Phénomènes Non-Linéaires et Chaos I

Exercices 2008

Série 1. Fonctions Génératrices

Exercice 1. Billard (Stade de Bunimovich)

Soit une application $T: (x_n, y_n) \mapsto (x_{n+1}, y_{n+1})$. On appelle *fonction génératrice* de T une fonction C^1 $G(x_n, x_{n+1})$ telle que

$$\frac{\partial G}{\partial x_n} = y_n, \quad \frac{\partial G}{\partial x_{n+1}} = -y_{n+1}.$$

On considère un billard dans $\mathbb{R}^2$, de bord $\partial Q = \{(X(s), Y(s)), 0 \leq s \leq L\}$, où s est l'abscisse curviligne, $ds^2 = dX^2 + dY^2$. On paramétrise le n-ème choc avec le bord par son abscisse curviligne s_n, et par $u_n = -\cos\theta_n$, où θ_n est l'angle entre le bord et la vitesse après le choc (Fig. 1.7 du cours).

Montrer que la longueur de la corde $\ell(s_n, s_{n+1})$ est une fonction génératrice de l'application $T: (s_n, u_n) \mapsto (s_{n+1}, u_{n+1})$.

Exercice 2. Dynamique hamiltonienne

1. On considère la transformation infinitésimale suivante sur l'espace de phase Γ :

$$Q_k = q_k + \delta q_k \qquad P_k = p_k + \delta p_k \quad , \quad 1 \leq k \leq N$$

avec $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_N)$, $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_N)$ les anciennes coordonnées et moments généralisés et $\boldsymbol{Q} = (Q_1, \ldots, Q_N)$, $\boldsymbol{P} = (P_1, \ldots, P_N)$ les nouvelles. Trouver d'abord une fonction génératrice $W_2^0(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P})$ associée à la transformation triviale, puis écrire celle pour la transformation infinitésimale ci-dessus sous la forme

$$W_2(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) = W_2^0(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P}) + \varepsilon G(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{P})\,.$$

Donner ensuite l'expression de δp_k et δq_k ($1 \leq k \leq N$) en fonction de G.

2. Appliquer ceci à une transformation canonique infinitésimale donnée par W_2 où $G = H$ ($H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ étant l'hamiltonien du système considéré) et $\varepsilon = dt$ un intervalle de temps infinitésimal. En déduire que l'évolution du système pendant dt – et donc aussi l'évolution finie de $t = t_0$ à $t = t_1$. – peut être décrite par une transformation canonique infinitésimale générée par H.

Série 2. EDPs et EDOs

Exercice 3. Convection de Rayleigh-Bénard et modèle de Lorenz

On considère les équations de l'hydrodynamique appliquées à la convection de Rayleigh-Bénard : Navier-Stokes

$$\frac{1}{\sigma}\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = \Delta\boldsymbol{v} - \nabla p + \theta\hat{\boldsymbol{z}},$$

diffusion,

$$\frac{D\theta}{Dt} = \Delta\theta + Rv_z$$

et continuité

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

avec $\frac{D}{Dt} = \partial_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla$, σ, et $R > 0$. On définit les fonctions

$$\begin{aligned}
\psi(x,z) &= \sqrt{2}\frac{C}{\pi q}X(t)\cos\pi z\sin qx,\\
\theta(x,z) &= \sqrt{2}\frac{C^3}{\pi q^2}Y(t)\cos\pi z\cos qx + \frac{C^3}{\pi q^2}Z(t)\sin 2\pi z,
\end{aligned}$$

où $C = \pi^2 + q^2$, $q > 0$.

1. Vérifier que l'équation de continuité est satisfaite si l'on pose

$$\boldsymbol{v}(x,z) = (-\partial_z\psi, \partial_x\psi).$$

Montrer que la vitesse est tangente aux lignes $\psi =$ constante. Interpréter la grandeur ψ. (*Indication :* calculer le rotationnel de $\boldsymbol{v}$.)

