

**Exercice 1** *Addition de deux moments cinétiques – Clebsch-Gordan*

Nous considérons deux moments cinétiques  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  avec  $j_1 = 1$  et  $j_2 = \frac{3}{2}$ . On définit

- la base “produit tensoriel”  $\mathcal{B}_1$

$$\mathcal{B}_1 = |j_1 = 1, m_1\rangle \otimes |j_2 = 3/2, m_2\rangle \equiv \{ |m_1 m_2\rangle \}$$

- la base  $\mathcal{B}_2$  du moment cinétique total  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$

$$\mathcal{B}_2 = \{|j_1 = 1, j_2 = 3/2, j, m\rangle\} \equiv \{ |j m\rangle \}$$

1. Quelle est la dimension de l'espace de Hilbert pour ce système ?
2. Quelles sont les valeurs du moment cinétique total  $j$ , que nous obtenons en faisant l'addition de  $\mathbf{J}_1$  et  $\mathbf{J}_2$  ?
3. Dans le plan  $(m_1, m_2)$ , comme vu en cours, tracer les valeurs possibles de  $m_1$  et  $m_2$ , et tracer les lignes  $m = \text{constante}$ .
4. Quelle est la dimension du sous-espace à  $m$  fixé pour chacun des  $m$  possibles ?
5. Calculer les coefficients de Clebsch–Gordan

$$\langle m_1 m_2 | \{j = \frac{5}{2}, m\rangle$$

pour  $-5/2 \leq m \leq 5/2$ .

*Indication:*

- Partir de  $\{ \frac{5}{2}, \frac{5}{2} \}$
  - Faire agir l'opérateur d'échelle  $J^-$  pour obtenir  $\{ \frac{5}{2}, \frac{3}{2} \}$
  - Les recouvrements avec  $\langle m_1 m_2 |$  donnent les coefficients de Clebsch-Gordan.
6. En utilisant la relation d'orthogonalité  $\langle j', m | j, m \rangle = \delta_{jj'}$  exprimer  $\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \}$  dans la base  $\mathcal{B}_1$ .
  7. Calculer les coefficients de Clebsch-Gordan

$$\langle m_1 m_2 | \{j = \frac{3}{2}, m\rangle.$$

pour  $-3/2 \leq m \leq 3/2$ .

8. Calculer les coefficients de Clebsch-Gordan

$$\langle m_1 m_2 | \{j = \frac{1}{2}, m\rangle.$$

pour  $-1/2 \leq m \leq 1/2$ .