Exercice 1 *Opérateur de rotation d'un spin 1*

Dans ce problème, on s'intéresse à l'opérateur rotation d'un moment cinétique $l = 1$, dont on se propose de déterminer la forme explicite dans plusieurs cas et de plusieurs façons. Pour simplifier, on posera $\hbar = 1$.

1. On considère un moment cinétique $l = 1$.
   a. Déterminer la forme de la matrice (3×3) qui représente l'opérateur L_x dans la base $(|l = 1, m = 1\rangle, |l = 1, m = 0\rangle, |l = 1, m = -1\rangle)$.
   b. Calculer L_x^2 puis L_x^3.
   c. En déduire que l'opérateur de rotation d'angle α autour de l'axe x peut se mettre sous la forme
   $$\mathcal{R}_{l=1}(\alpha, \hat{x}) = \mathbb{1} + uL_x + vL_x^2$$
   où u et v sont des nombres complexes que l'on déterminera.

2. Nous allons recalculer de façon indépendante l'opérateur $\mathcal{R}_{l=1}(\alpha, \hat{x})$ à partir de l'opérateur rotation d'un spin 1/2.
   a. Démontrer que l'opérateur rotation d'un spin 1/2 d'un angle α autour du vecteur unitaire $\hat{u}$ peut se mettre sous la forme:
   $$\mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha, \hat{u}) = \cos\frac{\alpha}{2}\ \mathbb{1} - i\sin\frac{\alpha}{2}\ \sigma \cdot \hat{u}.$$
   b. Rappeler le résultat général qui permet d'affirmer qu'avec deux spins 1/2, on peut former un moment cinétique $l = 0$ et trois $l = 1$. On rappelle que les états $l = 1$ s'expriment en fonction des états $\uparrow$ et $\downarrow$ des spins 1/2 sous la forme:
   $$|l = 1, m = 1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \quad |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \quad |1, -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$
   c. Appliquer l'opérateur $\mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha, \hat{x}) \otimes \mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha, \hat{x})$ à l'état $|\uparrow\uparrow\rangle$. Exprimer le résultat dans la base des états de moment cinétique total $l = 1$ de deux spins 1/2 définie par $(|\uparrow\uparrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), |\downarrow\downarrow\rangle)$. En déduire la première colonne de la matrice représentant $\mathcal{R}_{l=1}(\alpha, \hat{x})$.
   d. De la même façon, déduire la deuxième et troisième colonne de la matrice représentant $\mathcal{R}_{l=1}(\alpha, \hat{x})$.
   e. Vérifier le résultat à l'aide des résultats de la question 1.

3. Nous allons établir la forme générale de l'opérateur rotation d'un angle α autour d'un vecteur unitaire $\hat{u} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ pour un moment cinétique $l = 1$.

a. Démontrer que l'opérateur $\mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha, \hat{u})$ peut être représenté par une matrice (2×2) de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

où a et b sont des nombres complexes que l'on déterminera.

b. En procédant comme dans la question 2, en déduire la forme générale de la matrice représentant $\mathcal{R}_{l=1}(\alpha, \hat{u})$ en fonction de a et b.

c. Vérifier le résultat dans le cas $(x, y, z) = (1, 0, 0)$, puis dans le cas $\alpha = 2\pi$.