2. En oubliant les harmoniques supérieures, calculer $\dot{X}$ et $p(x,z)$ à partir de l'équation de Navier-Stokes.

3. Calculer $\dot{Y}$ et $\dot{Z}$ à partir de l'équation de diffusion de la chaleur.

Série 3. Systèmes conservatifs, dissipatifs

Exercice 4. Formes canoniques

Ecrire les équations suivantes sous la forme canonique.

1.

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - \frac{dV(x)}{dx}.$$

2.

$$\begin{cases} \ddot{x} &= ax\cos(\omega t) - Ax(x^2+y^2) \\ \ddot{y} &= by\sin(\omega t) - Ay(x^2+y^2). \end{cases}$$

Exercice 5. Equation de Liouville

Les systèmes suivants sont-ils conservatifs ? dissipatifs ?

1. Le pendule amorti

$$\ddot{\theta} = -\alpha\dot{\theta} - \sin\theta.$$

2. Modèle de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{X} &= \sigma(Y-X) \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} &= XY - bZ. \end{cases}$$

3. Application standard

$$\begin{cases} y_{n+1} &= y_n - \frac{k}{2\pi}\sin(2\pi x_n) \\ x_{n+1} &= x_n + y_{n+1} \end{cases} \pmod 1.$$

4. Application de Hénon

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 1 - \mu x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n. \end{cases}$$

5. Application du chat d'Arnold

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n \pmod 1 \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n \pmod 1. \end{cases}$$

6. Flot hamiltonien

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \\ \dot{p}_i &= -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, n, \quad H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}).$$

Exercice 6. Systèmes conservatifs et dissipatifs

Soit M un domaine de l'espace de phase. Soit $V(t)$ le volume de son image par le flot $U_t(M)$, démontrez la formule 2.6 du cours

$$\frac{dV}{dt}(t) = \int_{U_t(M)} \operatorname{div} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

Série 4. Points fixes, linéarisation

Exercice 7. Systèmes dynamiques linéaires

Soit le système dynamique linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & x, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

avec conditions initiales $x(0) = x_0,\ y(0) = y_0$.
Résoudre explicitement ce système d'équations.

Exercice 8. Modèle de Lorenz (Première partie)

On considère le modèle de Lorenz

$$\begin{cases} \dot{x} & = & \sigma(y - x) \\ \dot{y} & = & -xz + rx - y \\ \dot{z} & = & xy - bz \end{cases}$$

$$b > 0,\ \sigma > 0,\ r > 0$$

1. Calculer les points d'équilibre.

2. Linéariser l'équation autour de ces points d'équilibre. Donner la dimension des variétés stable, instable et centrale.

Exercice 9. Pendule amorti

Soit l'équation $\ddot{\Theta} = -\alpha\dot{\Theta} - sin\Theta$.

1. Calculer les points d'équilibre du système.

2. Linéariser l'équation autour de ces points d'équilibre.

3. Résoudre le système et dessiner l'espace de phase correspondant.

Série 5. Points fixes et linéarisation

Exercice 10. Application logistique

On considère l'application logistique :

$$f(x) = \lambda x(1-x),$$

$$0 \leq x \leq 1,\ 0 < \lambda \leq 4.$$

1. Calculer les points fixes de l'application.

2. Linéariser l'application autour de ses points fixes et discuter leur stabilité.

3. Calculer les points fixes de $f^2(x) = f(f(x))$.

4. Reporter sur un diagramme les points fixes en fonction de λ.

Exercice 11. Application standard

On considère l'application standard

$$(x_n, y_n) \xmapsto{T} (x_{n+1}, y_{n+1}),$$

où

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_{n+1} & = & y_n - \frac{k}{2\pi}\sin(2\pi x_n) \\ x_{n+1} & = & x_n + y_{n+1} \end{array} \right. \qquad \pmod 1,$$

avec $k \geq 0$.

