k+1} = \frac{M}{r^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} [(j+1)\gamma_{j+1} + \gamma_j] r^j + M\gamma_k r \\ k(k-1)\gamma_k = \frac{M}{r^{k-2}} \sum_{j=0}^{k-2} [(j+1)\gamma_{j+1} + \gamma_j] r^j + M\gamma_{k-1} r \end{cases}$$

En multipliant la première équation par r , puis en utilisant la deuxième équation, on a

$$\begin{aligned} k(k+1)\gamma_{k+1}r &= \frac{M}{r^{k-2}} \left[\sum_{j=0}^{k-2} [(j+1)\gamma_{j+1} + \gamma_j] r^j \right] \\ &\quad + \frac{M}{r^{k-2}} (k\gamma_k + \gamma_{k-1}) r^{k-1} + M\gamma_k r^2 \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} k(k+1)\gamma_{k+1}r &= k(k-1)\gamma_k - M\gamma_{k-1}r + M(k\gamma_k + \gamma_{k-1})r + M\gamma_k r^2 \\ &= k(k-1)\gamma_k + Mr[-\gamma_{k-1} + k\gamma_k + \gamma_{k-1} + \gamma_k r] \\ &= \gamma_k [k(k-1) + Mkr + Mr^2]. \end{aligned}$$

On a donc

$$\left| \frac{\gamma_{k+1} z^{k+1}}{\gamma_k z^k} \right| = \frac{k(k-1) + Mkr + Mr^2}{rk(k+1)} |z| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{|z|}{r}.$$

Donc la série converge pour autant que $|z| < r$; comme $r < r_0$ est arbitraire on a le résultat. ■

22.3 Classification des singularités

Soit l'équation

$$Lu(z) = u^{(n)}(z) + \sum_{j=0}^{n-1} p_j(z) u^{(j)}(z) = u^{(n)} + p_{n-1} u^{(n-1)} \cdots + p_1 u' + p_0 u = 0. \quad (22.6)$$

Définition 22.2 (i) On dit que $z_0 \in \mathbb{C}$ est un **point régulier** de (22.6) si les p_j , $j = 0, \dots, n-1$, sont analytiques au voisinage de z_0 . Sinon on dit qu'il est **singulier**.

(ii) Si on peut écrire l'équation sous la forme

$$(z - z_0)^n u^{(n)}(z) + (z - z_0)^{n-1} q_{n-1}(z) u^{(n-1)}(z) + \cdots + q_0(z) u(z) = 0$$

c'est à dire

$$(z - z_0)^n u^{(n)}(z) + \sum_{j=0}^{n-1} (z - z_0)^j q_j(z) u^{(j)}(z) = 0 \quad (22.7)$$

avec q_j analytiques au voisinage de z_0 , on dit alors que z_0 est un **point singulier régulier** (ou une **singularité de première espèce**).

(iii) Si z_0 est un point singulier mais pas du type précédent, on dit que c'est un **point singulier irrégulier** (ou une **singularité de deuxième espèce**).

Remarque Une autre façon de voir les singularités régulières c'est de dire que

$$(z - z_0)^{n-j} p_j(z)$$

sont analytiques au voisinage de z_0 , pour tout $j = 0, \dots, n-1$.

Les *singularités à l'infini* sont aussi importantes. On va ici considérer seulement le cas des équations du deuxième ordre, mais on procède de la même façon dans le cas général. La définition suivante est obtenue en faisant les changements suivants (cf Exercice 22.1)

$$t = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad v(t) = u\left(\frac{1}{t}\right).$$

Définition 22.3 Soit

$$Lu(z) = u''(z) + a(z)u'(z) + b(z)u(z) = 0.$$

On dit que $z_0 = \infty$ est un **point régulier** respectivement une **singularité régulière, irrégulière**, si le point $t_0 = 0$ est un point régulier, respectivement une singularité régulière, irrégulière, de

$$L_\infty v(t) = v''(t) + p(t)v'(t) + q(t)v(t) = 0$$

où

$$p(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} a\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{et} \quad q(t) = \frac{1}{t^4} b\left(\frac{1}{t}\right).$$

Remarque Ceci veut dire que

- si p et q sont analytiques, alors $z_0 = \infty$ est un point régulier ;
- si

$$tp = 2 - a\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad t^2 q = b\left(\frac{1}{t}\right) \frac{1}{t^2}$$

sont analytiques, alors $z_0 = \infty$ est un point singulier régulier et sinon il est irrégulier. ♠

Exemples (i) Equation à coefficients analytiques

$$Lu(z) = u''(z) + a(z)u'(z) + b(z)u(z) = 0.$$

- 1) Si a et b sont analytiques au voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$, alors z_0 est régulier.
- 2) Comme

$$p(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} a\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{et} \quad q(t) = \frac{1}{t^4} b\left(\frac{1}{t}\right)$$

on trouve que

$$L_\infty v(t) = v''(t) + \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} a\left(\frac{1}{t}\right) \right] v'(t) + \frac{1}{t^4} b\left(\frac{1}{t}\right) v(t) = 0$$

et donc

$$t^2 v'' + t \left(2 - \frac{1}{t} a \left(\frac{1}{t} \right) \right) v' + \frac{1}{t^2} b \left(\frac{1}{t} \right) v = 0.$$

Discutons, par exemple, le cas où a et b sont constants.

Cas 1 : $a = b = 0$. On trouve

$$t^2 v'' + 2t v' = 0$$

et donc $z_0 = \infty$ est une singularité régulière.

Cas 2 : $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. On déduit que $z_0 = \infty$ est une singularité irrégulière.

(ii) *Equation homogène de Euler* (où $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$)

$$Lu(z) = z^2 u'' + \alpha z u' + \beta u = 0.$$

1) Alors $z_0 = 0$ est une singularité régulière.

2) On a

$$a(z) = \frac{\alpha}{z} \quad \text{et} \quad b(z) = \frac{\beta}{z^2}$$

et ainsi

$$p(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} a \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \cdot \alpha t = \frac{2 - \alpha}{t}$$

$$q(t) = \frac{1}{t^4} b \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{1}{t^4} \cdot \beta t^2 = \frac{\beta}{t^2}.$$

On trouve que

$$L_{\infty} v(t) = v''(t) + \frac{2 - \alpha}{t} v'(t) + \frac{\beta}{t^2} v(t) = 0$$

et donc

$$t^2 v'' + t(2 - \alpha) v' + \beta v = 0.$$

On déduit donc que $z_0 = \infty$ est une singularité régulière (pour autant que $\alpha \neq 2$ ou $\beta \neq 0$).

(iii) *Equation hypergéométrique*

$$Lu(z) = z(1 - z)u'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)u' - \alpha\beta u = 0.$$

1) On trouve que $z_0 = 0$ et $z_0 = 1$ sont des singularités régulières. En effet si on considère, par exemple, $z_0 = 0$ (idem pour $z_0 = 1$) on a

$$z^2 u'' + z \frac{(\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)}{(1 - z)} u' + \frac{(-\alpha\beta z)}{1 - z} u = 0.$$

2) On a

$$a(z) = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z}{z(1 - z)} \quad \text{et} \quad b(z) = \frac{-\alpha\beta}{z(1 - z)}$$

et donc

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} a\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1) \frac{1}{t}}{\frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t}\right)} \\ &= \frac{2}{t} - \frac{\gamma t - (\alpha + \beta + 1)}{t(t-1)} \\ q(t) &= \frac{1}{t^4} b\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^4} \frac{-\alpha \beta}{\frac{1}{t} \left(1 - \frac{1}{t}\right)} = \frac{-\alpha \beta}{t^2(t-1)} \end{aligned}$$

On trouve que

$$L_{\infty} v(t) = v''(t) + \left[\frac{2}{t} - \frac{\gamma t - (\alpha + \beta + 1)}{t(t-1)} \right] v'(t) + \frac{-\alpha \beta}{t^2(t-1)} v(t) = 0$$

et donc

$$t^2 v'' + t \left[2 - \frac{\gamma t - (\alpha + \beta + 1)}{(t-1)} \right] v' + \frac{-\alpha \beta}{(t-1)} v = 0.$$

On déduit donc que $z_0 = \infty$ est une singularité régulière.

(iv) *Equation de Bessel*

$$Lu(z) = z^2 u'' + z u' + (z^2 - n^2) u = 0.$$

1) On a tout de suite que $z_0 = 0$ est une singularité régulière.

2) On a

$$a(z) = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad b(z) = 1 - \frac{n^2}{z^2}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} a\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \cdot t = \frac{1}{t} \\ q(t) &= \frac{1}{t^4} b\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^4} (1 - n^2 t^2). \end{aligned}$$

On déduit que

$$L_{\infty} v(t) = v''(t) + \frac{1}{t} v'(t) + \frac{1}{t^4} (1 - n^2 t^2) v(t) = 0$$

et donc

$$t^2 v'' + t v' + \frac{1}{t^2} (1 - n^2 t^2) v = 0.$$

On trouve ainsi que $z_0 = \infty$ est une singularité irrégulière.

(v) *Série divergente partout*

$$Lu(z) = z^2 u'' + (3z - 1) u' + u = z^2 u'' + z \left[3 - \frac{1}{z} \right] u' + u = 0$$

et donc $z_0 = 0$ est une singularité irrégulière.

