Exercice 16

$$F : S^1 \longrightarrow S^1$$
$$\theta \longmapsto \theta + \Omega - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta \qquad k \geq 0$$

Remarquons que $F'(\theta) = 1 - k\cos 2\pi\theta$,
donc si $k < 1$, F est strictement croissante et inversible.
En fait, c'est le domaine $0 \leq k < 1$ qui est particulièrement intéressant pour le phénomène d'accrochage des fréquences.

1) Points fixes : solutions de $F(\theta_0) = \theta_0 + p \quad , \; p \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \Omega - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi\theta_0 = p$$

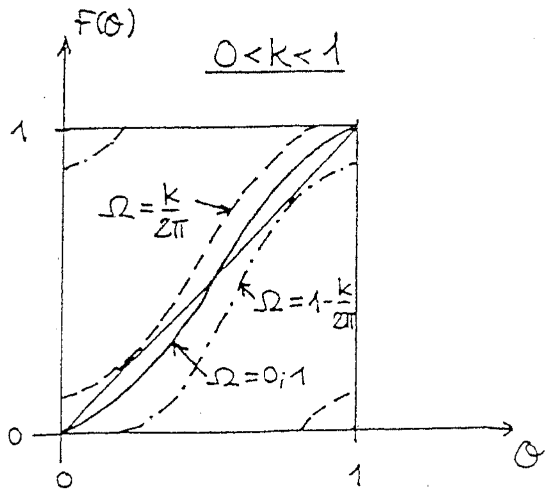
$$\Rightarrow \boxed{\sin(2\pi\theta_0) = \frac{2\pi(\Omega - p)}{k}}$$

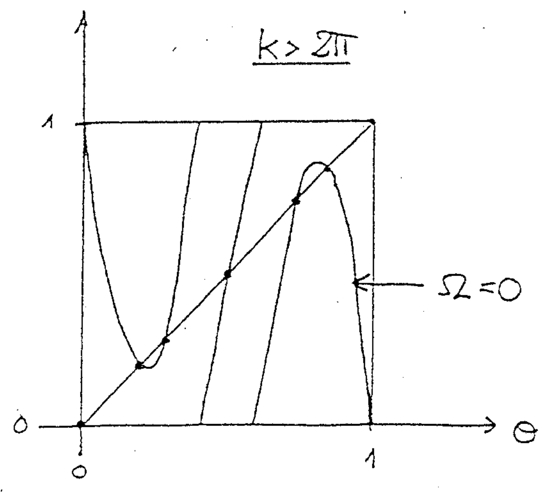
Il existe des solutions si $\left|\frac{2\pi(\Omega-p)}{k}\right| \leq 1 \iff \boxed{|\Omega - p| \leq \frac{k}{2\pi}}$

Comme $p \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in S^1$, on peut se restreindre aux $\Omega \in [0, 1]$.
Dans le domaine qui nous intéresse, $k < 1 < \pi$. On a donc deux pts fixes

$$\begin{cases} \theta_0 = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arc\,sin} \frac{2\pi\Omega}{k} \, , \; \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arc\,sin} \frac{2\pi\Omega}{k} & \text{si } 0 \leq \Omega \leq \frac{k}{2\pi} \\ \theta_0 = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arc\,sin} \frac{2\pi(\Omega-1)}{k} \, , \; \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arc\,sin} \frac{2\pi(\Omega-1)}{k} & \text{si } 1 - \frac{k}{2\pi} \leq \Omega \leq 1 \end{cases}$$

Si $k > 2\pi$, on peut avoir d'autres solutions correspondant à d'autres valeurs de p que 0 et 1.





Les dessins montrent que si $0 < k < 1$, il y a une solution stable et une instable, qui disparaissent par bifurcation noeud-col lorsque $\Omega = \frac{k}{2\pi}$ ou $\Omega = 1 - \frac{k}{2\pi}$. En effet, on a

$$F'(\theta_0) = 1 \Rightarrow \cos 2\pi\theta_0 = 0$$
$$\Rightarrow \theta_0 = \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}$$
$$\Rightarrow \sin 2\pi\theta_0 = \pm 1$$
$$\Rightarrow \Omega - p = \pm \frac{k}{2\pi}$$

Les points fixes ne se déstabilisent donc par bifurcation noeud-col que sur les bords des domaines d'existence de points fixes. Si $k<1$, on a toujours $F'(\theta) > 0$, c'est donc la seule bifurcation possible.

