Exercice 1 *Addition de deux moments cinétiques – Clebsch-Gordan*

Lorsque l'on considère un système de 2 moments cinétiques J_1 et J_2, on peut toujours regarder ses états de 2 façons différentes :

- dans la base $\mathcal{B}_1$, comme un produit tensoriel entre l'état $|j_1\ m_1\rangle$ du premier moment cinétique et l'état $|j_2\ m_2\rangle$ du second moment cinétique; cet état sera appelé après nôtre nouvelle convention comme $[m_1\ m_2\rangle$.
  Ici la notation $[m_1\ m_2\rangle$ indique les états de la base $\mathcal{B}_1$ des vecteurs propres communs aux opérateurs $\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2, J_{1z}, J_{2z}$ selon

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_1^2\ [m_1\ m_2\rangle &= \hbar^2 j_1(j_1+1)\ [m_1\ m_2\rangle\,, \\
\mathbf{J}_2^2\ [m_1\ m_2\rangle &= \hbar^2 j_2(j_2+1)\ [m_1\ m_2\rangle\,, \\
J_{1z}\ [m_1\ m_2\rangle &= \hbar m_1\ [m_1\ m_2\rangle\,, \\
J_{2z}\ [m_1\ m_2\rangle &= \hbar m_2\ [m_1\ m_2\rangle\,,
\end{aligned}$$

  où $\mathbf{J}_1^2 = {J_{1x}}^2 + {J_{1y}}^2 + {J_{1z}}^2$ et $\mathbf{J}_2^2 = {J_{2x}}^2 + {J_{2y}}^2 + {J_{2z}}^2$.

- dans la base $\mathcal{B}_2$ écrits comme $\{j\ m\rangle$ dans notre convention et vecteurs propres communs aux opérateurs $\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2, \mathbf{J}^2, J_z$. Cette base est mieux indiquée pour étudier les propriétés du système total des deux moments cinétiques. Les valeurs propres pour ces opérateurs sont

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_1^2\ \{j\ m\rangle &= \hbar^2 j_1(j_1+1)\ \{j\ m\rangle\,, \\
\mathbf{J}_2^2\ \{j\ m\rangle &= \hbar^2 j_2(j_2+1)\ \{j\ m\rangle\,, \\
\mathbf{J}^2\ \{j\ m\rangle &= \hbar^2 j(j+1)\ \{j\ m\rangle\,, \\
J_z\ \{j\ m\rangle &= \hbar m\ \{j\ m\rangle\,,
\end{aligned}$$

  où $\mathbf{J}^2 = (\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)^2$ et $J_z = J_{1z} + J_{2z}$.

Les coefficients de Clebsch-Gordan $\langle m_1\ m_2]\,\{j\ m\rangle$, que nous allons calculer ici permettent de passer d'une représentation à l'autre: elles nous permettent d'exprimer les éléments de la base $\mathcal{B}_2$ comme combinaison linéaire des éléments de la base $\mathcal{B}_1$.

1. Pour le moment cinétique $J_1 = 1$, on a $(2\ j_1 + 1) = 2 \times 1 + 1 = 3$ états indépendants caractérisés par $m_1 = -1, 0, 1$; la dimension du sous-espace de Hilbert relatif à J_1 est 3 aussi.
   Pour le moment cinétique $J_2 = \frac{3}{2}$ on a pareillement $(2\ j_2 + 1) = (2 \times \frac{3}{2} + 1) = 4$ états indépendants avec $m_2 = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$; la dimension de ce sous-espace de Hilbert est 4.
   La dimension de l'espace de Hilbert total pour ce système est égale à

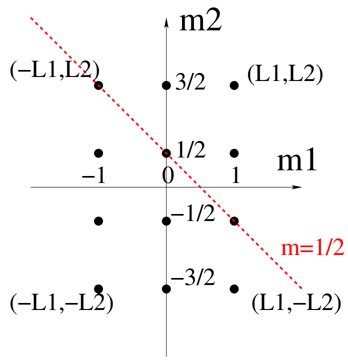
$$(2\ j_1 + 1)(2\ j_2 + 1) = 12$$

   et on a donc besoin de 12 états indépendants pour décrire l'état du système total.

