PHENOMENES NON-LINEAIRES ET CHAOS

Corrigé de la série 11: Bifurcations dans les applications

Exercice 19 *Bifurcations*

1. Les conditions **nécessaires** pour qu'un point $(x, \epsilon) = (0, 0)$ soit un point de bifurcation du système dynamique $\dot{x} = f(x, \epsilon)$ sont:

   (a) $(0, 0)$ est un point fixe (c'est-à-dire $f(0, 0) = 0$);

   (b) Les hypothèses du théorème des fonctions implicites ne sont pas satisfaites (c'est-à-dire $\left.\frac{\partial f(x,\epsilon)}{\partial x}\right|_{(x,\epsilon)=(0,0)} = 0$, ainsi l'existence et l'unicité d'une fonction $x(\epsilon)$ telle que $f(x(\epsilon), \epsilon) = 0$ n'est plus assurée, permettant l'apparition de nouvelles "branches" de points fixes).

   Le système considéré, avec $f(x, \epsilon) = \epsilon - x^3$ satisfait ces deux conditions:

   $$f(0, 0) = 0, \qquad \left.\frac{\partial f(x, \epsilon)}{\partial x}\right|_{(x,\epsilon)=(0,0)} = \left.-3x^2\right|_{(x,\epsilon)=(0,0)} = 0$$

2. On trouve une "branche" de points fixes $x_0(\epsilon) = \text{sgn}(\epsilon)|\epsilon|^{\frac{1}{3}}$, pour tout ϵ (négatif, nul ou positif).
   Pour établir la stabilité de ces points fixes, on linéarise autour du point fixe x_0:

   $$\dot{x} = \left.\frac{\partial f(x, \epsilon)}{\partial x}\right|_{x=x_0} (x - x_0) + \mathcal{O}\left((x - x_0)^2\right) = \underbrace{-3\epsilon^{2/3}}_{<0\ \forall\epsilon\neq 0}\left(x - \text{sgn}(\epsilon)|\epsilon|^{1/3}\right).$$

   Ainsi le point fixe x_0 est toujours stable.

3. Lors du franchissement du point $(x, \epsilon) = (0, 0)$ (en passant de $\epsilon < 0$ à $\epsilon > 0$) il n'y a donc pas de changement qualitatif des solutions. Ce point n'est donc pas un point de bifurcation.
   Ceci est en apparente contradiction avec le point 1. Cependant il faut se rappeler que les conditions vérifiées au point 1 sont des conditions nécessaires pour l'existence d'un point de bifurcation, mais pas suffisantes.

Exercice 20 *Application logistique*

Soit le système

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f\left(x_k,\, \lambda\right) \\ f(x,\, \lambda) &= \lambda x\,(1 - x) \qquad \lambda \in [0,\, 4] \end{aligned} \tag{1}$$

1. De l'exercice 10, nous savons qu'il existe deux *branches* de points fixes, $x_1^*(\lambda) = 0$ et $x_2^*(\lambda) = \frac{\lambda-1}{\lambda}$. Ces points changent de stabilité en $(x, \lambda) = (0, 1)$ et en $(x, \lambda) = (2/3,\ 3)$.

2. <u>Forme normale autour de $(0, 1)$:</u>

   Si $\lambda = 1 + \epsilon$, le système (Eq. 1) devient

   $$x_{k+1} = (1 + \epsilon)x_k(1 - x_k) = (1 + \epsilon)x_k - (1 + \epsilon)x_k^2$$

   On vérifie qu'il n'est pas possible d'éliminer le terme quadratique par un changement de variable de la forme $x = y + \alpha(\epsilon)y^2$. La forme normale est donc

   $$x_{k+1} = x_k + \epsilon x_k - x_k^2 \tag{2}$$

   <u>Forme normale autour de $(2/3,\ 3)$:</u>
   Si $\lambda = 3 + \epsilon$, alors

   $$x = x_2^*(\lambda) + y = \frac{\lambda - 1}{\lambda} + y = \frac{2 + \epsilon}{3 + \epsilon} + y$$

