

PHENOMENES NON-LINEAIRES ET CHAOS

Corrigé de la série 8: Théorie de Floquet

Exercice 15 Equation de Hill

L'équation de Hill s'écrit comme suit

$$\ddot{x} = -\omega^2(t)x$$

$$\omega(t) = \begin{cases} \Omega & \text{si } nT < t < (n + \frac{1}{2})T \\ 1 & \text{si } (n + \frac{1}{2})T < t < (n + 1)T \end{cases}$$

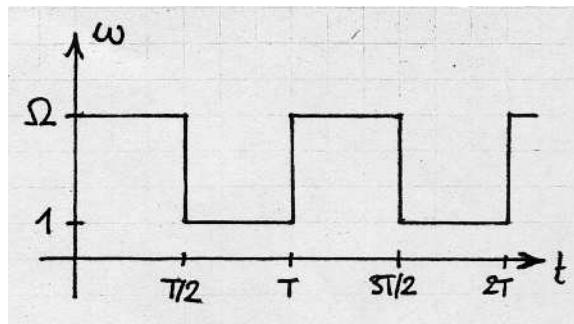


Figure 1: Graphe de $\omega(t)$

1. En posant $y = \dot{x}$, l'équation devient

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2(t)x \end{cases}$$

C'est un système conservatif, mais non autonome. On peut également introduire $z = \frac{2\pi}{T}t \pmod{2\pi}$, et on a

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \left(\frac{T}{2\pi} z \right) x \\ \dot{z} = \frac{2\pi}{T} \quad z \in S^1 \end{cases}$$

C'est alors un système conservatif autonome, possédant l'orbite périodique $(x = 0, y = 0, z \in S^1)$. Calculer les multiplicateurs de Floquet revient à étudier la section de Poincaré $z = 0 \equiv 2\pi$, i.e. (x_T, y_T) en fonction de (x_0, y_0) .

2. Considérons l'équation

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a plusieurs manières de la résoudre: on peut se souvenir de la solution générale. On peut également calculer l'exponentielle de A par sa série, en

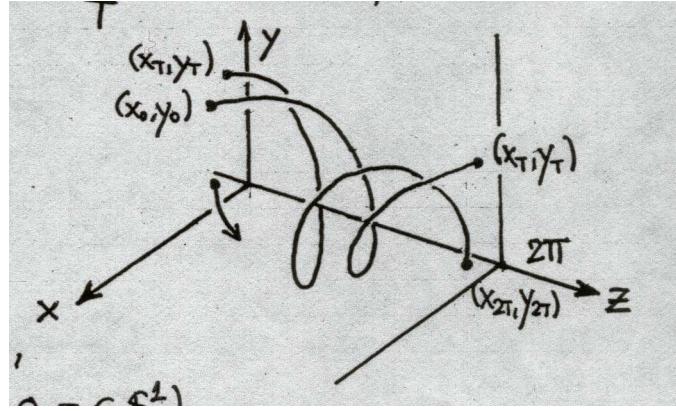


Figure 2:

remarquant que $A^2 = -\omega^2 \mathbb{I}$, $A^3 = -\omega^2 A$, $A = \omega^4 \mathbb{I}$, etc...
Ainsi,

$$\begin{aligned} e^{A(\omega)t} &= \mathbb{I} + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \frac{A^4}{4!}t^4 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\omega^2}{2!}t^2 + \frac{\omega^4}{4!}t^4 + \dots\right)\mathbb{I} + \left(\omega t - \frac{\omega^3}{3!}t^3 + \dots\right)\frac{A}{\omega} \\ &= \cos \omega t \mathbb{I} + \sin \omega t \frac{A}{\omega} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarquons que $\det e^{A(\omega)t} = 1$. On a donc

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{T/2} \\ y_{T/2} \end{pmatrix} &= \exp A(\Omega)T/2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix} &= \exp A(1)T/2 \begin{pmatrix} x_{T/2} \\ y_{T/2} \end{pmatrix} = \underbrace{\exp A(1)T/2 \exp A(\Omega)T/2}_V \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} V &= \begin{pmatrix} \cos \frac{T}{2} & \sin \frac{T}{2} \\ -\sin \frac{T}{2} & \cos \frac{T}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega \frac{T}{2} & \frac{1}{\Omega} \sin \Omega \frac{T}{2} \\ -\Omega \sin \Omega \frac{T}{2} & \cos \Omega \frac{T}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{T}{2} \cos \Omega \frac{T}{2} - \Omega \sin \frac{T}{2} \sin \Omega \frac{T}{2} & \frac{1}{\Omega} \cos \frac{T}{2} \sin \Omega \frac{T}{2} + \sin \frac{T}{2} \cos \Omega \frac{T}{2} \\ -\sin \frac{T}{2} \cos \Omega \frac{T}{2} - \Omega \cos \frac{T}{2} \sin \Omega \frac{T}{2} & \cos \frac{T}{2} \cos \Omega \frac{T}{2} - \frac{1}{\Omega} \sin \frac{T}{2} \sin \Omega \frac{T}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Et on a $\det V = \det e^{A(1)T/2} \cdot \det e^{A(\Omega)T/2} = 1$, ce qui est dû au fait que le système est conservatif.