2. D'après le cours, les valeurs du moment cinétique total j, que l'on peut obtenir en faisant l'addition de J_1 et J_2 sont données par

$$|J_1 - J_2| \leq j \leq J_1 + J_2,$$

donc j ne peut être que $j = \frac{1}{2}, j = \frac{3}{2}, j = \frac{5}{2}$, chacun avec ses valeurs pour m compris entre $-j$ et j.



3. La figure représente l'ensemble des 12 états de la base $\mathcal{B}_1$ dans le plan (m_1, m_2). Chaque point correspond à un vecteur du type $[m_1\ m_2\rangle$. Les points (et donc les états) appartenant à la même droite de pente -1 sont caracterisés par la même valeur de $m = m_1 + m_2$. En rouge la ligne pour $m = \frac{1}{2}$ est tracée. Il y aura d'autres en haut pour $m = \frac{3}{2}, m = \frac{5}{2}$ et en bas pour $m = -\frac{1}{2}, m = -\frac{3}{2}, m = -\frac{5}{2}$.

Remarque
Il est facile de le redémontrer. Soit un état $[m_1\ m_2\rangle$ à 2 moments cinétiques avec m la valeur propre de l'opérateur J_z associée. Par définition,

$$J_z\,[m_1\ m_2\rangle = (J_{1z} + J_{2z})\,[m_1\ m_2\rangle$$

D'où

$$m\ \ [m_1\ m_2\rangle = (m_1 + m_2)\,[m_1\ m_2\rangle$$

C'est-à-dire

$$m = m_1 + m_2$$

Ainsi si l'on fixe m, on trouve la relation $m_2 = -m_1 + m$ qui est bien l'équation d'une droite de pente -1 dans le plan (m_1, m_2).

4. La dimension du sous-espace à m fixé est donnée par le nombre de points qui sont sur une même droite de pente -1.

   On a donc seulement un point (ou état) qui correspond à $m = \frac{5}{2}$, deux points à $m = \frac{3}{2}$, trois points à $m = \frac{1}{2}$, trois points à $m = -\frac{1}{2}$, deux points à $m = -\frac{3}{2}$, et finalement un point à $m = -\frac{5}{2}$.

5. Dans cette question, on veut calculer les états $\left\{j = \frac{5}{2}\ m\right\rangle$ de la base $\mathcal{B}_2$ en fonction des états de la base $\mathcal{B}_1$. Commençons par le plus simple : $\left\{\frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\right\rangle$. En effet, cet état a par définition une valeur de $m = \frac{5}{2}$. Or d'après la question précédente, le seul état de $\mathcal{B}_1$ ayant $m = m_1 + m_2 = \frac{5}{2}$ est l'état $\left[1\ \frac{3}{2}\right\rangle$, représenté par le point au sommet

supérieur droit du diagramme. Donc on peut identifier les deux vecteurs (le choix de la phase est arbitraire)

$$\left\{\frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\right\rangle = \left[1\ \frac{3}{2}\right\rangle \tag{1}$$

