PHENOMENES NON-LINEAIRES ET CHAOS

Corrigé de la série 10: Bifurcations

Exercice 18 *Oscillateur de Van der Pol*

Soit le système

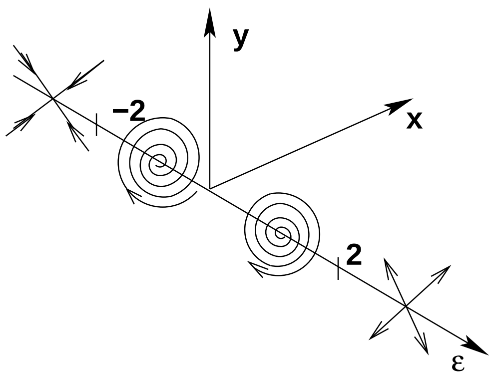
$$\begin{cases} \dot{x} = y + \epsilon x - \frac{x^3}{3} \\ \dot{y} = -x \end{cases} \tag{1}$$

1. L'origine est le seul point fixe. L'application linéarisée autour de l'origine s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = \epsilon x + y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \implies \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont données par $\lambda^2 - \epsilon\lambda + 1 = 0$, soit $\lambda_\pm = \frac{\epsilon}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 - 1}$.

- $\epsilon < -2$: noeud stable.
- $-2 < \epsilon < 0$: foyer stable.
- $0 < \epsilon < 2$: foyer instable.
- $2 < \epsilon$: noeud instable.



Dans la suite on s'intéresse au comportement lorsque ϵ est proche de 0. On a une bifurcation de Hopf car deux valeurs propres complexes conjuguées croisent l'axe imaginaire. Remarquons que $\lambda_+\lambda_- = 1$ et que $\lambda_+ = \bar{\lambda}_-$ si $|\epsilon| < 2$.

2. Si $z = ax + by$, on a $\dot{z} = a\dot{x} + b\dot{y} = (a\epsilon - b)\,x + ay - a\frac{x^3}{3}$. On aimerait

$$\dot{z} = \lambda z + g(z,\, \bar{z}) = \lambda ax + \lambda by + g\left(ax + by,\, \bar{a}x + \bar{b}y\right)$$

Il faut donc

$$\begin{cases} a\epsilon - b = \lambda a \\ a = \lambda b \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda^2 - \epsilon\lambda + 1 = 0 \\ b = \frac{a}{\lambda} \end{cases}$$

λ est bien sûr l'une des valeurs propres calculées plus haut. Nous choisirons $\lambda = \lambda_+ = \frac{1}{\lambda_-}$, $a = 1$ et $b = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_+} = \lambda_-$. Nous avons donc

$$\begin{cases} z = x + \lambda_- y \\ \bar{z} = x + \lambda_+ y \end{cases}$$

Pour inverser ces relations, on calcule

$$\begin{cases} \frac{z+\bar{z}}{2} = x + \frac{\epsilon}{2} y \\ \frac{z-\bar{z}}{2} = -i\sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}\, y \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}}(z - \bar{z}) \\ x = \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} \end{cases}$$

avec $\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i\epsilon}{2\sqrt{1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}}\right)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} g(z,\, \bar{z}) &= -\frac{1}{3}x^3 = -\frac{1}{3}\left(\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{3}\alpha^3 z^3 - \alpha^2\bar{\alpha} z^2 \bar{z} - \alpha\bar{\alpha}^2 z \bar{z}^2 - \frac{1}{3}\bar{\alpha}^3\bar{z}^3 \end{aligned} \tag{2}$$

g est un polynôme homogène de degré 3 en z et $\bar{z}$. ($k = 3$)

3. On a

$$\begin{cases} \dot{z} = \lambda z + g(z,\, \bar{z}) \\ \dot{\bar{z}} = \bar{\lambda}\bar{z} + \bar{g}(z,\, \bar{z}) \end{cases}$$

Le changement de variable $z = \omega + h(\omega,\, \bar{\omega})$ avec h d'ordre 3 donne

$$\dot{z} = \dot{\omega} + h_\omega \dot{\omega} + h_{\bar{\omega}}\dot{\bar{\omega}} = \lambda\omega + \lambda h + g(z,\, \bar{z})$$

avec $\dot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{z}} + O(\omega^2) = \bar{\lambda}\bar{z} + O(z^3) = \bar{\lambda}\bar{\omega} + O(\omega^2)$. Ainsi

$$\dot{\omega} = \underbrace{\frac{1}{1 + h_\omega}}_{\underbrace{1 - h_\omega}_{\text{ordre 2}} + \text{ ordre 4}} \left[\underbrace{\lambda\omega}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\lambda h}_{\text{ordre 3}} + \underbrace{g(z,\, \bar{z})}_{\text{ordre 3}} - \underbrace{h_{\bar{\omega}}}_{\text{ordre 2}}\left(\underbrace{\bar{\lambda}\bar{\omega}}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\ldots}_{\text{ordre 2}}\right)\right]$$

