Exercice 1 *Solutions de l'équation de Dirac*

Nous avons vu que la fonction d'onde de Dirac $|\psi\rangle$ se met sous la forme d'un spineur à 4 composantes. On écrit le spineur comme

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_1(t,\mathbf{x}) \\ \psi_2(t,\mathbf{x}) \\ \psi_3(t,\mathbf{x}) \\ \psi_4(t,\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1. Rappeler la forme de l'équation de Dirac.
2. On considère un spineur de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ dirigé selon la direction z et de module k, c'est-à-dire que l'on suppose pouvoir séparer partie spatiale et temporelle du spineur. On a donc $\psi(t,\mathbf{x}) = \psi(t)e^{ikz}$, où $\psi(t)$ est un vecteur à 4 composantes.

   Réécrire sous forme matricielle l'équation de Dirac pour un tel spineur, et la simplifier en exploitant la séparation des variables introduite.
3. Trouver les énergies propres de cette équation.
4. En déduire les $\psi_i(t,\mathbf{x})$ des fonctions d'onde propres.
5. Interpréter les résultats dans la limite non relativiste.
6. Il est parfois pratique de reformuler l'équation de Dirac de la façon suivante:

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0 \tag{2}$$

   Trouver le lien entre les matrices gammas ainsi définies et les matrices β et α_i ($i = 1, 2, 3$) utilisées pour la question 1.
7. Vérifier que les matrices ainsi obtenues satisfont les relations suivantes:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad tr\ \gamma^\mu = 0 \tag{3}$$

   où $\{a, b\} = ab + ba$ dénote l'anti-commutateur, et $g^{\mu\nu}$ la métrique de Minkowski, $g^{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$. μ et ν sont des indices d'espace-temps, et donc courent de 0 à 3.