Exercice 1 *Perturbation limitée dans le temps*

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'évolution d'un système soumis à une perturbation $\hat{V}(t)$ dont l'effet est limité dans le temps. Plus précisément, on suppose que $\hat{V}(t) = 0$ si $t \leq 0$ ou si $t \geq T$, et que $\hat{V}(t)$ est une fonction continue en $t = 0$ et en $t = T$. On rappelle que si à l'instant t_0 le système est dans un état propre non perturbé $|i\rangle$, la probabilité pour qu'à l'instant $t > t_0$ il soit dans un autre état propre non perturbé $|n\rangle$ est donnée par

$$P_{i\to n} = \left| -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t} dt_1 e^{i(E_n - E_i)(t_1 - t_0)/\hbar} \langle n|\hat{V}(t_1)|i\rangle \right|^2 \tag{1}$$

Par la suite, on suppose que $t_0 < 0$ et $t > T$.

1. Démontrer que $P_{i\to n}$ ne dépend ni de t_0 ni de t.
2. Démontrer que $P_{i\to n}$ est aussi donnée par

$$P_{i\to n} = \left| \frac{1}{E_n - E_i} \int_{0}^{T} dt_1 e^{i(E_n - E_i)t_1/\hbar} \frac{d}{dt_1}(\langle n|\hat{V}(t_1)|i\rangle) \right|^2 \tag{2}$$

3. On considère désormais une perturbation définie par

$$\hat{V}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ \frac{2t}{T}\hat{V} & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ (2 - \frac{2t}{T})\hat{V} & \text{si} \quad \frac{T}{2} \leq t \leq T \\ 0 & \text{si} \quad t \geq T \end{cases} , \tag{3}$$

   où $\hat{V}$ est un opérateur indépendant du temps.

   (a) Calculer $P_{i\to n}$.

   (b) Déterminer les valeurs de T pour lesquelles $P_{i\to n} = 0$.

   (c) On suppose que $\left|\langle n|\hat{V}|i\rangle\right| \leq |E_n - E_i|$. A quelle condition sur T peut-on être sûr que $P_{i\to n} \ll 1$, même sans ajuster T pour que la condition de la question (b) soit satisfaite? Donner une interprétation physique du résultat.

Exercice 2 *Perturbation harmonique*

Considérons une perturbation harmonique de la forme suivante:

$$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ \hat{V}e^{i\omega t} + \hat{V}^\dagger e^{-i\omega t} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases} , \tag{4}$$

où $\hat{V}$ est un opérateur indépendant du temps. On pose $\langle n|\hat{V}|i\rangle = V_{ni}$, $\langle n|\hat{V}^\dagger|i\rangle = V_{in}^*$ et $\hbar\omega_{ni} = E_n - E_i$, où $|i\rangle$ et $|n\rangle$ dénotent des états propres non perturbés aux énergies E_i et E_n.

1. Calculez $P_{i\to n}$ défini dans l'exercice précédent en fonction de V_{ni} et V_{in}^*.

2. En se plaçant dans un régime tel que $t\omega_{ni} \gg 1$, montrez que $P_{i\to n}$ est de la forme

$$\frac{t^2}{\hbar^2}\left(|V_{in}|^2 f\left(\frac{(\omega_{ni}-\omega)t}{2}\right) + |V_{ni}|^2 f\left(\frac{(\omega_{ni}+\omega)t}{2}\right)\right)$$

   Simplifier cette relation en utilisant le fait que

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{\alpha x^2} = \pi\delta(x)$$

   Conclure sur le résultat obtenu.