(vi) *Equation hypergéométrique confluyente* (Exercice 22.2)

$$Lu(z) = z u'' + (\gamma - z) u' - \alpha u = z^2 u'' + z(\gamma - z) u' - \alpha z u = 0.$$

1) On obtient que $z_0 = 0$ est une singularité régulière.

2) On a

$$a(z) = \frac{\gamma}{z} - 1 \quad \text{et} \quad b(z) = -\frac{\alpha}{z}$$

et par conséquent

$$p(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} a\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} (\gamma t - 1) = \frac{1}{t^2} ((2 - \gamma)t + 1)$$

$$q(t) = \frac{1}{t^4} b\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^4} \cdot \alpha t = \frac{-\alpha}{t^3}.$$

On déduit que

$$L_\infty v(t) = v''(t) + \left[\frac{1}{t^2} ((2 - \gamma)t + 1) \right] v'(t) + \frac{-\alpha}{t^3} v(t) = 0$$

et donc

$$t^2 v'' + t \left[\frac{1}{t} ((2 - \gamma)t + 1) \right] v' + \frac{-\alpha}{t} v = 0.$$

On trouve ainsi que $z_0 = \infty$ est une singularité irrégulière.

(vii) *Equation d'Airy* (Exercice 22.2)

$$Lu(z) = u'' + z u = 0.$$

1) L'équation n'a pas de singularités finies.

2) On a

$$a(z) = 0 \quad \text{et} \quad b(z) = z$$

et par conséquent

$$p(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} a\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t}$$

$$q(t) = \frac{1}{t^4} b\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^4} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t^5}.$$

On déduit que

$$L_\infty v(t) = v''(t) + \frac{2}{t} v'(t) + \frac{1}{t^5} v(t) = 0$$

et donc

$$t^2 v'' + 2t v' + \frac{1}{t^3} v = 0.$$

On trouve ainsi que $z_0 = \infty$ est une singularité irrégulière.

(viii) *Equation de Legendre* (Exercice 22.2)

$$Lu(z) = (1 - z^2) u'' - 2z u' + n(n+1) u = 0.$$

1) On a que $z_0 = \pm 1$ sont des singularités régulières. En effet montrons, par exemple, que $z_0 = 1$ est une singularité régulière. On a le résultat car on peut écrire l'équation

$$(z-1)^2 u'' + (z-1) \left(\frac{2z}{1+z} \right) u' + \frac{n(n+1)(1-z)}{1+z} u = 0.$$

2) On a

$$a(z) = -\frac{2z}{1-z^2} \quad \text{et} \quad b(z) = \frac{n(n+1)}{1-z^2}$$

et donc

$$p(t) = \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} a\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} \frac{\frac{2}{t}}{1 - \frac{1}{t^2}} = \frac{2}{t} \left[1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right]$$

$$q(t) = \frac{1}{t^4} b\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^4} \frac{n(n+1)t^2}{t^2 - 1} = \frac{1}{t^2} \frac{n(n+1)}{t^2 - 1}.$$

On déduit que

$$L_\infty v(t) = v''(t) + \frac{2}{t} \left[1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right] v'(t) + \frac{1}{t^2} \frac{n(n+1)}{t^2 - 1} v(t) = 0$$

et donc

$$t^2 v'' + 2t \left[1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right] v' + \frac{n(n+1)}{t^2 - 1} v = 0.$$

On trouve ainsi que $z_0 = \infty$ est une singularité régulière. ♠

22.4 Les équations du premier ordre

Soit

$$u'(z) + p(z)u(z) = 0. \quad (22.8)$$

On va considérer uniquement (sans perte de généralité) les singularités en $z_0 = 0$. On va supposer que 0 est un point singulier isolé et on écrit p en série de Laurent

$$p(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \quad \forall 0 < |z| < \rho.$$

On rappelle la terminologie des séries de Laurent :

(i) si $a_k = 0 \quad \forall k < 0$ alors p est analytique et donc $z_0 = 0$ est un point régulier pour la série de Laurent ;

(ii) si $a_{-k} = 0 \quad \forall k \geq m+1$ et $a_{-m} \neq 0$ alors p a un pôle d'ordre m en $z_0 = 0$;

(iii) si une infinité de $a_{-k} \neq 0$ alors p a une singularité essentielle en $z_0 = 0$.

Comparons les singularités de p à la terminologie introduite dans la Section 22.3.

(i) $z_0 = 0$ est un point régulier pour la série de Laurent (c'est à dire que p est analytique) si et seulement si c'est un point régulier de (22.8);

(ii) $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1 pour la série de Laurent (c'est à dire que $zp(z)$ est analytique) si et seulement si c'est une singularité régulière de (22.8);

(iii) $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre $m \geq 2$ ou une singularité essentielle isolée pour la série de Laurent si et seulement si c'est une singularité irrégulière de (22.8).

On va procéder à un calcul formel (dans le sens où on aura une expression de la forme z^α , qui est holomorphe seulement si α est un entier; elle est toutefois holomorphe au voisinage de $z = 0$, mais privé du demi axe $\operatorname{Re} z \leq 0$). La solution générale de (22.8) est donnée par

$$\begin{aligned} u(z) &= c \exp \left\{ - \int p(z) dz \right\} \\ &= c \exp \left\{ - \int \left[\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k + a_{-1} z^{-1} + \sum_{k=2}^{+\infty} a_{-k} z^{-k} \right] dz \right\} \\ &= c \exp \left\{ -a_{-1} \log z - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{z^{k+1}}{k+1} - \sum_{k=2}^{+\infty} a_{-k} \frac{z^{-k+1}}{-k+1} \right\} \end{aligned}$$

et donc

$$u(z) = c z^\alpha g(z) h(z)$$

où $\alpha = -a_{-1}$,

$$g(z) = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{k-1}}{k} z^k \right\} \quad \text{et} \quad h(z) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{-k-1}}{k} z^{-k} \right\}.$$

Dans tous les cas la fonction g est holomorphe au voisinage de 0.

Cas 1. Si 0 est un point régulier, la solution est donnée par

$$u(z) = c \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} \frac{z^k}{k} \right\}$$

et elle est analytique.

Cas 2. Si 0 est une singularité régulière i.e. $a_{-1} \neq 0$ mais $a_{-k} = 0 \forall k \geq 2$, alors

$$u(z) = c z^\alpha \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} \frac{z^k}{k} \right\}$$

est la solution (c'est à dire une puissance fois une fonction analytique).

Cas 3. Si 0 est une singularité irrégulière, alors

$$u(z) = c z^\alpha g(z) h(z)$$

où

$$g(z) = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{k-1}}{k} z^k \right\} \quad \text{et} \quad h(z) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{-k-1}}{k} z^{-k} \right\}$$

et alors h a une singularité essentielle en 0.

Exemple. Si on considère

$$u' + \frac{1}{z^2} u = 0$$

on trouve alors

$$u(z) = \exp \{1/z\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{-k}}{k!} . \quad \spadesuit$$

22.5 La méthode de Frobenius pour les singularités régulières

Soient

$$Lu(z) = z^2 u''(z) + z a(z) u'(z) + b(z) u(z) = 0$$

où a et b sont des fonctions analytiques au voisinage de 0.

Exemple On va expliquer la méthode de Frobenius dans le cas de l'équation d'Euler homogène (puis on donnera un théorème général), c'est à dire

$$a(z) \equiv a \quad \text{et} \quad b(z) \equiv b.$$

1) On regarde le *polynôme indiciel*

$$q(\nu) = \nu(\nu - 1) + a\nu + b = 0.$$

Soient ν_1 et ν_2 les deux racines telles que $\operatorname{Re} \nu_1 \geq \operatorname{Re} \nu_2$.

2) On doit alors considérer deux cas.

Cas 1 : $\nu_1 \neq \nu_2$. On cherche alors des solutions de la forme

$$u_1(z) = z^{\nu_1} \quad \text{et} \quad u_2(z) = z^{\nu_2}.$$

Observer que les deux fonctions ne sont, en général, pas holomorphes au voisinage de 0. Elles le sont si ν_1 et ν_2 sont des entiers. Le calcul suivant est donc formel si ν_1 et ν_2 ne sont pas des entiers (toutefois il est exact au voisinage de $z = 0$, mais privé du demi axe $\operatorname{Re} z \leq 0$). En remplaçant dans l'équation, on trouve, si $\nu = \nu_1$ ou ν_2 ,

$$L(z^\nu) = z^2 (z^\nu)'' + a z (z^\nu)' + b z^\nu = (\nu(\nu - 1) + a\nu + b) z^\nu = q(\nu) z^\nu \equiv 0.$$

Cas 2 : $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Ceci implique que

$$q(\nu) = q'(\nu) = 0.$$

On cherche alors des solutions de la forme (les deux solutions ci-dessous ne sont, en général, pas holomorphes au voisinage de 0; mais seulement au voisinage de $z = 0$, privé du demi axe $\operatorname{Re} z \leq 0$)

$$u_1(z) = z^\nu \quad \text{et} \quad u_2(z) = z^\nu + z^\nu \log z.$$

On a en effet

$$L(z^\nu) = q(\nu) z^\nu \equiv 0$$

et

$$\begin{aligned} L(z^\nu \log z) &= z^2 (\nu z^{\nu-1} \log z + z^{\nu-1})' + a z (\nu z^{\nu-1} \log z + z^{\nu-1}) + b z^\nu \log z \\ &= z^2 (\nu(\nu-1) z^{\nu-2} \log z + (2\nu-1) z^{\nu-2}) \\ &\quad + a z (\nu z^{\nu-1} \log z + z^{\nu-1}) + b z^\nu \log z \end{aligned}$$

ce qui nous conduit à

$$\begin{aligned} L(z^\nu \log z) &= z^\nu \log z (\nu(\nu-1) + a\nu + b) + z^\nu (2\nu-1+a) \\ &= q(\nu) z^\nu \log z + q'(\nu) z^\nu \equiv 0. \quad \spadesuit \end{aligned}$$

On va maintenant généraliser ceci au cas suivant.

