Exercice 1 *Opérateur de translation*

On considère un Hamiltonien avec un potentiel V périodique, de période a :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x),\ V(x+a) = V(x).$$

et un niveau d'énergie E dégénéré deux fois, de fonctions d'onde propres $u_1(x)$ et $u_2(x)$.

1. Quelle équation différentielle satisfait chaque fonction $u_i(x)$?
2. Montrer que $u_i(x+a)$ est aussi une fonction propre de H.
3. On suppose que u_i est vecteur propre de l'opérateur de translation : $Tu_i = \lambda_i u_i$. On définit le Wronskien par $W(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_2(x)u_1'(x)$. Montrer qu'il ne dépend pas de x en vous aidant du point 1.
4. Que peut-on en déduire sur les λ_i ?
5. Donner une condition physique sur les modules des λ_i.
6. Donner l'expression des λ_i en fonction d'un seul paramètre K dont vous préciserez les bornes.
7. Faire le lien avec le théorème de Bloch qui affirme que: "Pour un Hamiltonien périodique, toute fonction propre $u(x)$ peut être mise sous la forme d'une onde plane modulée en amplitude par une fonction $v(r)$ ayant la symétrie de périodicité du réseau."

Exercice 2 *Systèmes ferromagnétiques*

1. Nous considérons un système de deux spins 1/2, avec un hamiltonien $H_{12} = -J\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ (J est un réel positif). Quels sont les niveaux d'énergie et les états propres de cet hamiltonien (cf. série 1)?
2. On considère désormais un système de N spins 1/2 S_i ($i = 1, \ldots, N$) décrit par l'hamiltonien

$$H_N = -J(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{S}_3 + ... + \mathbf{S}_N \cdot \mathbf{S}_1) = -J\sum_{i=1}^{N} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}, \quad J > 0.$$

   où $\mathbf{S}_{N+1} \equiv \mathbf{S}_1$.[1] On désigne par $\{|m_1 m_2 ... m_N\rangle\}$ une base de l'espace de Hilbert total définie par

$$S_i^z|m_1, m_2, ..., m_N\rangle = \hbar m_i|m_1, m_2, ..., m_N\rangle.$$

[1] Ce type d'hamiltonien peut par exemple décrire les interactions entre des atomes de fer.

a. Écrire l'hamiltonien H_N à l'aide des opérateurs S_i^z, S_i^+, S_i^- $(i = 1, ..., N)$.

b. Démontrer que l'état $|F\rangle = |m_1 = 1/2, m_2 = 1/2, ..., m_N = 1/2\rangle \equiv |\uparrow\uparrow \dots \uparrow\rangle$ est un état propre de H_N, et calculer son énergie.

c. En appliquant le résultat de la question 1 aux opérateurs $\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+1}$ $(i = 1, ..., N)$, démontrer que $|F\rangle$ est un état du fondamental.

d. Démontrer que $S_{\text{tot}}^- = \sum_{i=1}^N S_i^-$ commute avec H_N.

e. En déduire que le fondamental est dégénéré, et déterminer sa dégénérescence (minimale). Donner la forme explicite de deux autres états fondamentaux.