1. Chercher les points fixes de l'application.

2. écrire l'application linéarisée autour de ces points. Discuter la stabilité linéaire.

Série 6. Fonction de Liapunov, variété centrale

Exercice 12. Modèle de Lorenz (Deuxième partie)

On considère le modèle de Lorenz

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \sigma(y-x) \\ \dot{y} & = & -xz + rx - y \\ \dot{z} & = & xy - bz \end{array} \right.$$

avec b, σ, $r > 0$.

1. En utilisant $V = \frac{1}{2}(rx^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2)$ comme fonction de Liapunov, trouver des conditions suffisantes sur les paramètres pour que l'origine soit un point d'équilibre asymptotiquement stable (non–linéairement et globalement).

2. Dans le cas $r = 1$:

a Ecrire un changement de variables (linéaire) $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$ qui diagonalise l'équation linéarisée autour de l'origine. Ecrire l'équation *non–linéaire* dans ces variables.

b Calculer l'équation de la variété centrale de l'origine dans l'approximation adiabatique. Discuter le mouvement sur cette variété et la stabilité de l'origine.

Série 7. Fonctions de Liapunov

Exercice 13. Pendule amorti (suite)

Soit l'équation du mouvement du pendule amorti

$$\ddot{\theta} = -\alpha\dot{\theta} - \sin\theta,$$

$$\theta \in S^1, \quad \alpha \geq 0.$$

L'énergie est donnée par

$$E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos\theta.$$

1. Montrer que lorsque $\alpha = 0$, l'énergie est une constante du mouvement. L'origine est-elle stable ?

2. En utilisant l'énergie comme fonction de Liapunov, que peut-on déduire sur la stabilité de l'origine lorsque $\alpha > 0$?

3. Montrer que l'origine est asymptotiquement stable lorsque $\alpha > 0$ en utilisant une fonction de Liapunov de la forme $V(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \beta\dot{\theta}\sin\theta + \gamma\cos\theta\right)$. (*Indication :* annuler le terme en $\dot{\theta}\sin\theta$ de $\dot{V}$.)

Exercice 14. Modèle de Volterra

On considère le modèle de Volterra :

$$\begin{cases} \dot{x} &= & k_1\, x\, (1 - y) \\ \dot{y} &= -& k_2\, y\, (1 - x), \end{cases}$$

avec $k_1, k_2 > 0$, $x, y \geq 0$.

1. Chercher les points d'équilibre et donner leur nature.

2. Montrer qu'il existe deux fonctions $u(x)$ et $v(y)$ dont le produit est constant sur toute trajectoire. *Indication :* calculer $\frac{dy}{dx}$ et séparer les variables.

3. Représenter graphiquement les fonctions $v(u)$, $v(y)$, $x(u)$ et $x(y)$. En déduire que toutes les orbites ne passant pas par les axes $xy = 0$ sont périodiques.

4. Calculer les valeurs moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$. *Indication :* intégrer $\frac{\dot{x}}{x}$ sur une période.

Série 8. Théorie de Floquet

Exercice 15. Equation de Hill

On considère un oscillateur dont la fréquence varie périodiquement :

$$\ddot{x} = -\omega^2(t)x$$

$$\omega^2(t) = \begin{cases} \Omega^2 & \text{si} \quad nT < t < (n+\frac{1}{2})\,T \\ 1 & \text{si} \quad (n+\frac{1}{2})\,T < t < (n+1)\,T \end{cases}$$

$$\Omega > 1,\ T > 0,\ n \in \mathbb{Z}$$

1. Ecrire l'équation sous la forme d'un système d'EDO du premier ordre pour les variables $(x, y = \dot{x})$, ainsi que sous la forme d'un système d'EDO autonomes pour les variables $(x, y, z = \frac{2\pi}{T}t)$.