Théorème 22.4 *Soient*

$$Lu(z) = z^2 u''(z) + z a(z) u'(z) + b(z) u(z) = 0 \quad (22.9)$$

où a et b sont analytiques au voisinage de 0 avec rayon de convergence au moins r_0 . Soit le polynôme indiciel défini par

$$q(\nu) = \nu(\nu-1) + a(0)\nu + b(0) \quad (22.10)$$

et soient ν_1 et ν_2 (avec $\operatorname{Re} \nu_1 \geq \operatorname{Re} \nu_2$) les racines de ce polynôme. Soit enfin

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_0\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \text{ et } \operatorname{Re} z \leq 0\}.$$

Première solution. La fonction

$$v(z) = z^{\nu_1} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k z^k \right)$$

est solution formelle de (22.9), mais la fonction ainsi obtenue est holomorphe dans Ω . De plus la série converge pour $|z| < r_0$. Les coefficients v_k sont obtenus par calcul formel.

Deuxième solution. L'équation (22.9) a une autre solution w qui prend la forme suivante.

Cas 1. Si $\nu_1 - \nu_2 \notin \mathbb{N}$, alors

$$w(z) = z^{\nu_2} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} w_k z^k \right)$$

est holomorphe dans Ω et la série converge $\forall |z| < r_0$. Les coefficients w_k sont obtenus par calcul formel.

Cas 2. Si $\nu_1 - \nu_2 \in \mathbb{N}$, alors

$$w(z) = z^{\nu_2} \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} w_k z^k \right) + c(\nu_1, \nu_2) v(z) \log z$$

qui est bien définie dans Ω et la série converge $\forall |z| < r_0$. Les coefficients w_k et la constante c sont obtenus par calcul formel.

Remarques (i) Il est bon d'insister que si $\nu \notin \mathbb{N}$ alors la solution n'est pas holomorphe au voisinage de 0 (par contre elle l'est si $\nu \in \mathbb{N}$). Elle est seulement holomorphe modulo la multiplication par z^ν .

(ii) Le théorème énoncé dans le cadre complexe a un pendant réel, mais il faut être prudent dans son interprétation. On ne va discuter ici qu'un cas particulier de l'équation d'Euler. Soit l'équation

$$x^2 u'' - 4x u' = 0.$$

Noter que cette équation a deux solutions de nature différente. Les solutions sont $|x|^5$ et x^5 pour $x \in \mathbb{R}$ qui sont toutes les deux des solutions C^2 (la deuxième est analytique, mais pas la première). ♠

Exemples (i) Equation homogène d'Euler :

$$z^2 u'' + z a u' + b u = 0$$

et alors les solutions sont données par

$$\begin{aligned} v(z) &= z^{\nu_1} & w(z) &= z^{\nu_2} & \text{si } \nu_1 \neq \nu_2 \\ v(z) &= z^{\nu_1} & w(z) &= z^{\nu_1} + z^{\nu_1} \log z & \text{si } \nu_1 = \nu_2. \end{aligned}$$

Le résultat est vrai même si $a = b = 0$, car ($\nu_1 = 1$ et $\nu_2 = 0$) $v = z$ et $w = 1$ sont bien solutions de l'équation.

(ii) Equation hypergéométrique :

$$z(1-z)u'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)u' - \alpha\beta u = 0$$

ou encore

$$z^2 u'' + z \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z}{1-z} u' + \frac{-\alpha\beta z}{1-z} u = 0.$$

Son polynôme indiciel est

$$q(\nu) = \nu(\nu - 1) + \gamma\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu = 0 \text{ et } \nu = 1 - \gamma.$$

On a donc une des solutions analytique dans $|z| < 1$ qui est donnée par

$$v(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z).$$

L'autre solution est, si $1 - \gamma \notin \mathbb{N}$ et $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$, donnée par

$$w(z) = z^{1-\gamma} F(1 + \alpha - \gamma, 1 + \beta - \gamma, 2 - \gamma, z) = z^{1-\gamma} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

(iii) *Equation de Bessel :*

$$z^2 u'' + z u' + (z^2 - n^2) u = 0$$

et son polynôme indicial est donné par

$$q(\nu) = \nu(\nu - 1) + \nu - n^2 = \nu^2 - n^2 \quad \Rightarrow \quad \nu = \pm n.$$

Donc, si $n = 0$, le calcul formel

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2^k k!)^2}$$

fait dans la Section 22.2 est vrai pour $\forall z \in \mathbb{C}$. La deuxième solution est obtenue grâce au théorème (si $n = 0$)

$$K_0(z) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right) \left(\frac{z}{2} \right)^{2k} + \log z \cdot J_0(z). \quad \spadesuit$$

Démonstration (Théorème 22.4). On ne va démontrer que le cas 1, le cas 2 étant très semblable. On suppose donc que $\nu_1 - \nu_2 \notin \mathbb{N}$.

Etape 1 (Calcul formel). On cherche des solutions de la forme

$$u(z) = z^\nu \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n \right).$$

Ecrivons

$$a(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad b(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n.$$

On trouve donc

$$\begin{aligned} u'(z) &= \nu z^{\nu-1} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n \right) + z^\nu \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n z^{n-1} \\ u''(z) &= \nu(\nu-1) z^{\nu-2} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n \right) + 2\nu z^{\nu-1} \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n z^{n-1} \\ &\quad + z^\nu \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) u_n z^{n-2}. \end{aligned}$$

Ceci nous donne par conséquent

$$\begin{aligned}
0 &= Lu(z) = z^2 u''(z) + z a(z) u'(z) + b(z) u(z) \\
&= \nu(\nu-1) z^\nu \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n\right) + 2\nu z^\nu \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n z^n + z^\nu \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) u_n z^n \\
&+ \left[\nu z^\nu \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n\right) + z^\nu \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n z^n \right] \left[a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n \right] \\
&+ z^\nu \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n\right) \left[b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n \right].
\end{aligned}$$

En simplifiant par z^ν , on trouve

$$\begin{aligned}
0 &= [\nu(\nu-1) + \nu a_0 + b_0] \\
&+ \sum_{n=1}^{+\infty} [\nu(\nu-1) + 2\nu n + n(n-1) + (\nu+n)a_0 + b_0] u_n z^n \\
&+ \left[\nu \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n z^n \right] \left[\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n \right] \\
&+ \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n\right) \left[\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n \right].
\end{aligned}$$

Il y a quatre termes que nous transformons séparément (rappelons que $\nu = \nu_1$ ou ν_2).

1) Le premier terme (le terme constant) est nul car

$$q(\nu) = \nu(\nu-1) + \nu a_0 + b_0 = 0.$$

2) On peut réécrire le deuxième terme comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q(\nu+n) u_n z^n$$

car

$$\begin{aligned}
q(\nu+n) &= (\nu+n)(\nu+n-1) + (\nu+n)a_0 + b_0 \\
&= \nu(\nu-1) + 2\nu n + n(n-1) + (\nu+n)a_0 + b_0.
\end{aligned}$$

3) Le troisième terme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \nu a_n z^n + \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (\nu+n) u_n z^n \right] \left[\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n \right]$$

peut être transformé comme suit. On observe que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n z^n \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} [\alpha_{n-k} \beta_k] z^n$$

et donc le troisième terme s'écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \nu a_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} [(\nu + k) a_{n-k} u_k] z^n$$

qu'on peut réécrire (se rappeler que $u_0 = 1$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} [(\nu + k) a_{n-k} u_k] z^n.$$

4) Enfin le quatrième s'écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n + \left[\sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n \right] \left[\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n \right]$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} b_{n-k} u_k z^n.$$

qu'on peut réécrire (se rappeler que $u_0 = 1$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k} u_k z^n.$$

En résumant et en égalant tous les coefficients des termes en z^n à 0, on trouve

$$q(\nu + n) u_n = - \sum_{k=0}^{n-1} [(\nu + k) a_{n-k} + b_{n-k}] u_k. \quad (22.11)$$

Donc si $q(\nu + n) \neq 0$ (d'où la raison, comme $q(\nu) = 0$, qu'on étudie séparément les cas où $\nu_1 - \nu_2 = n$), on peut résoudre (22.11).