Ce qui donne

$$\dot{\omega} = \underbrace{\lambda\omega}_{\text{ordre 1}} + \left[\underbrace{\lambda h + g(z,\, \bar{z}) - \bar{\lambda}\bar{\omega}h_{\bar{\omega}} - \lambda\omega h_\omega}_{\text{ordre 3}}\right] + O(\omega^4)$$

Notre objectif est d'éiminer un maximum de terme d'ordre 3 de l'expression entre crochets. Prenons $h(\omega,\, \bar{\omega}) = a\omega^3 + b\bar{\omega}^3 + c\bar{\omega}^2\omega + d\omega^2\bar{\omega}$, alors

$$\begin{aligned} h_\omega &= 3a\omega^2 + c\bar{\omega}^2 + 2d\omega\bar{\omega} \\ h_{\bar{\omega}} &= 3b\bar{\omega}^2 + 2c\bar{\omega}\omega + d\omega^2 \end{aligned}$$

De plus, nous avons l'Eq. 2, nous pouvons maintenant calculer le terme entre crochets:

$$\begin{array}{rrrrr}
\lambda h = & \lambda a\omega^3 & +\lambda b\bar{\omega}^3 & +\lambda c\bar{\omega}^2\omega & +\lambda d\omega^2\bar{\omega} \\
-\lambda\omega h_\omega = & -3\lambda a\omega^3 & & -\lambda c\bar{\omega}^2\omega & -2\lambda d\omega^2\bar{\omega} \\
-\bar{\lambda}\bar{\omega}h_{\bar{\omega}} = & & -3\bar{\lambda}b\bar{\omega}^3 & -2\bar{\lambda}c\bar{\omega}^2\omega & -\bar{\lambda}d\omega^2\bar{\omega} \\
+\quad g(\omega,\bar{\omega}) = & -\frac{1}{3}\alpha^3\omega^3 & -\frac{1}{3}\bar{\alpha}^3\bar{\omega}^3 & -\bar{\alpha}^2\alpha\bar{\omega}^2\omega & -\bar{\alpha}\alpha^2\omega^2\bar{\omega} \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
[\ldots] = \left(-2\lambda a - \frac{1}{3}\alpha^3\right)\omega^3 + \left((\lambda - 3\bar{\lambda})b - \frac{1}{3}\bar{\alpha}^3\right)\bar{\omega}^3 + \left(-2\bar{\lambda}c - \bar{\alpha}^2\alpha\right)\bar{\omega}^2\omega \\
+ \left(-\lambda d - \bar{\lambda}d - \bar{\alpha}\alpha^2\right)\omega^2\bar{\omega}
\end{aligned}$$

Rappelons que $\lambda_\pm = \frac{\epsilon}{2} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}$. Pour la valeur critique $\epsilon = 0$, on a $\lambda = i$, et $\bar{\lambda} = -i$. Le terme entre crochets devient

$$\begin{aligned}
[\ldots] = \left(-2ia - \frac{1}{3}\alpha^3\right)\omega^3 + \left(4ib - \frac{1}{3}\bar{\alpha}^3\right)\bar{\omega}^3 + \left(2ic - \bar{\alpha}^2\alpha\right)\bar{\omega}^2\omega \\
- \bar{\alpha}\alpha^2\omega^2\bar{\omega}
\end{aligned}$$

On voit qu'on arrive à choisir a, b et c de mainère à éliminer les trois premiers termes. Par contre, le dernier terme ne peut pas être éliminé quel que soit le choix de h. Ce terme est *résonant*. L'équation pour ω est donc

$$\boxed{\dot{\omega} = \lambda\omega - \alpha\omega\,|\alpha\omega|^2 + O(\omega^4)} \tag{3}$$

4. Posons $\omega = re^{i\varphi}$, $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$ et $\alpha = |\alpha|e^{i\psi}$. On a $|\lambda| = 1$, $\cos\theta = \Re\,\lambda = \frac{\epsilon}{2}$, $\sin\theta = \Im\,\lambda = \sqrt{1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}$, $|\alpha| = \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}}$, $\cos\psi = \frac{\Re\,\alpha}{|\alpha|} = \sqrt{1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}$ et $\sin\psi = \frac{\Im\,\alpha}{|\alpha|} = -\frac{\epsilon}{2}$. L'équation pour ω devient

