Exercice 1 *Opérateur de rotation d'un spin 1*

1a) La question ici est de savoir quelle est l'action de l'opérateur L_x sur chacun des états de la base que l'on note pour alléger : $|1,1\rangle,\ |1,0\rangle\ |1,-1\rangle$.
On commence par écrire que $L_x = \frac{1}{2}(L^+ + L^-)$, où

$$L^{\pm}\,|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}\,|l,m\pm 1\rangle$$

et on l'applique sur les trois états :

$$L_x|1,1\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{2}|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle$$

$$L_x|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle$$

$$L_x|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle$$

.

Les 3 équations ci-dessus nous donnent, dans l'ordre, les 3 colonnes de la matrice associée à L_x écrite dans la base $\{|1,1\rangle,\ |1,0\rangle\ |1,-1\rangle\}$:

$$L_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1b) On effectue le produit matriciel :

$$L_x^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$L_x^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = L_x\ .$$

On a $L_x^4 = L_x^2$, $L_x^5 = L_x$, $L_x^6 = L_x^2$, donc $L_x^{2p} = L_x^2$ et $L_x^{2p+1} = L_x$ avec p entier.

1c) On développe l'exponentielle $\mathcal{R}_{l=1}(\alpha\hat{x}) = \exp(-i\alpha L_x)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{l=1}(\alpha\hat{x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \alpha^n L_x^n \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2p}}{(2p)!} \alpha^{2p} L_x^{2p} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2p+1}}{(2p+1)!} \alpha^{2p+1} L_x^{2p+1} \\
&= \mathbb{1} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-i)^{2p}}{(2p)!} \alpha^{2p} L_x^{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2p+1}}{(2p+1)!} \alpha^{2p+1} L_x \\
&= \mathbb{1} + L_x^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} \alpha^{2p} + L_x \sum_{p=0}^{\infty} \frac{-i(-1)^p}{(2p+1)!} \alpha^{2p+1} \\
&= \mathbb{1} - iL_x \sin\alpha + L_x^2(\cos\alpha - 1).
\end{aligned}$$

Les coefficients trouvés sont

$$u = -i\sin\alpha \qquad\qquad v = \cos\alpha - 1$$

. 2a) Cette démonstration a été faite en cours (page 107) aux équations (7.31-7.34) .

2b) La composition de deux moments l_1 et l_2 est telle que

$$l_1 \otimes l_2 = |l_1 - l_2| \oplus (|l_1 - l_2| + 1) \oplus \ldots \oplus (l_1 + l_2).$$

Pour $l_1 = l_2 = 1/2$, il vient que l'on ne peut former qu'un moment cinétique $l = 0$ ou 1. L'état $|l = 1, m = 1\rangle$ (complètement polarisé vers le haut) ne peut être formé qu'avec $|\uparrow\uparrow\rangle$. Pour obtenir l'état $|l = 1, m = 0\rangle$ on applique

$$L^-|l = 1, m = 1\rangle = \sqrt{2}|l = 1, m = 0\rangle.$$

Mais sachant que $L^- = L_1^- + L_2^-$,

$$L^-|l = 1, m = 1\rangle = L_1^-|\uparrow\uparrow\rangle + L_2^-|\uparrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle.$$

Il vient donc

$$|l = 1, m = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle.)$$

Le troisième état pourrait s'obtenir en appliquant une fois encore l'opérateur L^-, mais il est plus simple de remarquer, comme on l'a fait précédemment dans le cas de $|l = 1, m = 1\rangle$, que ici, la seule façon d'obtenir l'état $|l = 1, m = -1\rangle$ (complètement polarisé vers le bas) est avec l'état $|\downarrow\downarrow\rangle$.

2c) L'état $|\uparrow\uparrow\rangle$ s'écrit $|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$. Appliquer l'opérateur $\mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha\hat{x}) \otimes \mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha\hat{x})$ sur $|\uparrow\uparrow\rangle$ revient donc à calculer

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha\hat{x})|\uparrow\rangle &= \cos\frac{\alpha}{2}\mathbb{1}|\uparrow\rangle - i\sin\frac{\alpha}{2}\sigma_x|\uparrow\rangle \\
&= \cos\frac{\alpha}{2}|\uparrow\rangle - i\sin\frac{\alpha}{2}|\downarrow\rangle,
\end{aligned}$$

pour un spin, et à effectuer le produit tensoriel

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha\hat{x})|\uparrow\rangle \otimes \mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha\hat{x})|\uparrow\rangle &= \left(\cos\frac{\alpha}{2}|\uparrow\rangle - i\sin\frac{\alpha}{2}|\downarrow\rangle\right) \otimes \left(\cos\frac{\alpha}{2}|\uparrow\rangle - i\sin\frac{\alpha}{2}|\downarrow\rangle\right) \\
&= \cos^2\frac{\alpha}{2}|\uparrow\uparrow\rangle - i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) - \sin^2\frac{\alpha}{2}|\downarrow\downarrow\rangle \\
&= \cos^2\frac{\alpha}{2}|\uparrow\uparrow\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\alpha\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)/\sqrt{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}|\downarrow\downarrow\rangle.
\end{aligned}$$

La première colonne de la matrice représentant $\mathcal{R}_{l=1}(\alpha = \alpha\hat{x})$ s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\alpha \\ -\sin^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} .$$

2d) On commence par calculer l'action de l'opérateur de rotation sur l'état $|\downarrow\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha\hat{x})|\downarrow\rangle &= \cos\frac{\alpha}{2}\mathbb{1}|\downarrow\rangle - i\sin\frac{\alpha}{2}\sigma_x|\downarrow\rangle \\ &= \cos\frac{\alpha}{2}|\downarrow\rangle - i\sin\frac{\alpha}{2}|\uparrow\rangle. \end{aligned}$$

