Exercice 1 *Symétries*

On considère un Hamiltonien H pour un système qui possède certaines symétries. Soient A et B les opérateurs hermitiens dont l'action laisse H invariant, autrement dit

$$[H, A] = [H, B] = 0.$$

Montrer que si $[A, B] \neq 0$, alors il y a obligatoirement des valeurs propres dégénérées parmi les valeurs propres de l'opérateur H.

Indice : un raisonnement par l'absurde pourrait être judicieux

Exercice 2 *Parité*

Chercher les projecteurs P_+ et P_- projetant sur les états représentés par des fonctions respectivement paires et impaires par rapport à l'inversion des coordonnées de la particule. On pourra commencer en cherchant l'action de ces deux opérateurs sur une fonction quelconque.

Exercice 3 *Linéarité et antilinéarité*

A est un opérateur antilinéaire. Est-ce que l'opérateur $A^\dagger A$ est hermitien ?

Exercice 4 *Symétrie continue*

Montrer que

$$e^{iL_x\theta} p_z e^{-iL_x\theta} = p_z \cos\theta + p_y \sin\theta$$

et

$$e^{iL_x\theta} L_z e^{-iL_x\theta} = L_z \cos\theta + L_y \sin\theta$$

Exercice 5 *Oscillateur harmonique perturbé*

Soit
$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \lambda x^4$$
l'Hamiltonien d'un oscillateur armonique faiblement perturbé.

1. Calculer la correction au premier ordre en λ à l'énergie du fondamental.
2. Calculer la correction au premier ordre en λ à la fonction propre correspondante.
3. Soit $\psi(x) = e^{-\alpha x^2}$ une fonction test de paramètre $\alpha > 0$.
   Trouver l'énergie du fondamental par la méthode variationnelle.
   Développer en série l'énergie au premier ordre en λ et comparer avec le résultat obtenu à la question 1.

(On rappelle que $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ *)*

Exercice 6 *Effet Stark - Théorie des perturbations dégénérées*

On considére un atome d'hydrogène plongé dans un champ électrique constant $\mathbf{E}$ (effet Stark). On néglige le spin de l'électron. La perturbation générée par la présence de ce champ est la suivante :
$$V = e\,\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}.$$

Calculer la correction au premier ordre en perturbation de l'énergie des niveaux $n = 1$ et $n = 2$.