Etape 2 (Convergence). Rappelons que $\nu_1 - \nu_2 \notin \mathbb{N}$ et

$$q(\nu) = \nu(\nu - 1) + \nu a_0 + b_0 = (\nu - \nu_1)(\nu - \nu_2) \quad (22.12)$$

et que les coefficients de u sont donnés par $u_0 = 1$ et par (22.11). On a supposé que si $\nu = \nu_1$ ou ν_2 , alors $q(\nu + n) \neq 0, \forall n$. Il s'agit donc de montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k \quad \text{converge pour tout } |z| < r_0.$$

Soit $\rho < r_0$. Comme les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent pour $|z| < r_0$, on a qu'il existe $M > 0$ tel que

$$|a_j| \rho^j, \quad |b_j| \rho^j < M, \quad \forall j. \quad (22.13)$$

Par ailleurs, comme (22.12) a lieu, on a

$$|q(\nu_1 + n)| = |n(n + \nu_1 - \nu_2)| \geq n|n - |\nu_1 - \nu_2||$$

et

$$|q(\nu_2 + n)| \geq n|n - |\nu_1 - \nu_2||.$$

En retournant à (22.11) on a (ceci est valable pour $\nu = \nu_1$ ou ν_2)

$$n|n - |\nu_1 - \nu_2|| |u_n| \leq |u_n| |q(\nu + n)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} [(|\nu| + k) |a_{n-k}| + |b_{n-k}|] |u_k|.$$

En utilisant (22.13), on a

$$n|n - |\nu_1 - \nu_2|| |u_n| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} (|\nu| + k + 1) \rho^{k-n} |u_k|.$$

On définit alors $\gamma_0 = 1$ et $\gamma_n \geq 0$ par

$$n|n - |\nu_1 - \nu_2|| \gamma_n = M \sum_{k=0}^{n-1} (|\nu| + k + 1) \rho^{k-n} \gamma_k. \quad (22.14)$$

Il est facile de voir, par induction, que $|u_n| \leq \gamma_n$. Par conséquent pour conclure la démonstration il suffit de montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k z^k \quad \text{converge} \quad |z| < r_0$$

(on aura alors immédiatement que $\sum u_k z^k$ converge). Pour cela on écrit (22.14) pour $(n+1)$

$$\begin{aligned} (n+1)|n+1 - |\nu_1 - \nu_2|| \gamma_{n+1} &= M \sum_{k=0}^n (|\nu| + k + 1) \rho^{k-n-1} \gamma_k \\ &= \gamma_n [M(|\nu| + n + 1) + n|n - |\nu_1 - \nu_2||] \rho^{-1}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\left| \frac{\gamma_{n+1} z^{n+1}}{\gamma_n z^n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{\rho}$$

et donc on a convergence si $|z| < \rho$. Comme $\rho < r_0$ est arbitraire, on a bien la convergence pour tout $|z| < r_0$. ■

22.6 Exercices

Exercice 22.1 Soit l'équation

$$Lu(z) = u''(z) + a(z)u' + b(z)u = 0.$$

Montrer que si

$$t = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad v(t) = u\left(\frac{1}{t}\right)$$

alors l'équation devient

$$L_{\infty}v(t) = v''(t) + \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}a\left(\frac{1}{t}\right)\right]v'(t) + \left[\frac{1}{t^4}b\left(\frac{1}{t}\right)\right]v(t) = 0.$$

Exercice 22.2 Classer les singularités (y compris à l'infini) des équations suivantes.

(i) L'équation hypergéométrique confluyente

$$zu'' + (c - z)u' - au = 0.$$

(ii) L'équation de Airy

$$u'' + zu = 0.$$

(iii) L'équation de Legendre

$$(1 - z^2)u'' - 2zu' + \alpha(\alpha + 1)u = 0.$$

(iv) L'équation de Laguerre

$$zu'' + (1 - z)u' + \alpha u = 0.$$

(v) L'équation de Hermite

$$u'' - 2zu' + \alpha u = 0.$$

Exercice 22.3 Trouver la solution en série entière de

$$\begin{cases} u'' + zu = 0 \\ u(0) = c_0 \quad \text{et} \quad u'(0) = c_1. \end{cases}$$

Donner aussi le rayon de convergence de la série.

Exercice 22.4 Soient $a \in \mathbb{C}$ et l'équation

$$zu'' + (1 - z)u' + au = 0. \tag{22.15}$$

(i) Que devient l'équation si on fait le changement de variables

$$t = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad v(t) = u\left(\frac{1}{t}\right).$$

(ii) Trouver toutes les singularités (et en déterminer leur nature) de l'équation différentielle (22.15).

(iii) Trouver une solution analytique au voisinage de 0 de l'équation (22.15). En déterminer le rayon de convergence.

(iv) Que peut-on dire de cette solution quand a est un entier strictement positif ?

Exercice 22.5 Trouver toutes les singularités finies (dire la nature de ces singularités) de l'équation

$$(z-1)(\sin(\pi z))u'' + zu' + zu = 0.$$

Exercice 22.6 Soit l'équation

$$(1-z^2)u'' + u = 0 \quad (22.16)$$

(i) Que devient l'équation, si on fait le changement de variables

$$t = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad v(t) = u\left(\frac{1}{t}\right).$$

(ii) Trouver toutes les singularités (et en déterminer leur nature) de l'équation différentielle (22.16).

(iii) Trouver formellement (il ne sera pas nécessaire de discuter la convergence de la série) une solution de l'équation (22.16) de la forme

$$u(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$$

qui satisfasse

$$u(0) = a \quad \text{et} \quad u'(0) = 0.$$

Exercice 22.7 Soient

$$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$$

et soit l'équation

$$zu'' + (b-z)u' - au = 0. \quad (22.17)$$

(i) Trouver toutes les singularités (et en déterminer leur nature) de l'équation différentielle (22.17).

(ii) Trouver formellement une solution de l'équation (22.17) de la forme

$$u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$$

qui satisfasse $u(0) = 1$. Donner son rayon de convergence.

Exercice 22.8 Soit l'équation

$$z^2 u'' + z u' - (z^2 + 1) u = 0. \quad (22.18)$$

(i) Trouver toutes les singularités (et en déterminer leur nature) de l'équation différentielle (22.18).

(ii) Trouver formellement une solution de l'équation (22.18) de la forme

$$u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$$

qui satisfasse $u'(0) = 1$. Donner son rayon de convergence.

Exercice 22.9 Soit l'équation ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$$(1 - z^2) u'' - z u' + \lambda u = 0. \quad (22.19)$$

(i) Trouver toutes les singularités (et en déterminer leur nature) de l'équation différentielle (22.19).

(ii) Trouver formellement une solution de l'équation (22.19) de la forme

$$u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$$

qui satisfasse $u'(0) = 0$. Donner (en fonction de λ) son rayon de convergence.

Exercice 22.10 Soit l'équation

$$4z u'' + (2 - z) u = 0. \quad (22.20)$$

(i) Trouver toutes les singularités (et en déterminer leur nature) de l'équation différentielle (22.20).

(ii) Trouver formellement une solution de l'équation (22.20) de la forme

$$u(z) = e^{\frac{z}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$$

qui satisfasse $u(0) = 0$ et $u'(0) = 1$ (on pourra se contenter de donner le terme u_{n+1} en fonction du terme u_n). Donner le rayon de convergence de la série.

Exercice 22.11 Soit l'équation ($\lambda \in \mathbb{C}$)

$$z^2 u'' + (z^4 + \lambda) u = 0. \quad (22.21)$$

(i) Trouver toutes les singularités (et en déterminer leur nature) de l'équation différentielle (22.21).

(ii) Trouver formellement une solution de l'équation (22.21) de la forme

$$u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$$

quand $\lambda = -6$. Donner son rayon de convergence.

Exercice 22.12 Soit

$$\begin{cases} Lu(z) = (1 - z^3) u'''(z) - z u'(z) + u(z) = 0 \\ u(0) = 1 \quad \text{et} \quad u'(0) = u''(0) = 0. \end{cases}$$

(i) Que devient l'équation $Lu(z) = 0$ si on fait le changement de variable

$$t = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad v(t) = u\left(\frac{1}{t}\right).$$

(ii) Trouver toutes les singularités (et en déterminer leur nature) de l'équation différentielle $Lu(z) = 0$.

(iii) Trouver une solution du problème de la forme

$$u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$$

et déterminer son rayon de convergence.

Exercice 22.13 Soit

$$\begin{cases} Lu(z) = z^4 u''''(z) + z^2 u''(z) + (z^2 - 2) u(z) = 0 \\ u''(0) = 1 \quad \text{et} \quad u(0) = u'(0) = u'''(0) = 0 \end{cases}$$

où $u'''' = d^4u/dz^4$ et idem pour les autres dérivées.

(i) Que devient l'équation $Lu(z) = 0$ si on fait le changement de variable

$$t = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad v(t) = u\left(\frac{1}{t}\right).$$

(ii) Trouver toutes les singularités (et en déterminer leur nature) de l'équation différentielle $Lu(z) = 0$.

(iii) Trouver une solution du problème de la forme

$$u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$$

et déterminer son rayon de convergence.

