Exercice 1 *Révisions sur les opérateurs unitaires et hermitiens*

1. Montrer que l'opérateur d'évolution dans le temps $U_t = e^{-i\widehat{H}t/\hbar}$ est unitaire. Qu'est-ce que cela implique pour la normalisation de la fonction d'onde ?
2. Montrer que l'opérateur impulsion $\widehat{p}_x$ est hermitien. Qu'en est-il pour $\widehat{\mathbf{p}}$?
3. Est-ce que l'opérateur $\frac{d}{dx}$ est hermitien ?
4. Est-ce que l'opérateur $\frac{d^2}{dx^2}$ est hermitien ?
5. Vérifier qu'un Hamiltonien avec un potentiel réel est hermitien.

Exercice 2 *Produit tensoriel de deux spins $\frac{1}{2}$*

Nous considérons un système composé de deux spins $\frac{1}{2}$: $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$.

1. Rappeler la forme matricielle des opérateurs S_1^x, S_1^y et S_1^z, dans l'espace de Hilbert du spin S_1. Faire de même pour le spin S_2. On choisira dans les 2 cas l'axe z comme direction de quantification.
2. Quelle est la dimension de l'espace de Hilbert du système total composé par les 2 spins ? Donner une base $\mathcal{B}$ de cet espace.
3. On considère maintenant l'action des opérateurs $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ dans la base $\mathcal{B}$. On rappelle que, par extension, on définit dans cette base les opérateurs $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ tels que

$$\mathbf{S}_1 \equiv \mathbf{S}_1 \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}_2} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_2 \equiv \mathbb{1}_{\mathcal{B}_1} \otimes \mathbf{S}_2$$

avec $\mathbb{1}_{\mathcal{B}_i}$ l'opérateur identité dans la base $\mathcal{B}_i$. $\mathbf{S}_1$ agit sur le spin 1 comme le ferait $\mathbf{S}_1$ et sur le spin 2 comme l'identité, et $\mathbf{S}_2$ sur le spin 2 comme $\mathbf{S}_2$ et sur le spin 1 comme l'identité. Ainsi

$$\mathbf{S}_1 | \downarrow\uparrow\rangle = (\mathbf{S}_1 \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}_2})(| \downarrow\rangle \otimes | \uparrow\rangle) = \mathbf{S}_1 | \downarrow\rangle \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{B}_2} | \uparrow\rangle$$

$$\mathbf{S}_2 | \uparrow\downarrow\rangle = (\mathbb{1}_{\mathcal{B}_1} \otimes \mathbf{S}_2)(| \uparrow\rangle \otimes | \downarrow\rangle) = \mathbb{1}_{\mathcal{B}_1} | \uparrow\rangle \otimes \mathbf{S}_2 | \downarrow\rangle$$

Donner la forme matricielle des opérateurs S_i^x, S_i^y et S_i^z $(i = 1, 2)$ dans la base $\mathcal{B}$.
4. On définit l'opérateur de spin total $\mathbf{J} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$. Donner la matrice représentant $\mathbf{J}^2$ dans la base $\mathcal{B}$.
5. Diagonaliser l'opérateur $\mathbf{J}^2$. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres. En déduire les valeurs propres de l'opérateur $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$.
6. Déterminer l'action des opérateurs suivants sur les vecteurs propres de $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$:

$$\begin{cases} P_\mathrm{t} &= \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 + \frac{3}{4}\hbar^2 \\ P_\mathrm{s} &= \frac{1}{4}\hbar^2 - \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \\ P_\mathrm{e} &= \frac{1}{2}\hbar^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \end{cases}$$

7. On introduit les opérateurs $N_\uparrow$ et $N_\downarrow$, qui comptent le nombre de spin *up* (respectivement *down*) dans une configuration donnée.

   Exprimer l'opérateur $J^z = S_1^z + S_2^z$, qui représente la composante du spin total suivant l'axe z, en fonction de $N_\uparrow$ et $N_\downarrow$.

8. Écrire $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ en fonction de $S_1^z, S_2^z, S_1^+, S_1^-, S_2^+, S_2^-$.

   Montrer que $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ conserve $N_\uparrow$, $N_\downarrow$ et J^z.