Exercice 1 *Solutions de l'équation de Dirac*

1. L'équation de Dirac agit sur le spineur $\psi(t, \mathbf{x})$ à quatre composantes :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\mathbf{x}) = (mc^2\beta + c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}})\psi(t,\mathbf{x}). \tag{1}$$

   où les matrices β et α_i $(i = 1, 2, 3)$ sont des matrices 4x4 définies par :

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0_2 \\ 0_2 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

   et les σ_i sont les matrices de Pauli. On a donc une équation matricielle.

   Notons dès à présent que le fait que le spineur ait 4 composantes n'a **rien** à voir avec la taille d'un quadri-vecteur d'espace-temps. C'est simplement la plus petite dimension qui permette de satisfaire à l'algèbre de Clifford (en d'autres termes, le plus petit objet qui peut vérifier l'équation de Dirac). On verra à la question 7 que les deux sont tout à fait distincts plus en détail.

2. **Cette question a désormais disparu dans la nouvelle version de l'énoncé, car elle pouvait prêter à confusion. Ce corrigé est désormais une répétition de l'énoncé de la nouvelle question 2.**

   Ce que l'on voulait dire ici était la chose suivante : on désire que le spineur $\psi(t, \mathbf{x})$ soit séparable en temps et en espace, donc que l'on puisse écrire, de façon générale, que $\psi(t, \mathbf{x}) = \psi(t)f(\mathbf{x})$, avec $\psi(t)$ un vecteur à quatre composantes, et $f(\mathbf{x})$ une fonction *a priori* quelconque. On impose de plus que la partie spatiale doive se comporter comme une onde se propageant selon z, donc on doit pouvoir écrire :

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \psi(t)e^{ikz} \tag{3}$$

   Dans ce cas, le spineur vérifie l'équation suivante : $\mathbf{p}\psi(t, \mathbf{x}) = \hbar k\mathbf{e}_z\psi(t, \mathbf{x})$, mais cette étape n'est pas indispensable, c'est une simple réécriture de notre hypothèse.

   Notez aussi que la partie spatiale est commune pour un ψ, donc pour toutes les composantes. Chaque composante prise individuellement n'a pas sens propre, ce ne sont pas des états propres du système, donc leur description n'apporte rien.

3. Réécrivons maintenant l'équation de Dirac sous forme matricielle, puis simplifions par e^{ikz}. Puisque le vecteur d'onde est selon la direction z, le produit scalaire entre

α et $\mathbf{p}$ ne va conserver qu'un terme non nul, $\alpha_3 p_z$:

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,\mathbf{x}) &= (mc^2\beta + c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}})\psi(t,\mathbf{x}) \\
&= (mc^2\beta + c\hbar k\alpha_3)\psi(t,\mathbf{x}) \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\psi_1(t,\mathbf{x})\\ \psi_2(t,\mathbf{x})\\ \psi_3(t,\mathbf{x})\\ \psi_4(t,\mathbf{x})\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} mc^2 & 0 & c\hbar k & 0 \\ 0 & mc^2 & 0 & -c\hbar k \\ c\hbar k & 0 & -mc^2 & 0 \\ 0 & -c\hbar k & 0 & -mc^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1(t,\mathbf{x})\\ \psi_2(t,\mathbf{x})\\ \psi_3(t,\mathbf{x})\\ \psi_4(t,\mathbf{x})\end{pmatrix} \\
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) &= M\psi(t).
\end{aligned} \tag{4}$$

4. On cherche maintenant une solution à problème qui puisse s'écrire $\psi(t,\mathbf{x}) = u\ e^{i(kz-Et/\hbar)}$, avec u un vecteur à 4 composantes. On veut en effet que le spineur oscille de façon semblable à une onde plane, en gardant la structure vectorielle suffisante pour satisfaire l'équation. L'équation de Dirac se réé finalement donc comme une équation aux valeurs propres :

$$M\psi(t) = E\psi(t). \tag{5}$$

Pour trouver les valeurs propres de ce système, on résoud $\det(M - E\mathbb{1}_4) = 0$. Puisque la matrice a beaucoup de 0, on peut aisément calculer son déterminant directement, mais on peut aussi remarquer une autre stratégie. On sait que le déterminant d'une matrice change de signe quand on échange deux lignes ou deux colonnes. Si on fait deux fois cette opération, en échangeant successivement les lignes 2 et 3, puis colonnes 2 et 3, on obtient le déterminant d'une matrice diagonale par blocs, avec deux blocs 2x2, plus facile à calculer.
Quelle que soit la méthode employée, on obtient un carré : $(E^2 - m^2c^4 - c^2\hbar^2k^2)^2 = 0$.
Il y a donc deux énergies propres, chacune dégénérée deux fois : $E^{\pm} = \pm\sqrt{m^2c^4 + c^2\hbar^2k^2}$.