Passons à $\left\{\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle$. Comme $m = \frac{3}{2}$, d'après la question précédente, sur la figure, il n'y a que 2 points sur la droite correspondant à $m = \frac{3}{2}$. On en déduit que cet état est une combinaison linéaire de $\left[0\ \frac{3}{2}\right\rangle$ et $\left[1\ \frac{1}{2}\right\rangle$.
Pour trouver laquelle, on applique l'opérateur d'échelle J^- à l'état $\left\{\frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\right\rangle$ pour diminuer la valeur de m d'une unité. On effectuera le calcul dans les deux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$ séparément en utilisant les formules

$$J^- \left\{j\ m\right\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\ \left\{j\ m-1\right\rangle \tag{2}$$

pour $\mathcal{B}_2$ et, vu que $J^- = J_1^- + J_2^-$, on a dans la base $\mathcal{B}_1$

$$\begin{aligned} (J_1^- + J_2^-)\ \left[m_1\ m_2\right\rangle &= \hbar\sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)}\ \left[m_1 - 1\ m_2\right\rangle \\ &+ \hbar\sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)}\ \left[m_1\ m_2 - 1\right\rangle . \end{aligned} \tag{3}$$

Maintenant on peut appliquer (**??**) sur le membre de gauche de (**??**) et (**??**) à droite pour trouver l'état $\left\{\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle$ en fonction de $\left[0\ \frac{3}{2}\right\rangle$ et $\left[1\ \frac{1}{2}\right\rangle$. Pour $j = m = \frac{5}{2}$ on a à gauche

$$J^- \left\{\frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\right\rangle = \sqrt{5}\hbar\ \left\{\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle . \tag{4}$$

À droite avec $j_1 = m_1 = 1$, $j_2 = m_2 = \frac{3}{2}$ on trouve

$$(J_1^- + J_2^-)\ \left[1\ \frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{2}\hbar\ \left[0\ \frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{3}\hbar\ \left[1\ \frac{1}{2}\right\rangle \tag{5}$$

Au final, en utilisant l'égalité entre (**??**) et (**??**), on obtient pour $\left\{\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle$

$$\left\{\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\ \left[0\ \frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\ \left[1\ \frac{1}{2}\right\rangle \tag{6}$$

où les nombres

$$\sqrt{\frac{2}{5}} = \left\langle 0\ \frac{3}{2}\right]\left\{\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle \tag{7}$$

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \left\langle 1\ \frac{1}{2}\right]\left\{\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle \tag{8}$$

sont les coefficients de Clebsch-Gordan recherchés.
En continuant le même processus avec les opérateurs d'échelle, nous obtiendrons tous les coefficients pour les vecteurs du multiplet avec $j = 5/2$.
Pour trouver $\left\{\frac{5}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$ nous faisons agir J^- à gauche et à droite de l'éq. (**??**).
À gauche avec $j = \frac{5}{2}$, $m = \frac{3}{2}$ dans l'éq.(**??**)

$$J^- \left\{\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{8}\ \left\{\frac{5}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle \tag{9}$$

À droite de l'éq. (**??**) avec $j_1 = 1$, $m_1 = 0$, $j_2 = m_2 = \frac{3}{2}$ pour le premier vecteur et $j_1 = m_1 = 1$, $j_2 = \frac{3}{2}$, $m_2 = \frac{1}{2}$ pour le second on trouve

$$\begin{aligned}(J_1^- + J_2^-)\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\ \left[0\ \frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\ \left[1\ \frac{1}{2}\right\rangle\right) \quad &= \quad \hbar\ \frac{2}{\sqrt{5}}\ \left[-1\ \frac{3}{2}\right\rangle + \hbar\ \sqrt{\frac{6}{5}}\ \left[0\ \frac{1}{2}\right\rangle \\ &+ \quad \hbar\ \sqrt{\frac{6}{5}}\ \left[0\ \frac{1}{2}\right\rangle + 2\hbar\ \sqrt{\frac{3}{5}}\ \left[1\ -\frac{1}{2}\right\rangle\ .\end{aligned} \tag{10}$$

De l'égalité des éqs. (**??**) et (**??**), nous obtenons

$$\left\{\frac{5}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{10}}\ \left[-1\ \frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}\ \left[0\ \frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}\ \left[1 - \frac{1}{2}\right\rangle\ . \tag{11}$$

Nous obtenons ainsi les trois coefficients de Clebsch-Gordan

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \quad = \quad \left\langle -1\ \frac{3}{2}\right]\left\{\frac{5}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle \tag{12}$$

$$\sqrt{\frac{3}{5}} \quad = \quad \left\langle 0\ \frac{1}{2}\right]\left\{\frac{5}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle \tag{13}$$

$$\sqrt{\frac{3}{10}} \quad = \quad \left\langle 1\ -\frac{1}{2}\right]\left\{\frac{5}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle \tag{14}$$

supplémentaires.

