PHENOMENES NON-LINEAIRES ET CHAOS

Corrigé de la série 9: Bifurcations

Exercice 16 *Formes normales*

1. Bifurcation de codimension 1, variété centrale de dimension 1.

$$\dot{x} = f(x, \epsilon) = a_0(\epsilon) + a_1(\epsilon)x + a_2(\epsilon)x^2 + \dots$$

   $(0, 0)$ est un point de bifurcation si

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \Longrightarrow a_0(0) = 0 \\ \partial_x f(0,0) = 0 \Longrightarrow a_1(0) = 0 \end{cases}$$

   ($x = 0$ point fixe est marginalement stable)

   Rappel:
   Le théorème des fonctions implicites dit que si $f(0, 0) = 0$ et $\partial_x f(0, 0) \neq 0$, alors il existe, dans un voisinage de $\epsilon = 0$, une fonction $\varphi(\epsilon)$, unique, aussi différentiable que f, telle que $\varphi(0) = 0$ et $f(\varphi(\epsilon), \epsilon) = 0$. (on peut calculer la série de Taylor de $\varphi(\epsilon)$ par des méthodes itératives)
   Lors d'une bifurcation, l'hypothèse $\partial_x f(0, 0)$ est violée et il peut y avoir plusieurs, ou pas, de branches de points fixes $\varphi(\epsilon)$.

2. (a) $f(x, \epsilon) = \epsilon^2 + \epsilon x - x^2$

   - Posons $x = y + \alpha(\epsilon)$

$$\Rightarrow \dot{y} = \epsilon^2 + \epsilon\alpha(\epsilon) - \alpha^2(\epsilon) + (\epsilon - 2\alpha(\epsilon))y - y^2$$

     Le terme constant peut être annulé en posant $\alpha(\epsilon) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\epsilon$.

$$\Rightarrow \dot{y} = -\sqrt{5}\epsilon y - y^2 \tag{1}$$

   - Posons $y = z + \beta(\epsilon)z^2$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{z}(1 + 2\beta(\epsilon)z) &= -\sqrt{5}\epsilon z - \sqrt{5}\epsilon\beta(\epsilon)z^2 - z^2 + O\left(z^3\right) \\ &= \left[-\sqrt{5}\epsilon z - (1 + \sqrt{5}\epsilon\beta(\epsilon))z^2 + \dots\right] \\ &\quad \times \left[1_2\beta(\epsilon)z + 4\beta^2(\epsilon)z^2 - \dots\right] \\ &= -\sqrt{5}\epsilon\beta(\epsilon)z - (1 + \sqrt{5}\epsilon\beta(\epsilon) - 2\sqrt{5}\epsilon\beta(\epsilon))z^2 + O\left(z^3\right) \end{aligned}$$

     Le terme quadratique ne peut être éliminé car il faudrait poser $\beta(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{5}\epsilon}$, qui n'est pas continu en 0.

   L' Eq. 1 est donc la forme normale de la bifurcation.

(b) $f(x,\epsilon) = \epsilon + \epsilon^2 x - x^2$

- Posons $x = y + \alpha(\epsilon)$

$$\Rightarrow \dot{y} = \epsilon + \epsilon^2\alpha(\epsilon) - \alpha^2(\epsilon) + (\epsilon^2 - 2\alpha(\epsilon))y - y^2$$

Pour annuler le terme constant, il faudrait $\alpha(\epsilon) = \frac{\epsilon^2 \pm \sqrt{\epsilon^4+4\epsilon}}{2} \sim \sqrt{\epsilon}$ qui n'est pas dérivable en 0, donc ce terme est essentiel.

