
PHENOMENES NON-LINEAIRES ET CHAOS

Corrigé de la série 12: Route sous-harmonique

Exercice 21 *Renormalisation*

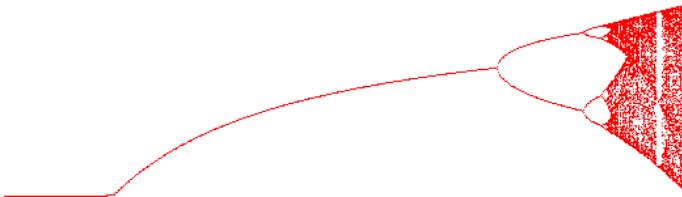
Considérons l'espace des fonctions définies sur $[-1, 1]$: $\mathcal{E}_1 = \{f_a(x) = 1 - ax^2\}$ où a est défini de telle manière que $f([-1, 1]) \in [-1, 1]$, c'est-à-dire $0 \leq a \leq 2$.

La dérivée schwartzienne de ces fonctions est

$$(\mathcal{S}f_a)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 = -\frac{3}{2x^2} < 0$$

L'application itérée $x_{n+1} = f_a(x_n)$ est donc susceptible de posséder une cascade sous-harmonique lorsque a augmente. On vérifie en effet que le point $x^* = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2a}$, fixe par f_a , subit une bifurcation sous-harmonique en $a = a_1 = \frac{3}{4}$.

Une simulation donne le diagramme de bifurcation ci-dessous.



Définissons maintenant la transformation de renormalisation

$$(\hat{T}f_a)(x) = \frac{1}{\sigma} f_a^2(\sigma x) = \frac{1}{\sigma} f_a(f_a(\sigma x))$$

$\sigma = \sigma(a)$ est choisi de telle manière que $(\hat{T}f_a)(0) = \frac{1}{\sigma} f_a(f_a(0)) = \frac{1}{\sigma} f_a(1) = 1$, donc $\sigma(a) = f_a(1) = 1 - a$.

Le problème est que $\hat{T}f_a$ est en général une fonction quartique, qui n'appartient pas à \mathcal{E}_1 , mais à $\mathcal{E}_2 = \{f(x) = 1 - a_1x^2 + a_2x^4\}$. Un espace invariant par \hat{T} est

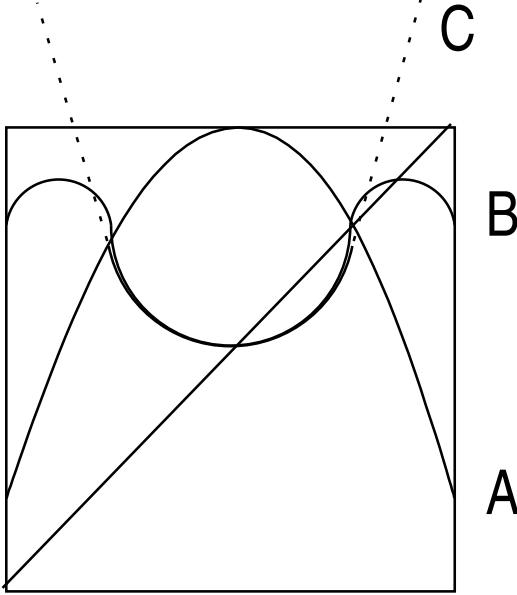
$$\mathcal{E}_\infty = \left\{ f(x) = 1 - a_1x^2 + a_2x^4 - a_3x^6 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n x^{2n} \right\}$$

Cependant, nous avons vu au cours que le point fixe $g \in \mathcal{E}_\infty$ de \hat{T} correspond à $a_1 = 1.52\dots$, $a_2 = 0.104\dots$, $a_3 = -0.0287\dots$, etc. g est donc très proche de l'axe \mathcal{E}_1 . On peut donc essayer d'approcher

$$(\hat{T}f_a)(x) = \frac{1}{1-a} [1 - a + 2a^2(1-a)^2x^2 - a^3(1-a)^4x^4] \in \mathcal{E}_2$$

par sa projection sur \mathcal{E}_1 .

$$\begin{aligned} f_a^{(2)}(x) &= \frac{1}{1-a} [1 - a + 2a^2(1-a)^2x^2] \\ &= 1 + 2a^2(1-a)x^2 \\ &= f_{R(a)}(x) \in \mathcal{E}_1 \end{aligned}$$



A , B et C représentent respectivement $f_a(x)$, $f_a^2(x)$ et $f_a^{(2)}(x)$.