Si $k \geq 2$, par contre, il peut également y avoir des bifurcations sous-harmoniques :

$$F'(\theta_0) = -1 \Rightarrow k \cos 2\pi\theta_0 = 2$$
$$\Rightarrow \sin 2\pi\theta_0 = \pm\sqrt{1-\left(\tfrac{2}{k}\right)^2}, \quad \cos 2\pi\theta_0 > 0$$
($\Rightarrow$ une solution sur deux est toujours instable)
$$\Rightarrow \Omega - p = \pm \frac{k}{2\pi}\sqrt{1-\left(\tfrac{2}{k}\right)^2}$$
$$\Rightarrow k = 2\sqrt{1+\pi^2(\Omega-p)^2}$$

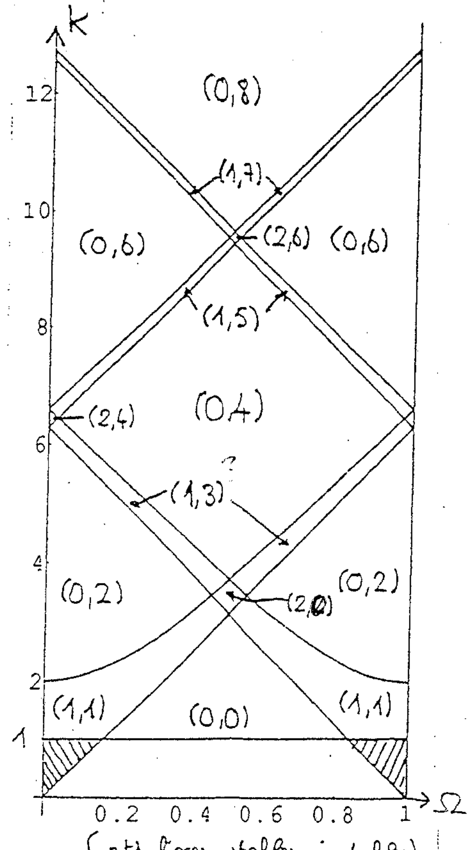
2) En résumé, on a :

<u>$0<k<1$</u> : (le domaine qui nous intéresse)
Un pt fixe stable et un instable si $0 \leq \Omega < \frac{k}{2\pi}$ ou $1-\frac{k}{2\pi} < \Omega \leq 1$, aucun pt fixe si $\frac{k}{2\pi} < \Omega < 1 - \frac{k}{2\pi}$

<u>$1 \leq k < 2$</u> : L'application n'est plus inversible, le nombre de points fixes est inchangé.

<u>$k>2$</u> : Le pt fixe stable devient instable par bif. sous-harmonique si $k > 2\sqrt{1+\pi^2\Omega^2}$ ou si $k > 2\sqrt{1+\pi^2(\Omega-1)^2}$

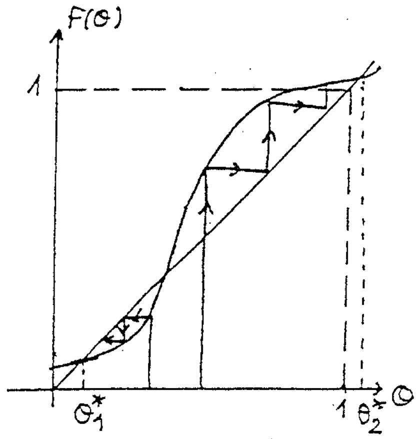
<u>$k \geq \pi$</u> : Il y a toujours au moins deux pts fixes.



(pts fixes stables, instables)

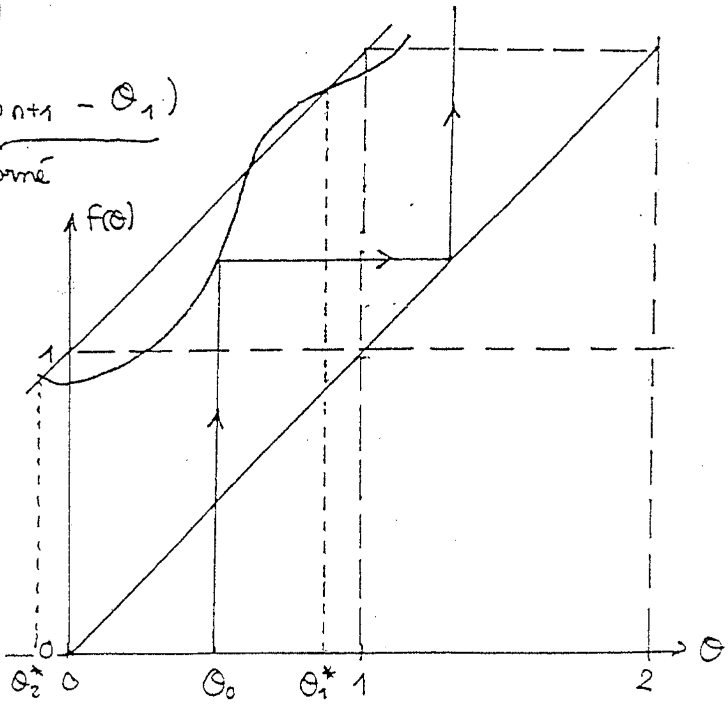
À partir de $k > 2\pi$, de nouveaux points fixes apparaissent. D'une manière générale, les points fixes apparaissent par paires stable-instable dans des bifurcations noeud-col lorsque $k = 2\pi|\Omega - p|$; le point instable reste toujours instable, et le point stable perd sa stabilité dans une bifurcation sous-harmonique lorsque $k = 2\sqrt{1+\pi^2(\Omega-p)^2}$.