Pour obtenir les expressions des états $|\frac{5}{2}\ m\rangle$ avec m négatif ($m = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$), on peut continuer de la même manière ou penser à utiliser les symétries.

Remarque

Symétrie ou antisymétrie par la transformation $m \to -m$:

Pour chaque couple (j, m), il existe une phase α_{jm} telle que pour tout m_1, m_2,

$$\langle m_1\ m_2]\,\{j\ m\rangle = e^{i\alpha_{jm}}\ \ \langle -m_1\ \ -m_2]\,\{j - m\rangle\,. \tag{15}$$

(preuve : si cette égalité est vérifiée et que $\{j\ m\rangle$ est bien vecteur propre pour les opérateurs $\mathbf{J}^2$ et J^z avec les valeurs propres correspondant à j et m, alors $\{j\ \ -m\rangle$ l'est aussi pour les valeurs propres correspondant à j et $-m$). Comme tous les coefficients de Clebsch-Gordan sont réels, $e^{i\alpha_{jm}} = \pm 1$.

Cette phase ne dépend pas de m mais uniquement de j car dans la formule

$$\hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\ \ \{j\ m-1\rangle\,,$$

on trouve le même coefficient que dans la formule

$$J^+\ \ \{j\ \ -m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\ \ \{j\ \ -m+1\rangle\,.$$

Le plus difficile est maintenant de savoir si $\alpha_j = \pm 1$: c'est au cas par cas (nous en verrons deux).

Ici, les coefficients de Clebsch-Gordan sont symétriques par rapport au changement $m \to -m$: par récurrence, on voit que les coefficients de Clebsch-Gordan sont tous positifs pour $j = \frac{5}{2}$.

Ainsi pour les vecteurs avec m négatif il est suffisant d'envoyer $m_1 \to -m_1$ et $m_2 \to m_2$ dans les éqs. (**??**), (**??**), (**??**)

$$\begin{aligned}
\left\{\tfrac{5}{2}\ -\tfrac{5}{2}\right\rangle &= \left[-1\ -\tfrac{3}{2}\right\rangle \\
\left\{\tfrac{5}{2}\ -\tfrac{3}{2}\right\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{5}}\ \left[0\ -\tfrac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\tfrac{3}{5}}\ \left[-1\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle \\
\left\{\tfrac{5}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle &= \sqrt{\tfrac{1}{10}}\ \left[1\ -\tfrac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\tfrac{3}{5}}\ \left[0\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\tfrac{3}{10}}\ \left[-1\ \tfrac{1}{2}\right\rangle
\end{aligned} \tag{16}$$

6. Nous avons exprimé tous les 6 états du multiplet $\left\{\frac{5}{2}\ m\right\rangle$ dans la base $\mathcal{B}_2$ en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}_1$. Passons maintenant au multiplet avec moment cinétique total $j = \frac{3}{2}$, $\left\{\frac{3}{2}\ m\right\rangle$, qui contient les 4 états correspondant à $m = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$.
Prenons en considŕation $\left\{\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle$ pour commençer. Comme cet état correspond à une valeur de $m = m_1 + m_2 = \frac{3}{2}$, d'après la question 4, il est (comme l'état $\left\{\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle$) une combinaison linéaire des deux états $\left[1\ \frac{1}{2}\right\rangle$ et $\left[0\ \frac{3}{2}\right\rangle$. L'idée de cette question est d'utiliser le fait qu'à partir de ces 2 mêmes vecteurs, on ne peut construire que deux vecteurs (à une phase près) qui soient orthonormés entre eux. Ainsi on doit trouver $\left\{\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle$ en imposant qu'il soit (à une phase près) orthonormal à $\left\{\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle$. On exprime donc $\left\{\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle$ en fonction des 2 états de $\mathcal{B}_1$ correspondant à $m = \frac{3}{2}$