Ensuite on effectue les deux produits tensoriels

$$\mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha\hat{x})|\uparrow\rangle \otimes \mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha\hat{x})|\downarrow\rangle \qquad et \qquad \mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha\hat{x})|\downarrow\rangle \otimes \mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha\hat{x})|\uparrow\rangle$$

pour trouver l'action totale de l'opérateur $\mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha\hat{x}) \otimes \mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha\hat{x})$ sur l'état de singulet $(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$.
On arrive au résultat suivant pour la deuxième colonne de la matrice représentant $\mathcal{R}_{l=1}(\alpha = \alpha\hat{x})$

$$\begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\alpha \end{pmatrix} .$$

Ce calcul est très similaire aux précédents et on arrive à la troisième colonne de la matrice

$$\begin{pmatrix} -\sin^2\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\alpha \\ \cos^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} .$$

2e) Dans la partie 1, on a trouvé que

$$\mathcal{R}_{l=1}(\alpha\hat{x}) = \mathbb{1} - iL_x\sin\alpha + L_x^2(\cos\alpha - 1).$$

En utilisant les expressions trouvées aux questions 1a et 1b pour L_x et L_x^2, on obtient

$$\mathcal{R}_{l=1}(\alpha\hat{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\cos\alpha - 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

soit

$$\mathcal{R}_{l=1}(\alpha\hat{x}) = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\alpha}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\alpha & -\sin^2\frac{\alpha}{2} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\alpha & \cos\alpha & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\alpha \\ -\sin^2\frac{\alpha}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\alpha & \cos^2\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

3a) Comme l'angle de rotation est quelconque, on doit considérer l'expression générale suivante pour l'opérateur de rotation d'un spin 1/2 :

$$\mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha) = \cos\frac{\alpha}{2}\mathbb{1} - i\sin\frac{\alpha}{2}\left(x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z\right).$$

Soit en développant les matrices de Pauli :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha) &= \cos\frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i\sin\frac{\alpha}{2}\left[x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} - iz\sin\frac{\alpha}{2} & -i\sin\frac{\alpha}{2}(x - iy) \\ -i\sin\frac{\alpha}{2}(x + iy) & \cos\frac{\alpha}{2} + iz\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient donc $a = \cos\frac{\alpha}{2} - iz\sin\frac{\alpha}{2}$ et $b = -i\sin\frac{\alpha}{2}(x - iy)$.

3b) On commence par calculer

$$\mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha)|\uparrow\rangle \quad = \quad a|\uparrow\rangle - b^*|\downarrow\rangle,$$

et

$$\mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha)|\downarrow\rangle \quad = \quad a^*|\downarrow\rangle + b|\uparrow\rangle.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha)|\uparrow\rangle \otimes \mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha)|\uparrow\rangle &= a^2|\uparrow\uparrow\rangle + (b^*)^2|\downarrow\downarrow\rangle - ab^*|\uparrow\downarrow\rangle - ab^*|\downarrow\uparrow\rangle \\
\mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha)|\uparrow\rangle \otimes \mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha)|\downarrow\rangle &= ||a||^2|\uparrow\downarrow\rangle - ||b||^2|\downarrow\uparrow\rangle + ab|\uparrow\uparrow\rangle - a^*b^*|\downarrow\downarrow\rangle \\
\mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha)|\downarrow\rangle \otimes \mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha)|\uparrow\rangle &= ||a||^2|\downarrow\uparrow\rangle - ||b||^2|\uparrow\downarrow\rangle + ab|\uparrow\uparrow\rangle - a^*b^*|\downarrow\downarrow\rangle \\
\mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha)|\downarrow\rangle \otimes \mathcal{R}_{l=1/2}(\alpha)|\downarrow\rangle &= (a^*)^2|\downarrow\downarrow\rangle + b^2|\uparrow\uparrow\rangle + a^*b|\uparrow\downarrow\rangle + a^*b|\downarrow\uparrow\rangle.
\end{aligned}$$

La matrice représentant $\mathcal{R}_{l=1}(\alpha)$ prend alors, en fonction de a et b, la forme suivante

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab\sqrt{2} & b^2 \\ -ab^*\sqrt{2} & ||a||^2 - ||b||^2 & a^*b\sqrt{2} \\ (b^*)^2 & -a^*b^*\sqrt{2} & (a^*)^2 \end{pmatrix}$$

3c) On peut vérifier que l'on retrouve bien le résultat trouvé pour la question 2e dans le cas $(x, y, z) = (1, 0, 0)$, avec $a = \cos\frac{\alpha}{2}$ et $b = -i\sin\frac{\alpha}{2}$.
Dans le cas où $\alpha = 2\pi$ on a $a = -1$ et $b = 0$: on fait tourner le spin 1 de 2π, ce qui revient à lui appliquer l'opérateur identité

$$\mathcal{R}_{l=1}(\alpha = 2\pi) = \mathbb{1}.$$

Remarque: Pour spins S demi-entiers on a $\mathcal{R}_S(\alpha = 2\pi) = -\mathbb{1}$. Par exemple, pour $S = 1/2$:

$$\mathcal{R}_{S=1/2}(\alpha = 2\pi\mathbf{x}) = \cos\pi\ \mathbb{1} - i\sin\pi\ \sigma_x = -\mathbb{1}\ .$$