- Posons $x = y + \beta(\epsilon)y^2$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \dot{y}[1+2\beta(\epsilon)y] &= \epsilon + \epsilon^2 y - \left(1 - \epsilon^2\beta(\epsilon)\right) y^2 + O\left(y^3\right) \\ &= \left[\epsilon + \epsilon^2 y - \left(1 - \epsilon^2\beta(\epsilon)\right) y^2 + \dots\right] \\ &\quad \times \left[1 - 2\beta(\epsilon)y + 4\beta^2(\epsilon)y^2 + \dots\right] \\ &= \epsilon + \left(\epsilon^2 - 2\beta(\epsilon)\epsilon\right) y \\ &\quad - \left[1 - \epsilon^2\beta(\epsilon) + 2\beta(\epsilon)\epsilon^2 - 4\epsilon\beta^2(\epsilon)\right] y^2 + O\left(y^3\right)\end{aligned}$$

Le terme linéaire est annulé en posant $\beta(\epsilon) = \frac{1}{2}\epsilon$, d'où

$$\Rightarrow \dot{y} = \epsilon - \left(1 - \frac{1}{2}\epsilon^3\right) y^2 + O\left(y^3\right)$$

La forme normale est donc:

$$\dot{y} = \epsilon - y^2 + O\left(\epsilon^3 y^2,\, y^3\right) \tag{2}$$

(c) $f(x,\epsilon) = -\epsilon^2 + \epsilon x + \epsilon x^2 - x^3$

- Posons $x = y + \alpha(\epsilon)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \dot{y} = &-\epsilon^2 + \epsilon\alpha(\epsilon) + \epsilon\alpha^2(\epsilon) - \alpha^3(\epsilon) + \left[\epsilon + 2\alpha(\epsilon)\epsilon - 3\alpha^2(\epsilon)\right] y \\ &+ \left[\epsilon - 3\alpha(\epsilon)\right] y^2 - y^3\end{aligned}$$

Le terme constant peut être éliminé en choisissant $\alpha(\epsilon) = \epsilon$.

$$\Rightarrow \dot{y} = \left(\epsilon - \epsilon^2\right) y - 2\epsilon y^2 - y^3$$

- Posons $y = z + \beta(\epsilon)z^2$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \dot{z} = &\left[(\epsilon - \epsilon^2)z + \left((\epsilon - \epsilon^2)\beta(\epsilon) - 2\epsilon\right) z^2 - (1 + 4\epsilon\beta(\epsilon))\, z^3 + \dots\right] \\ &\times \left[1 - 2\epsilon\beta(\epsilon)z + 4\beta^2(\epsilon)z^2 + \dots\right] \\ = &(\epsilon - \epsilon^2)z - \left[(\epsilon - \epsilon^2)\beta(\epsilon) + 2\epsilon\right] z^2 \\ &- \left[1 - 2(\epsilon - \epsilon^2)\beta^2(\epsilon)\right] z^3 + O\left(z^4\right)\end{aligned}$$

On annule le terme quadratique en posant $\beta(\epsilon) = -\frac{2}{1-\epsilon}$

$$\Rightarrow \dot{z} = \left(\epsilon - \epsilon^2\right) z - \left(1 - \frac{8\epsilon}{1-\epsilon}\right) z^3 + O\left(z^4\right)$$

La forme normale est alors donnée par

$$\dot{z} = \epsilon z - z^3 + O\left(\epsilon^2 z,\, \epsilon z^3,\, z^4\right) \tag{3}$$

(d) $f(x,\epsilon) = \epsilon x + \epsilon x^2 - x^4$

- Posons $x = y + \alpha(\epsilon)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \dot{y} &= \left[\epsilon y + \epsilon(\alpha(\epsilon)+1)y^2 + 2\alpha(\epsilon)\epsilon y^3 + \left(\epsilon\alpha^2(\epsilon) - 1\right) y^4 + \ldots\right] \\
&\quad \times \left[1 - 2\alpha(\epsilon)y + 4\alpha^2(\epsilon)y^2 - 8\alpha^3(\epsilon)y^3 + \ldots\right] \\
&= \epsilon y + \epsilon\left(1 - \alpha(\epsilon)\right) y^2 + 2\alpha^2(\epsilon)y^3 \\
&\quad - \left(1 - \epsilon\alpha^2(\epsilon) + 4\epsilon\alpha^3(\epsilon)\right) y^4 + O\left(y^5\right)
\end{aligned}
$$

Le terme constant peut être annulé en posant $\alpha(\epsilon) = 1$.

$$\Rightarrow \dot{y} = \epsilon y + 2\epsilon y^3 - (1+3\epsilon)\, y^4 + O\left(y^5\right)$$