$$\left\{\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle = \alpha\ \left[0\ \frac{3}{2}\right\rangle + \beta \left[1\ \frac{1}{2}\right\rangle .$$

et on impose que le produit scalaire de $\left\{\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle$ et $\left\{\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle$ soit nul. Comme on connaît ce dernier état, on trouve

$$\left\langle\frac{5}{2}\ \frac{3}{2}\right\}\left\{\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle = 0 = \sqrt{\frac{2}{5}}\alpha + \sqrt{\frac{3}{5}}\beta \quad ,$$

ce qui donne $\frac{\alpha}{\beta} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$. En appliquant la condition de normalisation pour l'état $\left\{\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle$, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, et fixant la phase de α à 0, nous obtenons

$$\left\{\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\ \left[0\ \frac{3}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}\ \left[1\ \frac{1}{2}\right\rangle .$$

Remarque
Nous aurions pu choisir une autre phase, par exemple

$$\left\{\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\right\rangle = -\sqrt{\frac{3}{5}}\ \left[0\ \frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}\ \left[1\ \frac{1}{2}\right\rangle .$$

Les coefficients de Clebsch-Gordan appartenant à un sous-espace de j fixé sont définis à une phase près.

7. Pour déterminer l'expression de l'état $\left\{\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$, on utilise la même méthode que celle utilisée à la question 5. On trouve

$$\left\{\frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\ \left[-1\ \frac{3}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}}\ \left[0\ \frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{8}{15}}\ \left[1\ -\frac{1}{2}\right\rangle \ , \tag{17}$$

Quant aux états $|\frac{3}{2}\ m\rangle$ avec $m < 0$, on utilise les symétries. Il faut déterminer si $\alpha_j = \pm 1$ (voir remarque de la question 5). Pour cela, il suffit de remarquer qu'en appliquant J^- à l'équation (**??**), le coefficient de l'état $\left[1\ -\frac{3}{2}\right\rangle$ va être celui de l'état $\left[1\ -\frac{1}{2}\right\rangle$, à un facteur $\hbar\sqrt{\ldots}$ positif près. Il sera donc négatif. On en déduit que cette fois, les coefficients de Clebsch-Gordan sont antisymétriques pour $m \to -m$.

$$\begin{aligned} \left\{\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle &= \sqrt{\tfrac{8}{15}}\ \left[-1\ \tfrac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{15}}\ \left[0\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{5}}\ \left[1\ -\tfrac{3}{2}\right\rangle \\ \left\{\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{3}{2}\right\rangle &= \sqrt{\tfrac{2}{5}}\ \left[-1\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\tfrac{3}{5}}\ \left[0\ -\tfrac{3}{2}\right\rangle \end{aligned} \tag{18}$$

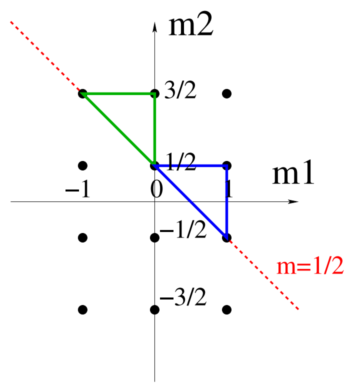
8. Pour résoudre cette question, on va suivre une approche légèrement différente qui s'appuie sur la formule dite du triangle présentée dans les notes de cours. Cette formule a été introduite pour apporter la preuve concise qu'il sera toujours possible de trouver tous les coefficients de Clebsh-Gordan. En pratique cependant, elle est un peu moins intuitive à utiliser.

