Exercice 24. Accrochage des fréquences

On considère l'application du cercle :

$$f(\theta) = \theta + \Omega - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta \pmod 1$$

$$0 \leq \Omega \leq 1,\ k \geq 0$$

1. Calculer les points fixes θ_0 de f et leur stabilité (considérer le cas $k < 1$). Dessiner f pour différentes valeurs de Ω.

2. Représenter dans le plan (Ω, k) les régions telles que f admette un point fixe θ_0 et les régions telles que $f'(\theta_0) = 1$.

3. Montrer que le nombre de rotation

$$\hat{\Omega} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (\theta_{j+1} - \theta_j)$$

est égal à 0 ou 1 s'il existe un point fixe stable.

4. Calculer $f^2(\theta)$ à l'ordre 2 en k. Quel est le domaine de $\omega = \Omega - \frac{1}{2}$ pour lequel il existe une solution de $f^2(\theta) = \theta + 1$?