2. Calculer (x_T, y_T) en fonction de (x_0, y_0). Quel est le jacobien de cette application ? *Indication :* calculer d'abord $(x_{T/2}, y_{T/2})$.

1. Calculer les multiplicateurs de Floquet et discuter la stabilité de l'origine. Représenter graphiquement la stabilité en fonction de Ω lorsque $T = \pi$. *Rappel :* les valeurs propres d'une matrice 2×2 peuvent être exprimées à l'aide de son déterminant et de sa trace.

Série 9. Bifurcations

Exercice 16. Formes normales

1. Soit l'équation sur la variété centrale de dimension 1

$$\dot{x} = f(x, \epsilon) = a_0(\epsilon) + a_1(\epsilon)x + a_2(\epsilon)x^2 + \cdots$$

Sous quelles conditions sur les $a_i(\epsilon)$ le point $(x, \epsilon) = (0, 0)$ est–il un point de bifurcation ?

2. On considère les cas particuliers suivants :

a $f(x,\epsilon) = \epsilon^2 + \epsilon x - x^2$

b $f(x,\epsilon) = \epsilon + \epsilon^2 x - x^2$

c $f(x,\epsilon) = -\epsilon^2 + \epsilon x + \epsilon x^2 - x^3$

d $f(x,\epsilon) = \epsilon x + \epsilon x^2 - x^4$

Le but est de calculer les formes normales correspondantes.

a Effectuer, si possible, un changement de variable $x = y + \alpha(\epsilon)$ qui élimine le terme constant a_0 (α doit être différentiable autour de l'origine !).

b Effectuer, si possible, un changement de variable $y = z + \beta(\epsilon)z^k$, $k = 2, 3, \ldots$, qui éliminent les termes linéaire, quadratique, etc.

3. Déterminer les points fixes et leur stabilité pour les formes normales obtenues. Dessiner les diagrammes de bifurcation dans les variables normales et dans les variables originales.

Exercice 17. Transitions de phases

1. Soit le système dynamique

$$\frac{\mathrm{d}T(l)}{\mathrm{d}l} = -\epsilon T(l) + \frac{(n-2)}{2\pi} T^2(l),$$

où $\epsilon = d - 2 > 0,\ n > 2$.

a Ecrire l'équation sous forme normale ;

b Déterminer les points fixes du système et leur stabilité en fonction de ϵ.

2. Soit le système dynamique

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}T(l)}{\mathrm{d}l} &= -\epsilon T(l) + \frac{(n-2)}{2\pi} \frac{T^2(l)}{1+h(l)} \\ \frac{\mathrm{d}h(l)}{\mathrm{d}l} &= 2h(l) + \frac{(n-3)}{4\pi} \frac{h(l)T(l)}{1+h(l)}, \end{aligned}$$

où $\epsilon = d - 2 > 0,\ \epsilon << 1,\ n > 3$.

a Déterminer les points fixes en fonction de ϵ ;

b Linéariser autour de ces points fixes ;

c Etudier la stabilité de ces points fixes.

Série 10. Bifurcations de Hopf

Exercice 18. Oscillateur de Van der Pol

On considère l'oscillateur de Van der Pol :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + \epsilon x - \frac{x^3}{3} \\ \dot{y} &= -x. \end{cases}$$

1. Etudier la nature de l'origine en fonction de ϵ.

2. Effectuer un changement de variables $z = ax + by,\ z \in \mathbb{C}$, tel que l'équation devienne

$$\dot{z} = \lambda z + g(z, \bar{z}),$$

où g est un polynôme d'ordre $k \geq 2$.

3. Effectuer un changement de variables $z = \omega + h(\omega, \bar{\omega})$, avec h un polynôme homogène de degré k, tel que l'équation devienne

$$\dot{\omega} = \lambda\omega + g'(\omega, \bar{\omega}),$$

où g' a le moins possible de termes de degré k.