   Les équations 8.18 et 8.19. des notes de cours détaillent les étapes pour arriver au résultat que l'on va utiliser (celui où l'on applique l'opérateur J^- en sandwich entre deux états des deux différentes bases). En particulier, l'équation à utiliser est la suivante:

$$\begin{aligned} &\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\langle m_1\ m_2]\,\{j\ m\rangle \\ =&\sqrt{j_1(j_1+1)-m_1(m_1-1)}\,\langle m_1-1\ m_2]\,\{j\ m-1\rangle \\ &+\sqrt{j_2(j_2+1)-m_2(m_2-1)}\,\langle m_1\ m_2-1]\,\{j\ m-1\rangle \end{aligned}$$

   On veut trouver les coefficients du ket $\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$. En regardant la formule, on voit qu'il faut donc partir du ket $\left\{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\right\rangle$. L'autre point de départ dans l'application de cette formule est le choix de m_1, m_2 initiaux. Ils sont les points supérieurs droits dans cette formule.

   On considère maintenant les triangles $a1$ (vert) et $a2$ (bleu) dessinés sur la figure **??**.



   Le triangle $a1$ nous demande donc de partir du couple $(m_1 = 0, m_2 = 3/2)$. On a nos deux kets pour le côté gauche de l'équation, on obtient donc:

$$\begin{aligned} \sqrt{\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+1)-\tfrac{3}{2}(\tfrac{3}{2}-1)}\,\left\langle 0\ \tfrac{3}{2}\right]\,\left\{\tfrac{1}{2}\ \tfrac{3}{2}\right\rangle &= \sqrt{1(1+1)-0}\,\left\langle -1\ \tfrac{3}{2}\right]\,\left\{\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle \\ &+\ \sqrt{\tfrac{3}{2}(\tfrac{3}{2}+1)-\tfrac{3}{2}(\tfrac{3}{2}-1)}\,\left\langle 0\ \tfrac{1}{2}\right]\,\left\{\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle \end{aligned} \tag{19}$$

Le terme de gauche est en fait nul, car m ne peut pas être plus grande que le moment cinétique total j. Il ne reste donc que la partie droite de l'égalité qui se simplifie en:

$$\sqrt{2}\left\langle -1\ \frac{3}{2}\right]\left\{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle = -\sqrt{3}\left\langle 0\ \frac{1}{2}\right]\left\{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$$

qui est un rapport de proportionnalité entre deux des trois coefficients recherchés. Le même raisonnement sur le triangle bleu donne l'égalité suivante:

$$\sqrt{2}\left\langle 0\ \frac{1}{2}\right]\left\{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle = -2\left\langle 1\ \frac{-1}{2}\right]\left\{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$$

On a donc un rapport de proportionnalité entre les trois coefficients recherchés. Pour les fixer, il faut encore faire intervenir la normalisation de l'état $\left\{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle$, qui mène à :

$$\left|\left\langle 1\ \frac{-1}{2}\right]\left\{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle 0\ \frac{1}{2}\right]\left\{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle -1\ \frac{3}{2}\right]\left\{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle\right|^2 = 1.$$

Grâce à ces trois équations, on trouve (à une phase globale près):

$$\begin{array}{rcl} \left\langle 1\ \frac{-1}{2}\right]\left\{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle & = & \sqrt{\frac{1}{6}} \\ \left\langle 0\ \frac{1}{2}\right]\left\{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle & = & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \left\langle -1\ \frac{3}{2}\right]\left\{\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right\rangle & = & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{array} \tag{20}$$

Il est important de remarquer que le principe physique qui permet de conclure est le même, on a encore besoin de la notion d'orthonormalité de la base d'arrivée, sans laquelle il manque une équation. Cette méthode sera en pratique moins utilisée, car étant un peu moins intuitive (et systématique en pratique) à appliquer.