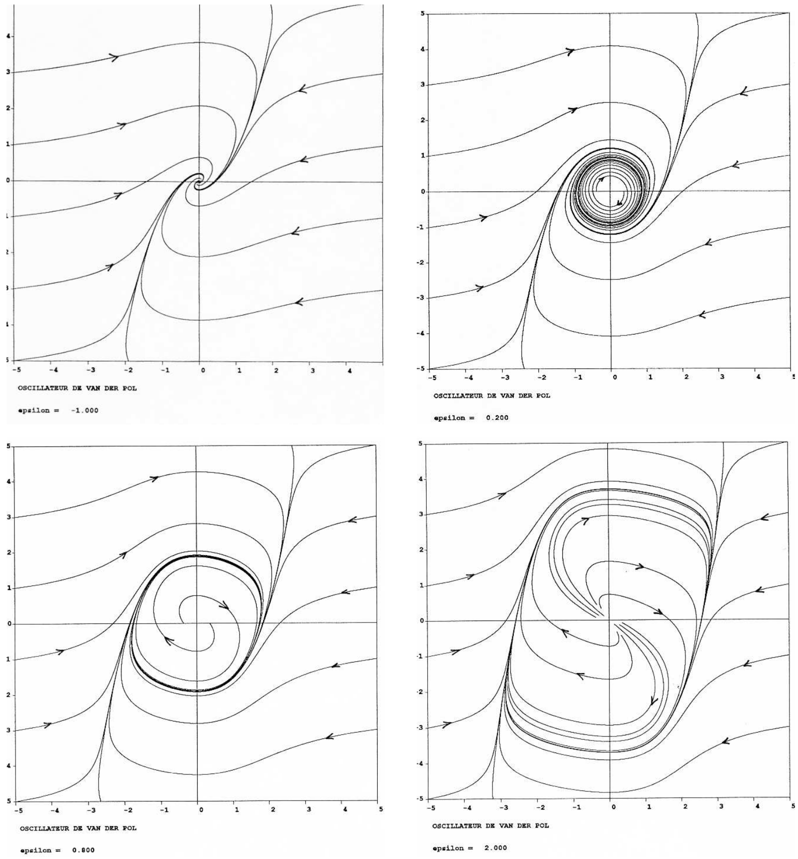
$$\dot{r}e^{i\varphi} + ir\dot{\varphi}e^{i\varphi} = |\lambda|re^{i(\varphi+\psi)} - |\alpha|^3r^3e^{i(\varphi+\psi)}$$

soit

$$\dot{r} + ir\dot{\varphi} = |\lambda|re^{i\theta} - |\alpha|^3r^3e^{i\psi} + O(r^4)$$

La partie rélle est donnée par $\dot{r} = |\lambda|r\cos\theta - |\alpha|^3r^3\cos\psi + O(r^4)$ alors que la partie imaginaire par $r\dot{\varphi} = |\lambda|r\sin\theta - |\alpha|^3r^3\sin\psi + O(r^4)$. En remplaçant les expressions de $|\lambda|$, $|\alpha|$, θ et ψ, on obtient

$$\boxed{\left\{\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{\epsilon}{2}r - \frac{1}{8\left(1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2\right)}r^3 + O(r^4) \\
\dot{\varphi} &= \sqrt{1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2} + \frac{\epsilon}{16\left(1-\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2\right)^{3/2}}r^2 + O(r^4)
\end{aligned}\right.}$$



A l'ordre ϵ,

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\epsilon}{2} r - \frac{1}{8} r^3 + O(\epsilon^2,\, r^4) \\ \\ \dot{\varphi} = 1 + O(\epsilon,\, r^4) \end{cases}$$

Les orbites périodiques sont données par les points d'équilibre de la première équation, i.e. $\dot{r} = 0$, $r \neq 0$. Ces points sont $r = \pm r^*$, $r^* = 2\sqrt{\epsilon} + O(\epsilon^2)$, $\epsilon > 0$.

- On a une *bifurcation fourche* dans les variables r. Les nouveaux points d'équilibre $\pm r^*$ correspondent à *une* orbite périodique. Celle-ci est stable car
$$\left.\frac{d}{dr}\dot{r}\right|_{r=r^*} = \left.\left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{3}{8} r^2\right)\right|_{r=r^*} = -\epsilon < 0 \quad \text{si } \epsilon > 0$$
- On a une *bifurcation de Hopf directe* dans les variables (x, y). Au plus bas ordre, le cycle limite stable est donné par $(r_t,\, \varphi_t) = (2\sqrt{\epsilon},\, t)$, ce qui implique $\omega_t = 2\sqrt{\epsilon} e^{it}$, $z_t = \omega_t + h(\omega_t,\, \bar{\omega}_t) = 2\sqrt{\epsilon} e^{it} + O(\epsilon^{3/2})$ et $(x_t,\, y_t) = 2\sqrt{\epsilon}\,(\cos t,\, \sin t) + O(\epsilon^{3/2})$.