Au lieu d'étudier \hat{T} , on étudie donc $T : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_1$, défini par $(Tf_a)(x) = f_{R(a)}(x)$, où $R(a) = -2a^2(1-a)$.

Les points fixes de T correspondent aux points fixes a^* de R , tels que $0 \leq a^* \leq 2$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} a^* = 0 \\ a^* = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \simeq 1.366\dots \end{cases} \text{ à comparer avec } a_1(g) = 1.52\dots$$

Ce point est proche de la valeur trouvée numériquement de $a_\infty \simeq 1.40$. Remarquons que $f_{a_\infty}^{2^n}(x)$ est fortement auto-similaire lorsque n devient grand.

Le nombre $\alpha = -\frac{1}{g(1)}$ est approché par $-\frac{1}{f_{a^*}(1)} = 2.7322\dots$, à comparer avec $\alpha = 2.5028\dots$

Le nombre δ peut être estimé en calculant la dérivé de T en f_{a^*} . Intuitivement, cette dérivée correspond à $R'(a^*) = 4 + \sqrt{3} = 5.73205\dots$, à comparer avec $\delta = 4.669\dots$ ($R'(0) = 0$, donc 0 est superstable). Ce calcul peut être justifié en utilisant la notion de *dérivée fonctionnelle*:

Si \mathcal{E} est un espace de fonctions, et $g \in \mathcal{E}$, les fonctions *admissibles* ψ sont des fonctions telles que $g + \psi \in \mathcal{E}$ (donc en général, $\psi \notin \mathcal{E}$). La *dérivée fonctionnelle* de $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ au point g dans la direction de ψ peut être définie par

$$(DT)(x) = \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} T(g + \lambda\psi)(x) \right|_{\lambda=0}$$

Dans notre cas, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$, les fonctions admissibles sont $\psi(x) = kx^2$ alors

$$\begin{aligned} (DT)(x) &= \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} T(f_{a^*} + \lambda\psi(x)) \right|_{\lambda=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} T(1 - (a^* - \lambda k)x^2) \right|_{\lambda=0} \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} (1 - R(a^* - \lambda k)x^2) \right|_{\lambda=0} \\ &= R'(a^*)kx^2 \\ &= R'(a^*)\psi(x) \end{aligned}$$

ce qui justifie notre calcul intuitif. Remarquons qu'une meilleure approximation de δ est obtenue en tenant compte de l'expression générale de DT (*cf* polycopié). La situation à plusieurs dimensions peut être résumée de la manière suivante:

- Si Σ_n est l'ensemble des fonctions $F_{a_1, a_2, \dots}(x)$ telles que O soit un point périodique superstable de période 2^{n-1} , on a

$$\hat{T}(\Sigma_{n+1}) \in \Sigma_n$$

Σ_∞ est la variété stable de g . Les Σ_n s'éloignent à une vitesse δ de Σ_∞ .

- Si $F_\mu(x) = F_{a_1(\mu), a_2(\mu), \dots}(x)$ est une famille à un paramètre d'applications, les cycles superstables apparaîtront pour des valeurs $\mu = \lambda_n$ telles que $F_{\lambda_n}(x) \in \Sigma_n$. Ces valeurs s'accumulent à vitesse δ sur le point λ_∞ , et on verra que les fonctions $F_{\lambda_n}^{2^{n-1}}$ et $\hat{T}(F_{\lambda_{n+1}}^{2^n})$ se *ressemblent* de plus en plus lorsque $n \rightarrow \infty$.