Exercice 1 *Généralités sur l'opérateur parité*

L'opération de parité est définie en mécanique classique par la transformation

$$\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$$

En mécanique quantique, on définit l'opérateur parité Π comme

$$\Pi|\mathbf{r}\rangle = |-\mathbf{r}\rangle$$

1. Montrer que $\Pi^2 = \mathbf{1}$.

2. Montrer que l'opérateur Π est unitaire, $\Pi^{-1} = \Pi^\dagger$, et en déduire qu'il est hermitien. Quelles sont les valeurs propres possibles ?

3. Soient $\mathbf{R}$ et $\mathbf{P}$ les opérateurs position et impulsion. Calculer $\Pi^\dagger \mathbf{R} \Pi$ en utilisant que $\mathbf{R}|\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r}|\mathbf{r}\rangle$. Déduire $\Pi^\dagger \mathbf{P} \Pi$ du calcul de $[R_\alpha, \Pi^\dagger P_\beta \Pi]$.

4. Si on définit le moment cinétique $\mathbf{L}$ par $\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$, montrer que $\Pi^\dagger \mathbf{L} \Pi = \mathbf{L}$ et donc que $[\Pi, \mathbf{L}] = 0$.

   On peut maintenant trouver une base commune $\{|\ell, m\rangle\}$ qui diagonalise les opérateurs $\mathbf{L}^2$, L^z et Π, c'est-à-dire telle que

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2\ |\ell, m\rangle &= \hbar^2 \ell(\ell+1)\ |\ell, m\rangle \\ L^z\ |\ell, m\rangle &= \hbar m\ |\ell, m\rangle \\ \Pi\ |\ell, m\rangle &= \pi_{\ell,m}\ |\ell, m\rangle \end{aligned}$$

5. En se servant des opérateurs d'échelles $L^\pm \equiv L^x \pm i\ L^y$, montrer que les valeurs propres de Π sont indépendantes de m et donc on peut utiliser la notation $\pi_{\ell,m} = \pi_\ell$.

6. En vue de trouver les valeurs propres de Π, on se propose de calculer le vecteur $Z|\ell, m\rangle$ (ici, on note $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$). On écrit ce vecteur dans la base des états propres de $\mathbf{L}^2$ et L^z

$$Z|\ell, m\rangle = \sum_{\ell', m'} |\ell', m'\rangle \langle \ell', m'|Z|\ell, m\rangle$$

   Montrer que

$$-\pi_\ell \langle \ell', m'|Z|\ell, m\rangle = \pi_{\ell'} \langle \ell', m'|Z|\ell, m\rangle$$

   En déduire que $\langle \ell, m'|Z|\ell, m\rangle$ est nul.

7. Supposons à partir de maintenant que pour tout ℓ, il existe m' et m tels que

$$\langle \ell+1, m'|Z|\ell, m\rangle \neq 0.$$

   En déduire une expression de π_ℓ en fonction de π_0.

8. Montrer que l'élément de matrice est nul si ℓ' et ℓ sont tous les deux pairs ou impairs.

Exercice 2 *Le tour de* Π

Les questions qui suivent sont sensées vous faire réfléchir sur les propriétés de l'opérateur parité, et vous faire gagner un peu de recul sur la question.

1. Montrer que l'opérateur de parité commute avec l'hamiltonien d'une particule dans un potentiel central $V(\mathbf{r}) = V(r)$.
2. Écrire l'hamiltonien de l'atome d'hydrogène avec couplage spin-orbite. Commute-t-il avec l'opérateur parité ?
3. $H = H(r) + f(r)\mathbf{L} \cdot \mathbf{p}$ commute-t-il aussi ?
4. Soit un hamiltonien H qui commute avec Π. Un état propre de H non-dégénéré a une parité bien définie (*i.e.* est aussi état propre de Π).

   En vous servant de l'hamiltonien de l'atome d'hydrogrène sans couplage, et de ses fonctions propres, trouver un exemple qui montre la nécéssité de la non-dégénérescence dans la proposition ci-dessus (pour commencer, on peut essayer de se convaincre de la justesse de la proposition ci-dessus).

Exercice 3 *Gammes d'anti-unitarité*

On rappelle la définition de l'antilinéarité. Si Θ est antilinéaire, alors:

$$\Theta\left(|\varphi\rangle + |\psi\rangle\right) = \Theta|\varphi\rangle + \Theta|\psi\rangle$$
$$\Theta(c|\varphi\rangle) = c^*\Theta|\varphi\rangle$$

De plus, Θ est anti-unitaire si elle est anti-linéaire et qu'elle vérifie la propriété suivante:

$$\langle\Theta\varphi|\Theta\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle$$

On définit finalement $\Theta^\dagger$

$$\langle\Theta^\dagger\chi|\psi\rangle = \langle\Theta\psi|\chi\rangle$$

Montrer que $\Theta^\dagger\Theta = 1$ si Θ est anti-unitaire et anti-linéaire.

Rappel: une application unitaire K, au contraire, vérifie

$$\langle K\chi|K\psi\rangle = \langle\psi|\chi\rangle^*$$