On considère un système de particules identiques de masse m soumises à un potentiel harmonique unidimensionnel

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{1}$$

Les deux particules n'interagissent pas entr'elles. On rappelle que les énergies propres d'une particule dans un tel potentiel sont données par

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

et on note par $\varphi_n(x)$ les fonctions propres associées supposées normalisées.

Exercice 1 *Particules fermioniques*

On s'intéresse dans cette partie au cas de deux électrons, donc de deux fermions de spin 1/2, et on cherche les fonctions propres à deux particules sous la forme:

$$\psi(x_1, x_2, \sigma_1, \sigma_2) = \varphi(x_1, x_2)\chi(\sigma_1, \sigma_2) \tag{3}$$

1. Quelle est la dimension de l'espace des fonctions $\chi(\sigma_1, \sigma_2)$?
2. On définit dans cet espace les opérateurs P (permutation) et S^z (spin total dans la direction $\hat{z}$) par:

$$\begin{aligned} P\chi(\sigma_1, \sigma_2) &= \chi(\sigma_2, \sigma_1) \\ S^z\chi(\sigma_1, \sigma_2) &= (\sigma_1 + \sigma_2)\chi(\sigma_1, \sigma_2) \end{aligned} \tag{4}$$

   (a) Démontrer qu'on peut diagonaliser P et S^z dans une base commune.

   (b) Démontrer que les quatre fonctions $\chi_{\sigma_1', \sigma_2'}(\sigma_1, \sigma_2) = \eta_{\sigma_1'}(\sigma_1)\eta_{\sigma_2'}(\sigma_2)$ sont des fonctions propres de S^z, et déterminer les valeurs propres associées. On rappelle que la fonction à un spin $\eta_{\sigma'}(\sigma)$ est définie par $\eta_{\sigma'}(\sigma) = \delta_{\sigma,\sigma'}$.

   (c) A l'aide des résultats de la question précédente, déterminer les états propres communs à P et S^z.
3. On revient maintenant au problème de deux électrons dans un potentiel harmonique. Déterminer les trois premiers niveaux d'énergie, leur dégénérescence, et les fonctions propres associées.

Exercice 2 *Particules bosoniques*

On suppose dans cette partie que les particules sont des bosons sans spin.

1. On considère dans cette question le cas de deux bosons. Déterminer les trois premiers niveaux d'énergie, leur dégénérescence, et les fonctions propres associées.
2. On s'intéresse maintenant au cas de trois bosons. Déterminer les deux premiers niveaux d'énergie, leur dégénérescence, et les fonctions propres associées.