22.7 Corrigés**Exercice 22.1** On a

$$u'(z) = \left(v\left(\frac{1}{z}\right) \right)' = -\frac{1}{z^2} v'\left(\frac{1}{z}\right)$$

et

$$u''(z) = \left(-\frac{1}{z^2} v' \left(\frac{1}{z} \right) \right)' = \frac{1}{z^4} v'' \left(\frac{1}{z} \right) + \frac{2}{z^3} v' \left(\frac{1}{z} \right).$$

On déduit ainsi que

$$\begin{aligned} Lu(z) &= u''(z) + a(z) u' + b(z) u(z) \\ &= \frac{1}{z^4} v'' \left(\frac{1}{z} \right) + \left(\frac{2}{z^3} - \frac{a(z)}{z^2} \right) v' \left(\frac{1}{z} \right) + b(z) v \left(\frac{1}{z} \right). \end{aligned}$$

En posant $z = 1/t$ on trouve que

$$Lu \left(\frac{1}{t} \right) = t^4 v''(t) + \left(2t^3 - t^2 a \left(\frac{1}{t} \right) \right) v'(t) + b \left(\frac{1}{t} \right) v(t)$$

et donc en divisant par t^4 on obtient que

$$L_\infty v(t) = v''(t) + \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} a \left(\frac{1}{t} \right) \right] v'(t) + \left[\frac{1}{t^4} b \left(\frac{1}{t} \right) \right] v(t) = 0. \quad \spadesuit$$

Exercice 22.2 (i) $z_0 = 0$ est une singularité régulière. A l'infini l'équation devient

$$t^2 u'' + t \left[2 - \frac{1}{t} (tc - 1) \right] u' - \frac{1}{t} a u = 0.$$

Il s'ensuit que $z_0 = \infty$ est un point singulier irrégulier.

(ii) Pas de singularités finies. A l'infini l'équation devient

$$t^2 u'' + 2t u' + \frac{1}{t^3} u = 0.$$

Il s'ensuit que $z_0 = \infty$ est un point singulier irrégulier.

(iii) Montrons que $z_0 = \pm 1$ sont des singularités régulières. Montrons ceci pour $z_0 = 1$ l'autre étant analogue. Multipliant l'équation par $\frac{1-z}{1+z}$ l'équation devient

$$(z-1)^2 u'' + (z-1) \frac{2z}{1+z} u' + \frac{\alpha(\alpha+1)(1-z)}{1+z} u = 0,$$

d'où le résultat. On a, par ailleurs,

$$a(z) = -\frac{2z}{1-z^2} \quad \text{et} \quad b(z) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-z^2}$$

et donc

$$2 - \frac{1}{t} a(1/t) = 2 - \frac{1}{t} \frac{2/t}{1-1/t^2} = 2 + \frac{2}{t^2-1}$$

$$\frac{1}{t^2} b(1/t) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^2-1}.$$

Ainsi $z_0 = \infty$ est une singularité régulière.

(iv) $z_0 = 0$ est une singularité régulière. On a

$$a(z) = \frac{1-z}{z} \quad \text{et} \quad b(z) = \frac{\alpha}{z}$$

et donc

$$2 - \frac{1}{t} a(1/t) = 2 - \frac{1}{t} \frac{1-1/t}{1/t} = 2 - \frac{t-1}{t}$$

$$\frac{1}{t^2} b(1/t) = \frac{\alpha}{t}.$$

Ainsi $z_0 = \infty$ est une singularité irrégulière.

(v) Aucune singularité finie. On a

$$2 - \frac{1}{t} a(1/t) = 2 + \frac{2}{t^2}$$

$$\frac{1}{t^2} b(1/t) = \frac{\alpha}{t^2}.$$

Ainsi $z_0 = \infty$ est une singularité irrégulière. ♠

Exercice 22.3 On cherche des solutions de la forme $u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$. On obtient

$$u''(z) + z u(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n z^{n-2} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^{n+1}$$

$$= 2c_2 + \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+3)(n+2)c_{n+3} + c_n] z^{n+1}.$$

On trouve donc $c_2 = 0$ et

$$c_{n+3} = -\frac{c_n}{(n+3)(n+2)}, \quad n \geq 0.$$

Par induction, on trouve que

$$c_{3k} = a_k c_0, \quad c_{3k+1} = b_k c_1 \quad \text{et} \quad c_{3k+2} = 0$$

où on a posé $a_0 = b_0 = 1$,

$$a_k = (-1)^k \frac{\prod_{l=1}^k (3l-2)}{(3k)!} \quad \text{et} \quad b_k = (-1)^k \frac{\prod_{l=1}^k (3l-1)}{(3k+1)!}.$$

Pour finir, on a donc que

$$u(z) = c_0 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{3k} \right) + c_1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^{3k+1} \right).$$

Le rayon de convergence est infini par le Théorème 22.1 ou par un calcul direct (règle de d'Alembert). ♠

Exercice 22.4 (i) L'équation devient

$$t^2 v'' + (t+1) v' + \frac{a}{t} v = 0.$$

(ii) On voit donc que $z_0 = 0$ est une singularité régulière et $z_0 = \infty$ une singularité irrégulière.

(iii) On pose

$$u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

En remettant dans l'équation, on trouve

$$c_{n+1} = \frac{n-a}{(n+1)^2} c_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

ou encore

$$c_n = \frac{c_0}{(n!)^2} \prod_{k=0}^{n-1} (k-a), \quad n = 1, 2, \dots$$

Le rayon de convergence est obtenu par

$$\lim \frac{c_{n+1} |z|^{n+1}}{c_n |z|^n} = 0$$

est donc il est infini.

(iv) Si a est un entier, on trouve que la solution est un polynôme de degré a . ♠

Exercice 22.5 Les singularités éventuelles sont quand

$$(z-1) \sin(\pi z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = n \text{ avec } n \in \mathbb{Z}.$$

On remarque toutefois que $z = 0$ est une singularité éliminable. Pour savoir la nature des autres singularités on multiplie par

$$\frac{(z-n)^2}{(z-1) \sin(\pi z)}.$$

On a ainsi

$$(z-n)^2 u'' + (z-n) \frac{z(z-n)}{(z-1) \sin(\pi z)} u' + \frac{z(z-n)^2}{(z-1) \sin(\pi z)} u = 0.$$

Si $z = 1$, alors c'est une singularité irrégulière car

$$\frac{z(z-n)}{(z-1) \sin(\pi z)} = \frac{z}{\sin(\pi z)}$$

qui n'est pas analytique en $z = 1$. Alors que $z = n$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ sont des singularités régulières, car

$$\frac{z(z-n)}{(z-1)\sin(\pi z)} \quad \text{et} \quad \frac{z(z-n)^2}{(z-1)\sin(\pi z)}$$

sont analytiques au voisinage de $z = n$. ♠

Exercice 22.6 (i) L'équation devient

$$t^2 v'' + 2t v' + \frac{1}{(t^2 - 1)} v = 0.$$

(ii) On voit donc que $z_0 = \pm 1$ et $z_0 = \infty$ sont des singularités régulières.

(iii) On trouve ainsi

$$(1 - z^2) u'' + u = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} + [1 - k(k-1)]c_k] z^k = 0.$$

On trouve par conséquent que, pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$c_{k+2} = \frac{k(k-1) - 1}{(k+2)(k+1)} c_k.$$

Comme

$$c_0 = a \quad \text{et} \quad c_1 = 0$$

on déduit que tous les $c_{2l+1} = 0$, alors que les c_{2l} sont donnés par

$$c_{2l+2} = \frac{2l(2l-1) - 1}{(2l+2)(2l+1)} c_{2l}.$$

On a donc, pour tout $l = 0, 1, 2, \dots$,

$$c_{2l+2} = \left[\prod_{k=0}^l [2k(2k-1) - 1] \right] \frac{a}{(2l+2)!}.$$

(iv) On sait par ailleurs, à l'aide du théorème du cours, que la série converge, en tous cas, pour $|z| < 1$. ♠

Exercice 22.7 (i) Si on fait le changement de variables

$$t = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad v(t) = u\left(\frac{1}{t}\right)$$

l'équation devient

$$t^2 v'' + ((2-b)t + 1) v' - \frac{a}{t} v = 0.$$

On voit donc que $z_0 = 0$ est une singularité régulière et $z_0 = \infty$ est une singularité irrégulière.

(ii) On a par hypothèse $u_0 = 1$ et on trouve ainsi

$$\begin{aligned} & z u'' + (b - z) u' - a u \\ &= (b u_1 - a) + \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)(n+b) u_{n+1} - (n+a) u_n] z^n = 0. \end{aligned}$$

On trouve par conséquent que

$$u_1 = \frac{a}{b}$$

et, pour tout $n = 2, 3, \dots$,

$$u_{n+1} = \frac{(n+a)}{(n+b)(n+1)} u_n.$$

On s'aperçoit (par induction) qu'en fait

$$u_{n+1} = \frac{a(a+1) \cdots (a+n)}{b(b+1) \cdots (b+n)} \frac{1}{(n+1)!}.$$

(iii) Comme

$$\frac{|u_{n+1} z^{n+1}|}{|u_n z^n|} = \frac{|(n+a)|}{|(n+b)|(n+1)} |z|$$

on a, par le critère de d'Alembert, que le rayon de convergence est infini. ♠

Exercice 22.8 (i) Si on fait le changement de variables

$$t = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad v(t) = u\left(\frac{1}{t}\right)$$

l'équation devient

$$t^2 v'' + t v' - \frac{t^2 + 1}{t^2} v = 0.$$

On voit donc que $z_0 = 0$ est une singularité régulière et $z_0 = \infty$ est une singularité irrégulière.