3. Les multiplicateurs de Floquet sont les valeurs propres λ_{\pm} de V . En effet, l'application $(x_0, y_0) \rightarrow (x_T, y_T)$ est bien la restriction à la section de Poincaré $z = 0$ de l'application $(x_0, y_0, z_0) \rightarrow (x_T, y_T, z_T)$.

Pour une matrice 2×2 :

$$\begin{cases} \lambda_+ \cdot \lambda_- = \det V \\ \lambda_+ + \lambda_- = \text{Tr } V \end{cases} \Leftrightarrow \lambda^2 - \text{Tr } V \lambda + \det V = 0$$

d'où

$$\lambda_{\pm} = \frac{\text{Tr } V}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{Tr } V}{2}\right)^2 - \det V}$$

Dans notre cas, $\det V = 1$ et $\text{Tr } V = \tau(\Omega, T) = 2 \cos \frac{T}{2} \cos \Omega \frac{T}{2} - (\Omega + \frac{1}{\Omega}) \sin \frac{T}{2} \sin \Omega \frac{T}{2}$ et $\lambda_{\pm} = \frac{\tau}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 - 1}$. On a donc les deux cas suivants qui correspondent à un module de λ_{\pm} inférieur ou respectivement supérieur à 1.

- Si $|\tau| \leq 2$: $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\theta}$ où $\theta = \arccos \frac{\tau}{2}$. L'origine est *stable* car V est une matrice de rotation.
- Si $|\tau| > 2$: $\lambda_{\pm} = \text{sign}(\tau) e^{\pm \eta}$ où $\eta = \text{arccosh} \frac{|\tau|}{2}$. L'origine est *instable* (hyperbolique), presque toutes les trajectoires divergent.

Notons que si $|\tau| \leq 2$, les orbites sont *périodiques*, de période q , si $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, car on a alors $V^q = \mathbb{I}$. Si au contraire $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, l'orbite est *quasi-périodique*, et remplit donc une ellipse de manière dense.

Si $T = \pi$, on obtient $\tau = -\left(\Omega + \frac{1}{\Omega}\right) \sin \Omega \frac{\pi}{2}$.

On voit que

$$\begin{aligned} \tau(2k, \pi) &= 0 \quad k \in \mathbb{Z} \\ \tau(4k+1, \pi) &= -\left(4k+1 + \frac{1}{4k+1}\right) \leq -2 \quad \text{si } k \in \mathbb{N} \\ \tau(4k+3, \pi) &\geq 2 \quad \text{si } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

On voit que l'origine est *stable* si Ω appartient à des *bandes* localisées autour

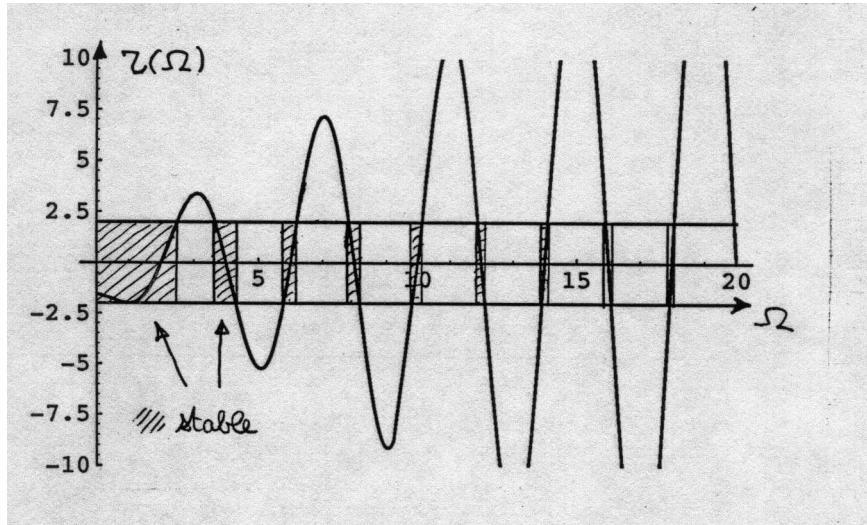


Figure 3: τ en fonction de Ω

de $\Omega = 2k$. Lorsque $T \neq \pi$, le comportement est qualitativement le même, sauf pour $T = 2\pi$, où l'origine est toujours stable.