- Posons $y = z + \beta(\epsilon)z^3$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \dot{z} &= \left[\epsilon z + \epsilon\left(\beta(\epsilon)+2\right) z^3 - (1+3\epsilon)\, z^4 + \ldots\right]\left[1 - 3\beta(\epsilon)z^2 + \ldots\right] \\
&= \epsilon z + \epsilon\left(2 - 2\beta(\epsilon)\right) z^3 - (1+3\epsilon)\, z^4 + O\left(z^5\right)
\end{aligned}
$$

Le terme cubique disparaît pour $\beta(\epsilon) = 1$

$$\Rightarrow \dot{z} = \epsilon z - (1+3\epsilon)\, z^4 + O\left(z^5\right)$$

La forme normale est donc:

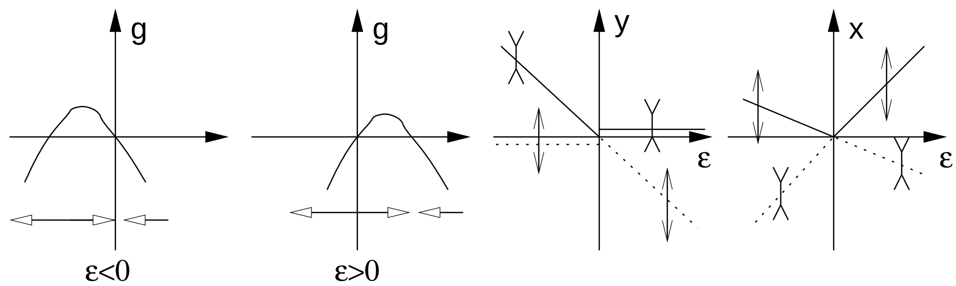
$$\dot{z} = \epsilon z - z^4 + O\left(\epsilon z^4,\, z^5\right) \tag{4}$$

Remarque:
Le terme quadratique de l' Eq. 2 et le terme cubique de l'Eq. 3 ne peuvent être éliminés pour les mêmes raisons que pour l'Eq. 1, c'est-à-dire qu'ils sont d'ordre 0 en ϵ.

3. (a) $\dot{y} = g(y,\epsilon) = -\sqrt{5}\epsilon y - y^2$ Bifurcation transcritique

Points fixes	Stabilité $\partial_y g = -\sqrt{5}\epsilon - 2y^2$
$y = 0$	$\partial_y g(0,\epsilon) = -\sqrt{5}\epsilon$
$y = -\sqrt{5}\epsilon$	$\partial_y g\left(-\sqrt{5}\epsilon, \epsilon\right) = \sqrt{5}\epsilon$

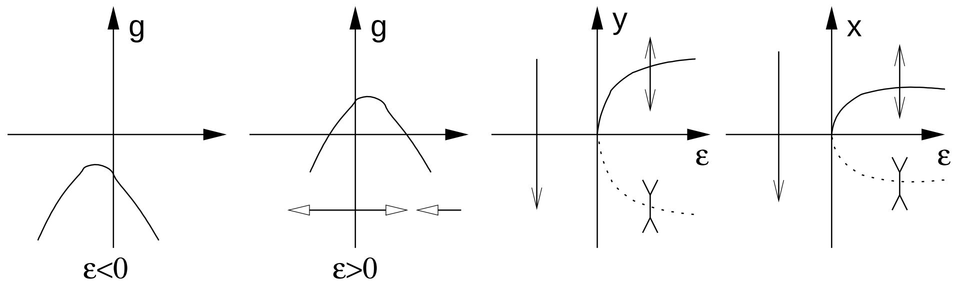
Variables originales: $y = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\epsilon$
$y = -\sqrt{5}\epsilon \Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\epsilon$



(b) $\dot{y} = g(y,\epsilon) = \epsilon - y^2$ Bifurcation noeud-col

Points fixes	Stabilité $\partial_y g = -2y$
$y = \sqrt{\epsilon}$	$\partial_y g\left(\sqrt{\epsilon}, \epsilon\right) = -2\sqrt{\epsilon}$
$y = -\sqrt{\epsilon}$	$\partial_y g\left(-\sqrt{\epsilon}, \epsilon\right) = 2\sqrt{\epsilon}$