(ii) On a par hypothèse $u_1 = 1$ et on trouve ainsi

$$\begin{aligned} & z^2 u'' + z u' - (z^2 + 1) u \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n z^n + \left[u_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} n u_n z^n \right] \\ &- \left[\sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-2} z^n \right] - \left[u_0 + u_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} u_n z^n \right] \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} 0 &= z^2 u'' + z u' - (z^2 + 1) u \\ &= -u_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} [n(n-1) u_n + n u_n - u_n - u_{n-2}] z^n. \end{aligned}$$

On trouve par conséquent que

$$u_0 = 0$$

et, pour tout $n = 2, 3, \dots$,

$$u_n = \frac{u_{n-2}}{n^2 - 1}.$$

On s'aperçoit (par induction) qu'en fait

$$u_{2k} = 0 \quad \text{et} \quad u_{2k+1} = \frac{u_1}{2^{2k} (k+1)! k!} = \frac{1}{2^{2k} (k+1)! k!}$$

(iii) Comme

$$\frac{|u_{2k+3} z^{2k+3}|}{|u_{2k+1} z^{2k+1}|} = \frac{2^{2k} (k+1)! k!}{2^{2k+2} (k+1)! (k+2)!} |z|^2 = \frac{1}{2^2 (k+1) (k+2)} |z|^2$$

on a, par le critère de d'Alembert, que le rayon de convergence est infini. ♠

Exercice 22.9 (i) On remarque que $z_0 = \pm 1$ sont des singularités régulières. Montrons cela pour $z_0 = -1$ (on procède de la même façon pour $z_0 = 1$). Ceci suit immédiatement du fait que l'équation peut être écrite comme

$$(z+1)^2 u'' + (z+1) \frac{z}{z-1} u' - \frac{\lambda(z+1)}{z-1} u = 0.$$

Montrons maintenant que $z_0 = \infty$ est aussi une singularité régulière. Si on fait le changement de variables

$$t = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad v(t) = u\left(\frac{1}{t}\right)$$

l'équation devient

$$t^2 v'' + t \left(2 + \frac{1}{t^2 - 1}\right) v' + \frac{\lambda}{t^2 - 1} v = 0.$$

On voit donc que $z_0 = \infty$ est bien une singularité régulière.

(ii) On trouve

$$\begin{aligned} & (1 - z^2) u'' - z u' + \lambda u \\ &= (1 - z^2) \left[\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n z^{n-2} \right] - z \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n z^{n-1} \right] + \lambda \left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1) u_{n+2} + (\lambda - n^2) u_n] z^n. \end{aligned}$$

Comme $(1 - z^2) u'' - z u' + \lambda u = 0$, on déduit que, pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$u_{n+2} = \frac{(n^2 - \lambda) u_n}{(n+2)(n+1)}.$$

Par hypothèse nous avons $u'(0) = u_1 = 0$ et donc

$$u_{2s+1} = 0 \quad \text{et} \quad u_{2s+2} = \frac{(4s^2 - \lambda) u_{2s}}{2(s+1)(2s+1)}.$$

On s'aperçoit (par induction) qu'en fait pour $s \geq 1$

$$u_{2s} = \frac{\left[\prod_{j=0}^{s-1} (4j^2 - \lambda) \right] u_0}{2^s (s!) \prod_{j=1}^s (2j-1)} = \frac{\left[\prod_{j=0}^{s-1} (4j^2 - \lambda) \right] u_0}{(2s)!}.$$

On note aussi que si $\lambda = 4m^2$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$, alors

$$u_{2l+2} = 0 \quad \text{pour tout } l \geq m.$$

(iii) Si $\lambda = 4m^2$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$, alors la solution est un polynôme et donc le rayon de convergence est infini. Dans tous les autres cas on écrit

$$\frac{|u_{2s+2} z^{2s+2}|}{|u_{2s} z^{2s}|} = \frac{|4s^2 - \lambda|}{2(s+1)(2s+1)} |z|^2 \xrightarrow{s \rightarrow \infty} |z|^2$$

et on déduit, par le critère de d'Alembert, que le rayon de convergence est 1. ♠

Exercice 22.10 (i) On remarque que $z_0 = 0$ est une singularité régulière. Ceci suit immédiatement du fait que l'équation peut être écrite comme

$$4z^2 u'' + z(2-z)u = 0.$$

Montrons maintenant que $z_0 = \infty$ est une singularité irrégulière. Si on fait le changement de variables

$$t = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad v(t) = u\left(\frac{1}{t}\right)$$

l'équation devient

$$t^2 v'' + 2t v' + \frac{2t-1}{4t^2} v = 0.$$

On voit donc que $z_0 = \infty$ est bien une singularité irrégulière.

(ii) On trouve

$$u'(z) = \left(e^{\frac{z}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n \right)' = e^{\frac{z}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n z^{n-1} \right].$$

Comme $u(0) = 0$ et $u'(0) = 1$, on obtient

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1.$$

La dérivée seconde s'écrit

$$\begin{aligned} u''(z) &= \left(e^{\frac{z}{2}} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n z^{n-1} \right] \right)' \\ &= e^{\frac{z}{2}} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{4} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{u_n}{2} z^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{u_n}{2} z^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) u_n z^{n-2} \right] \\ &= e^{\frac{z}{2}} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{4} z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n z^{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n z^{n-2} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, en simplifiant par $e^{z/2}$ dans l'équation $4z u'' + (2-z)u = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^{n+1} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n z^n + 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n z^{n-1} \right] \\ &\quad + \left[2 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^{n+1} \right]. \end{aligned}$$

Où en d'autres termes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1) u_n z^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n z^{n-1} = 0$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(2n+1) u_n + 2n(n+1) u_{n+1}] z^n = 0.$$

En résumé on a $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour $n \geq 1$

$$u_{n+1} = -\frac{(2n+1)}{2n(n+1)} u_n.$$

(iii) On constate que

$$\frac{|u_{n+1} z^{n+1}|}{|u_n z^n|} = \frac{(2n+1)}{2n(n+1)} |z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et on déduit, par le critère de d'Alembert, que le rayon de convergence est ∞ . ♠

Exercice 22.11 (i) *Cas 1* : $\lambda = 0$. Dans ce cas l'équation est $u'' + z^2 u = 0$ et donc il n'y a pas de singularité finie.

Cas 2 : $\lambda \neq 0$. On a donc que $z_0 = 0$ est une singularité régulière.

Montrons maintenant que $z_0 = \infty$ est une singularité irrégulière. Si on fait le changement de variables

$$t = \frac{1}{z} \quad \text{et} \quad v(t) = u\left(\frac{1}{t}\right)$$

l'équation devient

$$t^2 v'' + 2t v' + \left(\frac{1}{t^4} + \lambda\right) v = 0.$$

On voit donc que $z_0 = \infty$ est bien une singularité irrégulière.

(ii) On trouve

$$\begin{aligned} z^2 u'' + (z^4 + \lambda) u &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) u_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^{n+4} + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n \\ &= \lambda(u_0 + u_1 z) + ((2 + \lambda) u_2 z^2 + (6 + \lambda) u_3 z^3) \\ &\quad + \sum_{n=4}^{+\infty} [(n^2 - n + \lambda) u_n + u_{n-4}] z^n. \end{aligned}$$

Comme $z^2 u'' + (z^4 + \lambda) u = 0$, on déduit que,

$$\lambda u_0 = \lambda u_1 = 0, \quad (2 + \lambda) u_2 = (6 + \lambda) u_3 = 0$$

et pour tout $n = 4, 5, 6, \dots$,

$$u_n = \frac{-u_{n-4}}{(n^2 - n + \lambda)}.$$

Comme $\lambda = -6$, on infère que $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ et u_3 est libre. Par conséquent on trouve que, pour $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} u_{4n} &= u_{4n+1} = u_{4n+2} = 0 \\ u_{4n+3} &= \frac{-u_{4n-1}}{\left((4n+3)^2 - (4n+3) - 6\right)} = \frac{-u_{4n-1}}{16n^2 + 20n} = \frac{-u_{4(n-1)+3}}{4n(4n+5)} \end{aligned}$$

et donc, par induction

$$u_{4n+3} = \frac{(-1)^n u_3}{4^n (n!) \prod_{k=1}^n (4k+5)}.$$

Finalement le rayon de convergence est infini car, par le critère de d'Alembert,

$$\frac{|u_{4n+3} z^{4n+3}|}{|u_{4n-1} z^{4n-1}|} = \frac{1}{16n^2 + 20n} |z|^4 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Remarque Noter que ce calcul est consistant avec la méthode de Frobenius, car les racines du polynôme indiciel $q(\nu) = \nu(\nu-1) - 6$ sont $\nu_1 = 3$ et $\nu_2 = -2$ et donc la solution correspondant à $\nu = 3$ est bien de la forme

$$u(z) = z^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{u}_n z^n$$

et c'est la seule qui soit holomorphe dans \mathbb{C} . ♠

Exercice 22.12 (i) Comme

$$u'(z) = \frac{-1}{z^2} v' \left(\frac{1}{z} \right), \quad u''(z) = \frac{1}{z^4} v'' \left(\frac{1}{z} \right) + \frac{2}{z^3} v' \left(\frac{1}{z} \right)$$

et

$$u'''(z) = \frac{-1}{z^6} v''' \left(\frac{1}{z} \right) - \frac{6}{z^5} v'' \left(\frac{1}{z} \right) - \frac{6}{z^4} v' \left(\frac{1}{z} \right)$$

l'équation devient

$$\begin{aligned} Lu(z) &= (1 - z^3) u'''(z) - z u'(z) + u(z) \\ &= \frac{-(1 - z^3)}{z^6} v''' \left(\frac{1}{z} \right) - \frac{6(1 - z^3)}{z^5} v'' \left(\frac{1}{z} \right) \\ &\quad + \left[\frac{-6(1 - z^3)}{z^4} + \frac{1}{z} \right] v' \left(\frac{1}{z} \right) + v \left(\frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$

et donc

$$Lv(t) = (t^3 - t^6) v'''(t) + 6(t^2 - t^5) v''(t) + (7t - 6t^4) v'(t) + v(t) = 0.$$