3) Nous nous intéressons plus particulièrement aux langues d'Arnold définies par $0<k<1$, $0 \le \Omega \le \frac{k}{2\pi}$ et $0<k<1$, $1-\frac{k}{2\pi} \le \Omega \le 1$. On vérifie facilement que $\hat{\Omega} = 0$ ou $\hat{\Omega} = 1$ dans ces deux domaines, respectivement.



Dans le premier cas, presque toutes les orbites convergent vers θ_1^* ou $\theta_2^* = \theta_1^* + 1$, c'est-à-dire $\theta_n = \theta_i^* + \delta_n$ avec $i = 1$ ou 2 et $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$. Donc

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \theta_{j+1} - \theta_j \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (\theta_{n+1} - \theta_1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (\underbrace{\theta_i^* + \delta_{n+1} - \theta_1}_{\text{borné}}) \\
&= 0
\end{aligned}$$



Dans le second cas, on a deux points θ_1^* et $\theta_2^* = \theta_1^* - 1$ tels que $F(\theta_i^*) = \theta_i^* + 1$ et

$$\begin{aligned}
\theta_n &= F^n(\theta_i^*) + \delta_n \\
&= \theta_i^* + n + \delta_n
\end{aligned}$$

avec $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

Donc

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (\theta_{n+1} - \theta_1) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\theta_i^* + n+1 + \delta_{n+1} - (\theta_i^* + 1 + \delta_1) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} (n + \underbrace{\delta_{n+1} - \delta_1}_{\text{borné}}) = 1
\end{aligned}$$

4) En posant $\Omega = \frac{1}{2} + \omega$, on a

$$f(\theta) = \theta + \frac{1}{2} + \omega - \frac{k}{2\pi}\sin 2\pi\theta$$

$$f^2(\theta) = f(\theta) + \frac{1}{2} + \omega - \frac{k}{2\pi}\sin 2\pi f(\theta)$$

$$= \theta + 1 + 2\omega - \frac{k}{2\pi}\sin 2\pi\theta - \frac{k}{2\pi}\underbrace{\sin 2\pi\left(\theta + \frac{1}{2} + \omega - \frac{k}{2\pi}\sin 2\pi\theta\right)}_{*}$$

Pour k petit, on a

$$* = \sin 2\pi\left(\theta + \frac{1}{2} + \omega\right) - \frac{k}{2\pi}\sin 2\pi\theta \cos 2\pi\left(\theta + \frac{1}{2} + \omega\right)\cdot 2\pi + O(k^2)$$

$$= -\sin 2\pi(\theta + \omega) + k \sin 2\pi\theta \cos 2\pi(\theta + \omega) + O(k^2)$$

$$\Rightarrow f^2(\theta) = \theta + 1 + 2\omega + \frac{k}{2\pi}\left(\sin 2\pi(\theta+\omega) - \sin 2\pi\theta\right) - \frac{k^2}{2\pi}\cos 2\pi(\theta+\omega)\sin 2\pi\theta + O(k^3)$$

Prenons maintenant $|\omega|$ petit, donc

$$\sin 2\pi(\theta+\omega) = \sin 2\pi\theta + (2\pi)\,\omega\cos 2\pi\theta + O(\omega^2)$$

$$\cos 2\pi(\theta+\omega) = \cos 2\pi\theta - (2\pi)\,\omega \sin 2\pi\theta + O(\omega^2)$$

On obtient donc

$$F^2(\theta) = \theta + 1 + 2\omega + 2\pi\omega k\cos 2\pi\theta - \frac{k^2}{2\pi}\underbrace{\cos 2\pi\theta\sin 2\pi\theta}_{\frac{1}{2}\sin 4\pi\theta} + O(k^3, k^2\omega, k\omega^2)$$

L'équation $F^2(\theta) = \theta + 1$ donne

$$2\omega\,(1 + \pi k\cos 2\pi\theta) = \frac{k^2}{4\pi}\sin 4\pi\theta + O(k^3, k^2\omega, k\omega^2)$$

$$\Rightarrow \quad 2\omega = \frac{k^2}{4\pi}\sin 4\pi\theta + O(k^3, k^2\omega, k\omega^2)$$

$$\text{car } (1 + \alpha k)^{-1} = 1 + O(k)$$

Comme $|\sin 4\pi\theta| < 1$, on aura des solutions si $|\omega| < \frac{k^2}{8\pi}$

La largeur de la 2e langue d'Arnold est donc de l'ordre $\frac{k^2}{4\pi}$.

On peut montrer que les q^e langues d'Arnold (i.e. les domaines tels que $\exists\,\theta_0$ tq $f^q(\theta_0) = \theta_0 + p$) sont de largeur $O(k^q)$. Ces largeurs suivent une progression géométrique, et on comprend que leur somme puisse converger, bien que $q \to \infty$.