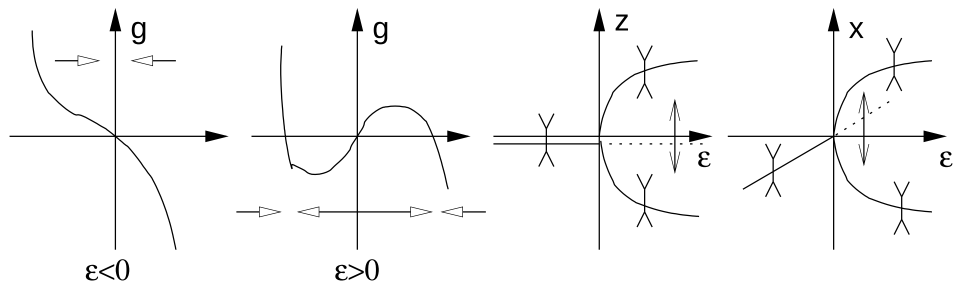
Variables originales: $x = y + \frac{1}{2}\epsilon y^2 = \pm\sqrt{\epsilon} + O\left(\epsilon^2\right)$ (très petite déformation)



(c) $\underline{\dot{z} = g(z,\, \epsilon) = \epsilon z - z^3}$ Bifurcation fourche

Points fixes	Stabilité $\partial_z g = \epsilon - 3z^2$
$z = 0$	$\partial_z g\left(0, \epsilon\right) = \epsilon$
$z = \pm\sqrt{\epsilon}$	$\partial_z g\left(\pm\sqrt{\epsilon}, \epsilon\right) = -2\sqrt{\epsilon}$

Variables originales: $\begin{array}{l} z = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \epsilon \\ z = \pm\sqrt{\epsilon} \Rightarrow y,\, x = \pm\sqrt{\epsilon} + O\left(\epsilon\right) \end{array}$



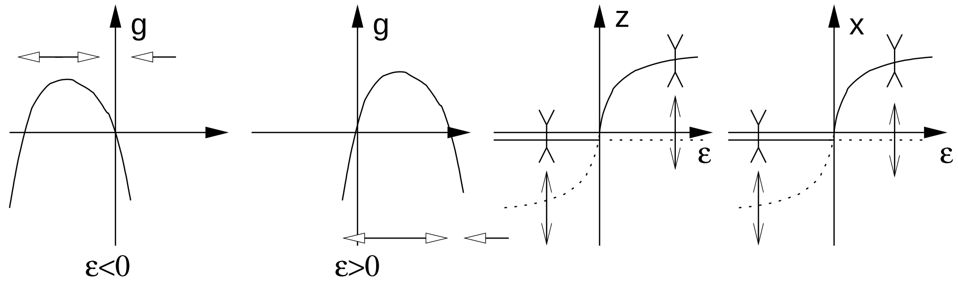
Remarque:

Pour montrer que $z = \pm\sqrt{\epsilon} + O\left(\epsilon\right)$ est effectivement solution de l'Eq. 3 équivalent zéro, et ce en tenant compte des termes néligés, on pose $\epsilon = \mu^2$, $z = \pm\mu(1 + \mu\eta(\mu))$, et on applique le théorème des fonctions implicites aux variables $(\eta(\mu),\, \mu)$.

(d) $\underline{\dot{z} = g(z,\, \epsilon) = \epsilon z - z^4}$ Bifurcation très peu générique

Points fixes	Stabilité $\partial_z g = \epsilon - 4z^3$
$z = 0$	$\partial_z g\left(0, \epsilon\right) = \epsilon$
$z = \epsilon^{1/3}$	$\partial_z g\left(\epsilon^{1/3}, \epsilon\right) = -3\epsilon$

Variables originales: $\begin{array}{l} z = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ z = \epsilon^{1/3} \Rightarrow y,\, x = \epsilon^{1/3} + O\left(\epsilon^{2/3}\right) \end{array}$


g
ε<0
g
ε>0
z
ε
x
ε