(ii) Les singularités finies de l'équation sont quand $z^3 = 1$, i.e. $z = e^{2k\pi i/3}$, $k = 0, 1, 2$. Ce sont clairement des singularités régulières. Par la question précédente on voit tout de suite que $z_0 = \infty$ est une singularité régulière car

$$Lv(t) = t^3(1 - t^3) v'''(t) + 6t^2(1 - t^3) v''(t) + t(7 - 6t^3) v'(t) + v(t) = 0.$$

(iii) On cherche une solution de la forme

$$u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n.$$

On doit avoir

$$u(0) = u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u'(0) = u_1 = u''(0) = u_2 = 0.$$

On a par ailleurs que

$$\begin{aligned} z u'(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n z^n \\ u'''(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)(n+2)(n+1) u_{n+3} z^n \\ z^3 u'''(z) &= \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2) u_n z^n. \end{aligned}$$

En remettant dans l'équation, on trouve

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)(n+2)(n+1) u_{n+3} z^n \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} [n(n-1)(n-2) + n-1] u_n z^n + u_1 z + 2u_2 z^2 - (u_0 + u_1 z + u_2 z^2). \end{aligned}$$

En se rappelant que $u_0 = 1$ et $u_1 = u_2 = 0$ on trouve que

$$u_3 = \frac{-1}{3!}, \quad u_4 = u_5 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+3} = \frac{(n-1)^3 u_n}{(n+3)(n+2)(n+1)} \quad \text{si } n \geq 3.$$

On s'aperçoit alors que $u_{3k+1} = u_{3k+2} = 0$ et, pour tout $k = 2, 3, \dots$,

$$u_{3k} = -\frac{(3k-4)^3 (3k-7)^3 \dots 5^3 2^3}{(3k)!} = -\frac{\prod_{j=1}^{k-1} (3j-1)^3}{(3k)!}.$$

Par le critère de d'Alembert, on s'aperçoit immédiatement que le rayon de convergence est 1 (ce qui est en accord avec le Théorème 22.1 du cours). ♠

Exercice 22.13 (i) On trouve que

$$\begin{aligned} u'(z) &= \left(v\left(\frac{1}{z}\right) \right)' = -\frac{1}{z^2} v'\left(\frac{1}{z}\right) \\ u''(z) &= \frac{1}{z^4} v''\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{2}{z^3} v'\left(\frac{1}{z}\right) \\ u'''(z) &= -\frac{1}{z^6} v'''\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{6}{z^5} v''\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{6}{z^4} v'\left(\frac{1}{z}\right) \\ u''''(z) &= \frac{1}{z^8} v''''\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{12}{z^7} v'''\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{36}{z^6} v''\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{24}{z^5} v'\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

Comme $Lu = z^4 u'''' + z^2 u'' + (z^2 - 2)u$, on déduit ainsi que

$$\begin{aligned} Lu(z) &= \frac{1}{z^4} v''''\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{12}{z^3} v'''\left(\frac{1}{z}\right) \\ &\quad + \frac{37}{z^2} v''\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{26}{z} v'\left(\frac{1}{z}\right) + (z^2 - 2) v\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

En posant $z = 1/t$, on trouve que

$$Lv(t) = t^4 v''''(t) + 12t^3 v'''(t) + 37t^2 v''(t) + 26t v'(t) + \left(\frac{1}{t^2} - 2\right) v(t).$$

(ii) La seule singularité finie de l'équation est en $z_0 = 0$ et c'est une singularité régulière. Par la question précédente on voit tout de suite que $z_0 = \infty$ est une singularité irrégulière.

(iii) Supposons qu'il existe une solution en série entière de l'équation qui converge pour tout z , comme

$$u_2 = \frac{u''(0)}{2!} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u(0) = u_0 = u'(0) = u_1 = u'''(0) = u_3 = 0$$

la série est de la forme

$$u(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k = \sum_{k=2}^{+\infty} u_k z^k = z^2 + \sum_{k=4}^{+\infty} u_k z^k.$$

On a par ailleurs que

$$\begin{aligned} (z^2 - 2) u(z) &= \sum_{k=4}^{+\infty} u_{k-2} z^k - 2z^2 - 2 \sum_{k=4}^{+\infty} u_k z^k \\ z^2 u''(z) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) u_k z^k = 2z^2 + \sum_{k=4}^{+\infty} k(k-1) u_k z^k \\ z^4 u''''(z) &= \sum_{k=4}^{+\infty} k(k-1)(k-2)(k-3) u_k z^k. \end{aligned}$$

En remettant dans l'équation, on trouve

$$Lu(z) = \sum_{k=4}^{+\infty} \{[k(k-1)(k-2)(k-3) + k(k-1) - 2] u_k + u_{k-2}\} z^k = 0$$

et ainsi, pour tout $k = 4, 5, 6, \dots$,

$$[k(k-1)(k-2)(k-3) + k(k-1) - 2] u_k = -u_{k-2}.$$

Par conséquent, pour tout $n = 1, 2, \dots$, on trouve que $u_{2n-1} = 0$ tandis que (quand $k = 2n + 2$)

$$[(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1) + (2n+2)(2n+1) - 2] u_{2n+2} = -u_{2n}$$

et donc (par induction)

$$u_{2n+2} = \frac{(-1)^n}{2} \prod_{s=1}^n [(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1) + (2n+2)(2n+1) - 2]^{-1}.$$

Le rayon de convergence est clairement infini, par le critère de d'Alembert, car

$$\frac{|u_{2n+2}| |z|^{2n+2}}{|u_{2n}| |z|^{2n}} = \frac{|z|^2}{[(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1) + (2n+2)(2n+1) - 2]},$$

ce qui est en accord avec le Théorème 22.1 du cours. ♠

Bibliographie

- [1] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3ème édition, McGraw-Hill, 1979.
- [2] G. Birkhoff - G.C. Rota, *Ordinary differential equations*, 3ème édition. John Wiley & Sons, 1978.
- [3] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [4] S.D. Chatterji, *Cours d'Analyse 1 : Analyse vectorielle*, PPUR, 1997.
- [5] S.D. Chatterji, *Cours d'Analyse 2 : Analyse complexe*, PPUR, 1997.
- [6] S.D. Chatterji, *Cours d'Analyse 3 : Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles*, PPUR, 1998.
- [7] E.A. Coddington - N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [8] B. Dacorogna, *Introduction to the calculus of variations*, traduit de l'édition française de 1992 ; Third edition. Imperial College Press, London, 2014.
- [9] B. Dacorogna - C. Tanteri, *Analyse avancée pour ingénieurs*, PPUR, 2002.
- [10] G. De Barra, *Introduction to measure theory*, Van Nostrand, New York, 1974.
- [11] J. Douchet, *Analyse complexe*, PPUR, 2017.
- [12] L.C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, **19**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [13] W. Fleming, *Functions of several variables*, 2ème édition, Springer-Verlag 1977.
- [14] N. Fusco - P. Marcellini - C. Sbordone, *Analisi Matematica 2*, Liguori Editore, 1996.
- [15] E. Giusti, *Analisi Matematica 2*, Bollati Boringhieri, 1992.
- [16] F. John, *Partial differential equations*, 4ème édition, Springer-Verlag, 1982.
- [17] A. Katok - B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, 1997.
- [18] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, 3ème édition, Cambridge University Press, 2004.

- [19] E. H. Lieb - M. Loss, *Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, **14** American Mathematical Society, Providence, 2001.
- [20] F.W.J. Olver, *Asymptotics and special functions*, 1997.
- [21] M. H. Protter - C. B. Morrey, *A First Course in Real Analysis*, Springer-Verlag, 1ère édition, 1977.
- [22] C.L. Siegel, *Topics in complex function theory*, Vol. 1, Wiley, New York, 1969.
- [23] E.M. Stein - R. Shakarchi, *Fourier analysis*, Princeton University Press, 2003.
- [24] E.M. Stein - R. Shakarchi, *Complex analysis*, Princeton University Press, 2003.
- [25] E.M. Stein - R. Shakarchi, *Real analysis*, Princeton University Press, 2005.
- [26] E.T. Whittaker - G.N. Watson, *A course in modern analysis*, Cambridge university Press, Cambridge, 1927.
- [27] D.V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton University Press, 1946.
- [28] M. Willem, *Analyse harmonique réelle*, Hermann, Paris, 1995.