4. Etudier l'existence et la stabilité d'orbites périodiques en posant $\omega = re^{i\varphi},\ \lambda = |\lambda|\, e^{i\theta}$, etc ….

Série 11. Bifurcations dans les applications

Exercice 19. Bifurcations

Soit l'équation sur la variété centrale

$$\dot{x} = f(x, \epsilon) = \epsilon - x^3.$$

Cette équation est déjà dans sa forme normale.

1. Le point $(x, \epsilon) = (0, 0)$ satisfait-il les conditions d'un point de bifurcation ?

2. Déterminer le(s) point(s) fixe(s) $x_0(\epsilon)$. Etudier leur stabilité.

3. Le point $(x, \epsilon) = (0, 0)$ est-il un point de bifurcation ? N'y a-t-il pas de contradiction ? Expliquer.

Exercice 20. Application logistique

Soit l'application logistique

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, \lambda) \\ f(x, \lambda) &= \lambda\, x\, (1-x) \\ \lambda &\in [0, 4] \end{aligned}$$

1. Trouver les points fixes $x^*(\lambda)$ et les points de bifurcation $(x^*(\lambda^*), \lambda^*)$ (*cf* exercice 4).
Calculer les formes normales des bifurcations :

a Poser $x = x^*(\lambda) + y$ et calculer y_{k+1} en prenant $\lambda = \lambda^* + \epsilon$.

b Eliminer si possible le terme quadratique par un changement de variable approprié.

2. Etudier les formes normales obtenues : points fixes, stabilité, orbites de période 2 …

Série 12. Route sous–harmonique

Exercice 21. Renormalisation

On considère la famille à un paramètre d'applications

$$f_a(x) = 1 - ax^2$$

$$-1 \leq x \leq 1,\ 0 < a < 2$$

1. Calculer la dérivée schwartzienne de f_a.

2. On approche l'application de second retour $f_a^2(x)$ par une fonction polynômiale $f_a^{(2)}(x)$, du deuxième degré en x. Déterminer σ et $R(a)$ de manière que

$$\frac{1}{\sigma} f_a^{(2)}(\sigma x) = f_{R(a)}(x)$$

3. On définit la transformation de renormalisation

$$(Tf_a)(x) = f_{R(a)}(x)$$

Calculer le point fixe instable de T. Linéariser T autour de ce point fixe. En déduire des estimations des nombres δ et α.

Série 13. Codimension, quasi-périodicité

Exercice 22. Codimension

Soient les systèmes dynamiques suivants :

1.

$$\begin{cases} \dot{x} &= f_1(x, y; \mu_1, \mu_2) = (\mu_1 + \mu_2)x \\ \dot{y} &= f_2(x, y; \mu_1, \mu_2) = \mu_1 x + y. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} \dot{x} &= f_1(x, y; \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\mu_1 + \mu_2)x \\ \dot{y} &= f_2(x, y; \mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\mu_3 - \mu_1^2)y. \end{cases}$$

Pour chacun de ces systèmes,

1. Déterminer la codimension.

2. Déterminer le point de bifurcation en fonction des paramètres. Esquisser la ligne de points de bifurcation dans l'espace des paramètres.

3. En déduire combien de paramètres il est nécessaire de modifier pour observer de manière générique la bifurcation.

Exercice 23. Quasi-périodicité

Considérer le système dynamique linéaire

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x},$$

où $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$, et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Ce système est-il conservatif ?

2. Déterminer le point fixe, linéariser autour de ce point et déterminer sa stabilité.

3. Résoudre explicitement l'équation avec les conditions initiales $\boldsymbol{x}_0 = (0, \alpha, 0, \alpha)$.

4. Considérer le plan généré par les vecteurs de base $\boldsymbol{x}_1$ et $\boldsymbol{x}_2$ comme une section de Poincaré. Esquisser cette section.

5. L'orbite obtenue au point 3 est-elle une trajectoire périodique ? Utiliser le résultat obtenu au point 4.