Exercice 1 *Seconde quantification, généralités*

Soit un système composé de N particules sans interactions. Pour $N = 1$, les fonctions d'onde propres du Hamiltonien sont données par $\psi_n : x \to \psi_n(x)$, avec $n \in \mathbb{N}$. Leurs énergies sont notées E_n. On note $a_n^\dagger$ l'opérateur de création associé à ψ_n. $|0\rangle$ est l'état sans particule, d'énergie 0. On représente un état à N particules par les nombres d'occupation N_n, nombre de particules dans l'état n (on a alors $\sum_{n=0}^{\infty} N_n = N$).

1. Ecrire le Hamiltonien en seconde quantification.
2. Exprimer la fonction d'onde normalisée $|\psi\rangle$ en fonction des opérateurs de création et des nombres d'occupation et du ket $|0\rangle$.
3. Donner $\langle x_1, \ldots, x_N|\psi\rangle$ en fonction des ψ_n, des nombres d'occupation N_i et des niveaux occupés n_1, …, n_N, pour des bosons, puis pour des fermions.

Exercice 2 *Cas de l'oscillateur harmonique*

Soit un oscillateur harmonique de pulsation ω dans lequel peuvent se trouver un nombre N quelconque de particules sans spin et de masse m.

1. Ecrire le Hamiltonien grâce aux opérateurs d'impulsion et de position pour N particules.
2. Quelles sont les valeurs des énergies propres E_n du système à une particule ? Réécrire le Hamiltonien en seconde quantification en utilisant l'exercice précédent.
3. Quel est l'énergie de l'état fondamental pour des bosons ? Pour des fermions ?