   On obtient

   $$\frac{2 + \epsilon}{3 + \epsilon} + y_{k+1} = (3 + \epsilon)\left[\frac{2 + \epsilon}{3 + \epsilon} + y_k\right]\left[\frac{1}{3 + \epsilon} - y_k\right]$$

   et donc

   $$y_{k+1} = -(1 + \epsilon)y_k - (3 + \epsilon)y_k^2 \tag{3}$$

   Posons alors $z = y + \alpha(\epsilon)y^2$,

   $$y = z - \alpha y^2 = z - \alpha z^2 + 2\alpha^2 z^3 + O(z^4)$$

   L'application devient

   $$\begin{aligned} z_{k+1} &= y_{k+1} + \alpha y_{k+1}^2 \\ &= -(1 + \epsilon)y_k - (3 + \epsilon)y_k^2 + \alpha(1 + \epsilon)^2 y_k^2 + 2\alpha(1 + \epsilon)(3 + \epsilon)y_k^3 + O(y_k^4) \\ &= -(1 + \epsilon)z_k + \alpha(1 + \epsilon)z_k^2 - 2\alpha^2(1 + \epsilon)^2 z_k^3 + \left[\alpha(1 + \epsilon)^2 - (3 + \epsilon)\right] z_k^2 \\ &\quad - 2\alpha\left[\alpha(1 + \epsilon)^2 - (3 + \epsilon)\right] z_k^3 + O(z_k^4) \end{aligned}$$

   On peut annuler le terme quadratique en posant $\alpha(\epsilon) = \frac{3+\epsilon}{(1+\epsilon)(2+\epsilon)} = \frac{3}{2} + O(\epsilon)$. On obtient alors $z_{k+1} = -(1 + \epsilon)z_k + 2\frac{(3+\epsilon)^2}{2+\epsilon} z_k^3 + O(z_k^4)$. Le terme cubique ne peut être éliminé. La forme normale est finalement donnée par:

   $$z_{k+1} = -z_k - \epsilon z_k + 9z_k^3 \tag{4}$$

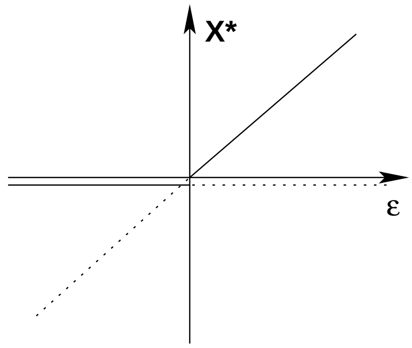

Figure 1: bifurcation transcritique

3. Soit $x_{k+1} = x_k + \epsilon x_k - x_k^2 = g\,(x_k,\, \epsilon)$, les points fixes de cette application sont $x^* = \{0,\, \epsilon\}$. Leur stabilité est déterminée par

$$\partial_x g(x,\, \epsilon) = 1 + \epsilon - 2x \qquad \left\{ \begin{array}{l} \partial_x g(0, \epsilon) = 1 + \epsilon \\ \partial_x g(\epsilon, \epsilon) = 1 - \epsilon \end{array} \right.$$

Ainsi il s'agit d'une *bifurcation transcritique.*

Soit $z_{k+1} = -z_k - \epsilon z_k + 9z_k^3 = g(z_k,\, \epsilon)$, le seul point fixe de cette application est $z^* = 0$. Sa stabilité est déterminée par $\partial_z g(0, \epsilon) = -1 + \epsilon$, qui correspond à une *bifurcation sous-harmonique*. Etudions maintenant la fonction $h = g \circ g$,

$$\begin{aligned} z_{k+2} &= -z_{k+1} - \epsilon z_{k+1} + 9z_{k+1}^3 \\ &= (1+\epsilon)^2 z_k - 9(1+\epsilon) z_k^3 - 9(1+\epsilon)^3 z_k^3 + O(z_k^5) \\ &= z_k 12\epsilon z_k - 18 z_k^3 + O\left(\epsilon^2 z_k,\, \epsilon z_k^3,\, z_k^5\right) \end{aligned}$$

On voit que $z_{k+2}^* = z_k^*$ pour $z_k^* \cong \frac{1}{3}\sqrt{\epsilon}$, dès lors il s'agit d'orbites de période 2.

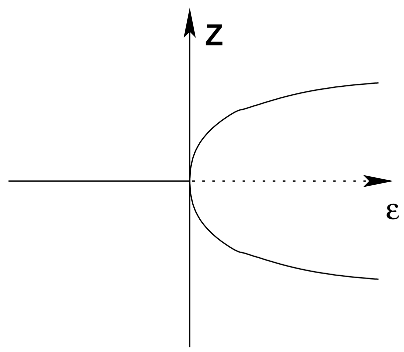

Figure 2: bifurcation sous-harmonique