5. Il faut maintenant trouver les vecteurs propres $u_{1,2}$ et $v_{1,2}$ correspondant respectivements aux valeurs propres E^+ et E^-. On résoud donc successivement $Mu = E^+u$ puis $Mv = E^-v$. Chaque équation va nous donner un système de 4 équations à 4 inconnues, complètement séparé en deux systèmes de 2 équations à 2 inconnues complètement indépendants.
Il est aisé à partir de chacun de ces deux systèmes de trouver deux vecteurs propres (chaque valeur propre étant 2 fois dégénérée). On obtient, pour $E^+ = \sqrt{m^2c^4 + c^2\hbar^2k^2}$:

$$u_{(1)} = \begin{pmatrix} c\hbar k \\ 0 \\ -mc^2 + E^+ \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ c\hbar k \\ 0 \\ mc^2 - E^+ \end{pmatrix}. \tag{6}$$

et pour $E^- = -\sqrt{m^2c^4 + c^2\hbar^2k^2}$:

$$v_{(1)} = \begin{pmatrix} -c\hbar k \\ 0 \\ mc^2 - E^- \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ c\hbar k \\ 0 \\ mc^2 - E^- \end{pmatrix}. \tag{7}$$

On rappelle (!) que le choix des vecteurs propres est toujours arbitraire, c'est-à-dire qu'il y a toujours une constante fixée arbitrairement. On a choisi cette écriture par soucis d'esthétique.

Il faut encore les normaliser, et donc les diviser par

$$N^{(u)} = \sqrt{c^2\hbar^2k^2 + (mc^2 - E^+)^2} = \sqrt{2E^+(E^+ - mc^2)}$$

pour les deux premiers, et par

$$N^{(v)} = \sqrt{c^2\hbar^2k^2 + (mc^2 - E^-)^2} = \sqrt{2E^-(E^- - mc^2)}$$

pour les deux derniers.

On a donc trouvé 4 spineurs propres satisfaisant l'équation de Dirac, formant une base : $\psi^{e^-_{\uparrow\downarrow}} = u_{1,2}e^{i(kz-E^+t/\hbar)}$ et $\psi^{e^+_{\uparrow\downarrow}} = v_{1,2}e^{i(kz-E^-t/\hbar)}$. En effet, les spineurs d'énergie positive sont associées à l'électron (dans son état de spin $\pm 1/2$), et les spineurs d'énergie négative au positron (ou anti-électron), de spin $\pm 1/2$.

Cette distinction est la source du choix de deux lettres différentes u et v pour décrire les vecteurs propres du système.

6. Dans la limite non relativiste ($c\hbar k \ll mc^2$), on trouve que l'énergie est $E = \pm(mc^2 + \frac{\hbar^2k^2}{2m} + \dots)$. Les vecteurs tendent vers :

$$u^{(1)} \to \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad u^{(2)} \to \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad v^{(1)} \to \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad v^{(2)} \to \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Comme les particules sont largement majoritaires par rapport aux antiparticules, on considère généralement uniquement les deux premiers vecteurs lorsque l'on travaille dans la limite non relativiste : les deux états de spin de l'électron.

7. On désire trouver le lien entre la forme de l'équation de Dirac donnée en 1 :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = (mc^2\beta + c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}})\psi = c(mc\beta - i\hbar\alpha_i\partial_i)\psi. \tag{9}$$

et la suivante :

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\mathbb{1}_4)\psi = 0 \tag{10}$$

On rappelle les propriétés suivantes sur β et α_i : $\beta^2 = \alpha_i^2 = \mathbb{1}_4$, $\{\beta, \alpha_i\} = 0$, $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}$.

On peut donc se rendre compte qu'en multipliant la première équation par β/c, on obtient la deuxième. Dans ce cas, on trouve que $\gamma^0 = \beta$ et $\gamma^i = \beta\alpha_i = \beta\alpha^i$ (α ne fait pas partie d'un quadri-vecteur, on n'a donc pas fait de distinction entre les indices en haut et en bas jusqu'à présent). On rappelle que $\partial_\mu = (\partial_0, \partial_i) = (\frac{1}{c}\partial_t, \partial_i)$

Avec cette notation, on peut maintenant voir très clairement la différence entre les indices d'espace-temps et les éléments du spineur ψ. La matrice qui apparait dans l'équation 10 est invariante de Lorentz, c'est-à-dire invariante sous l'action d'un boost de Lorentz. En effet, le terme $mc\mathbb{1}$ est un scalaire de Lorentz (pas d'indice d'espace temps), et le terme $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu$ est la contraction d'un quadri-vecteur contravariant γ^μ et d'un quadri-vecteur covariant ∂_μ, donc un scalaire également.

Cette matrice est donc un scalaire au sens de Lorentz ! Ce qui devrait finir de vous convaincre que les quatre composantes du spineur n'ont rien à voir avec des composantes spatio-temporelles.

8. Il nous faut enfin prouver les relations d'anticommutation des matrices γ. Il est très facile de les démontrer à partir de celles des matrices β et α_i. En effet,

$$\{\gamma^0, \gamma^0\} = \{\beta, \beta\} = 2\mathbb{1} \tag{11}$$
$$\{\gamma^0, \gamma^i\} = \{\beta, \beta\alpha_i\} = \beta\beta\alpha_i + \beta\alpha_i\beta = \beta\{\beta, \alpha_i\} = 0 \tag{12}$$
$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \{\beta\alpha_i, \beta\alpha_j\} = \beta\alpha_i\beta\alpha_j + \beta\alpha_j\beta\alpha_i = -\beta\beta(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i) = -2\delta^{ij}\mathbb{1} \tag{13}$$

Si l'on définit la métrique de Minkowski comme $(+, -, -, -)$ (**attention, dans l'ancienne version de l'énoncé, la convention était différente**) on trouve bien la relation suivante :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{14}$$

La relation $tr\ \gamma^\mu = 0$ est trivialement vérifiée.