Index

- Abscisse de convergence
 - définition, 522
- Aire d'une surface
 - définition, 98
- Anneau de Möbius, 95
- Application conforme, 271, 280, 281, 548
 - définition, 271
- Argument d'un nombre complexe
 - définition, 149
- Axiome du choix, 332, 351
- Bord d'une surface régulière
 - définition, 90
- Champs dérivant d'un potentiel, 44, 46, 52
 - définition, 43
- Connexe, 51, 52
 - définition, 48
- Connexe par arcs
 - définition, 48
- Constante d'Euler, 292
- Convergence au sens d'Abel, 484
- Convexe, 51, 52
 - définition, 48
- Coordonnées cylindriques
 - définition, 9
- Coordonnées polaires
 - définition, 9
- Coordonnées sphériques
 - définition, 10
- Courbe fermée
 - définition, 35
- Courbe régulière
 - définition, 37
- Courbe régulière par morceaux
 - définition, 37
- Courbe simple
 - définition, 35
- Critère de Dini, 458
- Critère de Dirichlet, 323
- Cylindre, 94, 130
- Demi-sphère, 92, 130
- Divergence
 - définition, 11
- Domaine
 - définition, 48
- Domaine régulier
 - définition, 103
- Domaine régulier du plan
 - définition, 68
- Ensemble de Borel
 - définition, 350
- Ensemble de Cantor, 357
- Ensemble étoilé
 - définition, 48
- Ensemble mesurable
 - définition, 341
- Equation d'Airy, 641, 652, 662
- Equation de Bessel, 322, 603, 641, 644, 651, 658
- Equation de Burgers, 535
- Equation de Hamilton-Jacobi, 554
- Equation de Hermitte, 642, 662
- Equation de Hill, 602
- Equation de la chaleur, 543, 553
- Equation de Laguerre, 642, 662

- Equation de Legendre, 641, 652, 662
- Equation des milieux poreux, 555
- Equation des ondes, 551
- Equation des surfaces minimales, 535
- Equation homogène d'Euler, 642, 650, 657
- Equation hypergéométrique, 320, 603, 641, 643, 650, 657
- Equation hypergéométrique confluyente, 641, 652, 662
- Equations de Cauchy-Riemann, 152, 153, 180, 183
- Equations de Lorenz, 602
- Equations de Maxwell, 535
- Equations de Navier-Stokes, 535
- Espace de Schwartz
 - définition, 515, 522
- Espace de Sobolev, 464
- Exponentielle complexe
 - définition, 158
- Famille équicontinue, 198
- Flux, 98, 99
- Fonction de Bessel, 321, 644
- Fonction de Lebesgue, 363, 365
- Fonction de Weierstrass, 315
- Fonction elliptique
 - définition, 307
- Fonction harmonique
 - définition, 11
- Fonction holomorphe, 152, 153, 162, 176, 179, 181–183, 185–187, 221, 225, 226, 247, 248, 271
 - définition, 151
- Fonction hypergéométrique, 305, 319, 644
- Fonction méromorphe, 307
 - définition, 223
- Fonction sl , 312
- Formule d'Abel, 621
- Formule d'Euler, 293, 305
- Formule de Jensen, 197
- Formule de la moyenne, 186
- Formule de Riemann, 298
- Formule intégrale de Cauchy, 183, 184
- Formule sommatoire de Poisson, 515, 516
- Gradient
 - définition, 11
- Grand Théorème de Picard, 194, 232
- Hypothèse de Riemann, 298
- Identité d'Euler, 296
- Identité de Bezout, 308
- Identité de Parseval, 460, 466, 469, 513
- Identité de Plancherel, 512, 519
- Identités de Green dans l'espace, 110
- Identités de Green dans le plan, 82
- Inégalité de Bessel, 462, 513
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, 111
- Inégalité de Grönwall, 609, 611, 614
- Inégalité de Hölder, 399
- Inégalité de Jensen, 403
- Inégalité de Minkowski, 400
- Inégalité de Poincaré, 417
- Inégalité de Wirtinger, 469, 471
- Inégalité isopérimétrique, 471
- Intégrale de Legendre, 303, 305
- Intégrale de Weierstrass, 303
- Intégrale elliptique
 - définition, 303
- Intégrales de Fresnel, 195
- Jacobien, 6
 - définition, 9
- Laplacien
 - définition, 11
- Lemme de Fatou, 383
- Lemme de Goursat, 172, 190
- Lemme de Grönwall, 609
- Lemme de Riemann, 231
- Lemme de Riemann-Lebesgue, 398, 460
- Lemme de Schwarz, 278, 280–283
- Lemniscate, 304
- Logarithme complexe
 - définition, 159
- Loi de Kepler, 602
- Loi de Newton, 602
- Longueur d'une courbe

- définition, 38
- Mesure extérieure
 - définition, 337
- Méthode de d'Alembert, 550
- Méthode de Frobenius, 655
- Moyenne de Cesaro, 454
- Multiplicateur de Lagrange, 20
- Noyau de Dirichlet, 447
- Noyau de Fejer, 448
- Noyau de Poisson, 450
- Ordre d'une fonction elliptique, 314
- Orientation positive d'une courbe
 - définition, 67
- Oscillateur harmonique, 602
- Parallélogramme fondamental, 310
- Paramétrisation par la longueur de l'arc, 40
- Partie régulière de la série de Laurent, 223
 - définition, 222
- Partie singulière de la série de Laurent
 - définition, 222
- Pendule non linéaire, 602, 614
- Phénomène de Gibbs, 485
- Point régulier, 224
 - définition, 222
- Point régulier pour EDO, 648
- Point singulier irrégulier pour EDO, 648
- Point singulier régulier pour EDO, 648
- Pôle d'ordre m , 223–226, 251, 254
 - définition, 222
- Polynôme caractéristique, 618
- Polynôme de Legendre, 320
- Polynôme indiciel, 655
- Potentiel, 44–46
 - définition, 43
- Principe de l'argument, 255
- Principe du maximum, 188, 190, 279, 280, 283
- Principe du minimum, 190, 277
- Principe du prolongement analytique, 187, 194, 277
- Procédé sommatoire d'Abel, 299
- Produit de convolution
 - définition, 508
- Rayon de convergence, 223
 - définition, 223
- Règle de l'Hôpital, 226
- Résidu, 223, 224, 247, 254
 - définition, 223
- Rotationnel
 - définition, 12
- Série de Fourier, 452
 - définition, 450
- Série de Fourier partielle
 - définition, 450
- Série de Laurent, 223
 - définition, 222
- Série de Taylor, 185, 223, 224
- Série divergente partout, 644, 651
- Série géométrique, 223, 224
- Simplement connexe, 46, 51, 52, 179, 183, 281, 548
 - définition, 50
- Singularité éliminable, 225
- Singularité à l'infini pour EDO, 649
- Singularité éliminable, 224
- Singularité essentielle isolée, 224, 225
 - définition, 222
- Singularité non isolée, 225
- Sphère, 93, 129
- Surface orientable, 129
- Surface régulière
 - définition, 89, 133
- Surface régulière orientable, 91, 98
- Surface régulière par morceaux, 98, 103, 129
- Système Hamiltonien, 602
- Théorème d'équidistribution de Weyl, 486
- Théorème d'ergodicité, 485
- Théorème de Bernstein, 465
- Théorème de Carleson, 459
- Théorème de Casorati-Weierstrass, 232
- Théorème de Cauchy, 176, 181, 182, 184, 248

- Théorème de Cauchy-Peano, 606
Théorème de Fejer, 455, 460
Théorème de Fubini, 407, 509, 511, 513
Théorème de Green, 67–69, 82, 106, 181, 183
Théorème de Heine-Borel, 332, 339
Théorème de Jordan, 67
Théorème de Kronecker, 309, 486
Théorème de la convergence dominée, 388
Théorème de la convergence monotone, 381
Théorème de la divergence, 103–105
Théorème de la divergence dans le plan, 70
Théorème de la fonction inverse, 14
Théorème de Lindelöf, 332, 333
Théorème de Liouville, 186, 194, 310
Théorème de Morera, 190
Théorème de Picard, 605
Théorème de Riemann, 281, 548
Théorème de Rouché, 255, 256
Théorème de Stokes, 129, 130, 132
Théorème de Tonelli, 407, 508
Théorème de Weierstrass, 191, 289, 296, 301, 318
Théorème des accroissement finis, 6
Théorème des fonctions implicites, 15, 16
Théorème des résidus, 247, 250, 252
Théorème fondamental de l'algèbre, 186, 256
Théorème fondamental des nombres premiers, 295
Transformation de Möbius, 272, 273, 275, 283
 définition, 271
Transformée de Fourier, 251, 504, 505, 519, 538–540, 549–551
 définition, 504
Transformée de Laplace, 524
 définition, 522
Wronskien, 620