Les orbites sont formées d'arcs de cercles et d'ellipses (Fig. 4a). Si l'origine est

stable, les points (x_{kT}, y_{kT}) appartiennent à une ellipse, et l'orbite est quasi-périodique (Fig. 4b) ou périodique (Fig. 5a). Si l'origine est instable, les points (x_{kT}, y_{kT}) appartiennent à une hyperbole (Fig. 5b). On a alors un phénomène d'*instabilité paramétrique* (effet de balançoire): une superposition de mouvements stables en *résonance* créent l'instabilité.

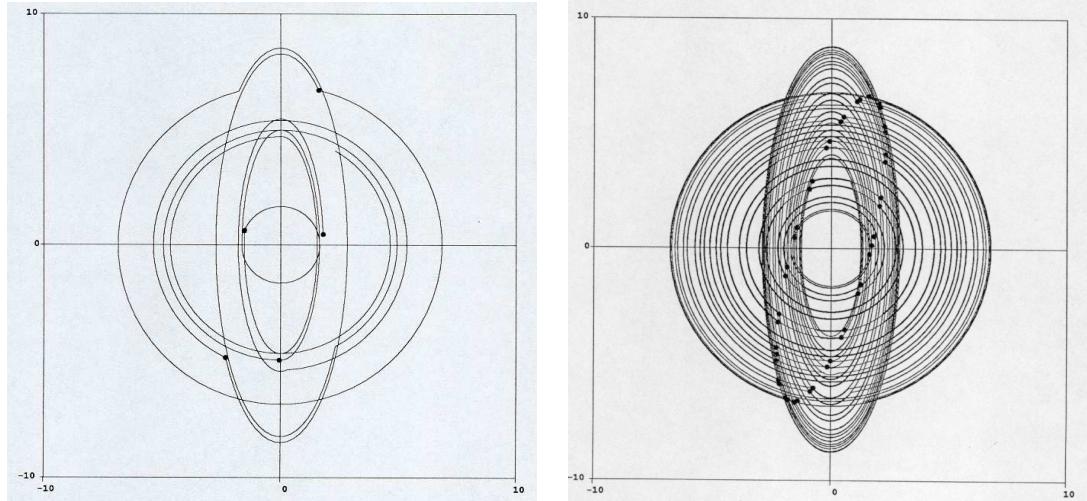


Figure 4: Equation de Hill avec $T = 1.0$ et $\Omega = 3.0$

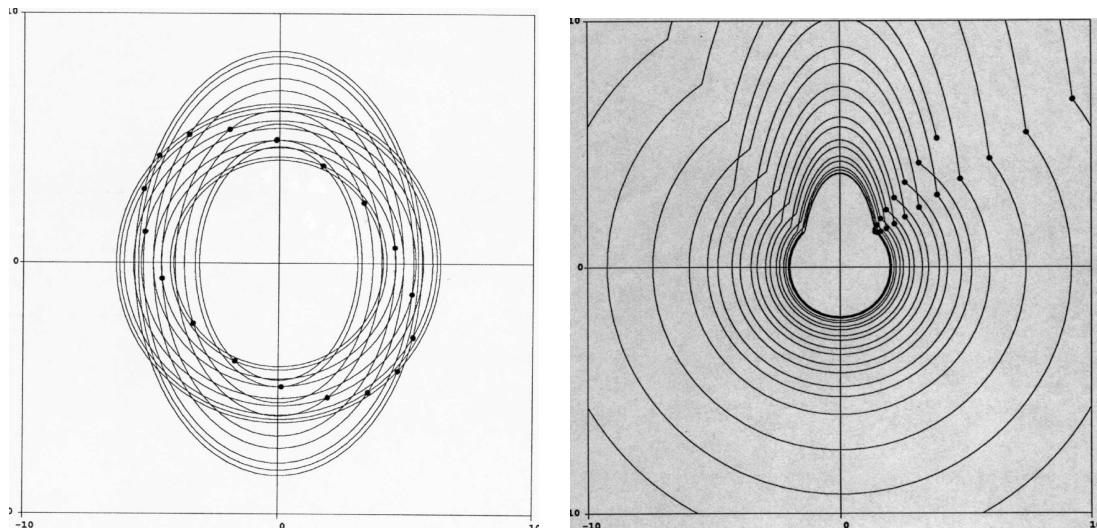


Figure 5: Equation de Hill avec $T = 3.142$ et $\Omega = 1.5$, $\Omega = 2.5$