

---

# PHENOMENES NON-LINEAIRES ET CHAOS

## Corrigé de la série 8: Théorie de Floquet

---

### Exercice 15 Equation de Hill

L'équation de Hill s'écrit comme suit

$$\ddot{x} = -\omega^2(t)x$$
$$\omega(t) = \begin{cases} \Omega & \text{si } nT < t < (n + \frac{1}{2})T \\ 1 & \text{si } (n + \frac{1}{2})T < t < (n + 1)T \end{cases}$$

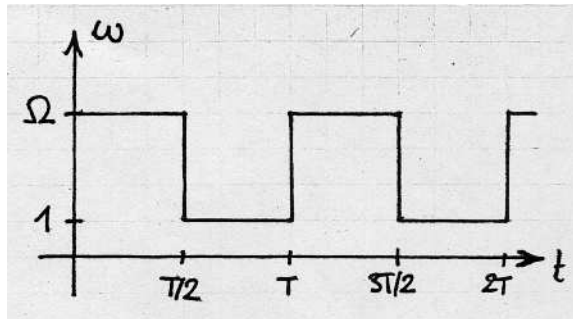


Figure 1: Graphe de  $\omega(t)$

1. En posant  $y = \dot{x}$ , l'équation devient

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2(t)x \end{cases}$$

C'est un système conservatif, mais non autonome. On peut également introduire  $z = \frac{2\pi}{T}t \pmod{2\pi}$ , et on a

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2\left(\frac{T}{2\pi}z\right)x \\ \dot{z} = \frac{2\pi}{T} \quad z \in \mathcal{S}^1 \end{cases}$$

C'est alors un système conservatif autonome, possédant l'orbite périodique  $(x = 0, y = 0, z \in \mathcal{S}^1)$ . Calculer les multiplicateurs de Floquet revient à étudier la section de Poincaré  $z = 0 \equiv 2\pi$ , i.e.  $(x_T, y_T)$  en fonction de  $(x_0, y_0)$ .

2. Considérons l'équation

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a plusieurs manières de la résoudre: on peut se souvenir de la solution générale. On peut également calculer l'exponentielle de  $A$  par sa série, en

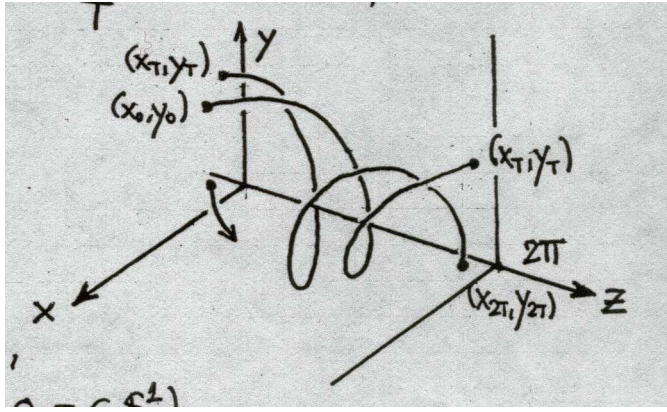


Figure 2:

remarquant que  $A^2 = -\omega^2 \mathbb{I}$ ,  $A^3 = -\omega^2 A$ ,  $A = \omega^4 \mathbb{I}$ , etc...  
Ainsi,

$$\begin{aligned}
 e^{A(\omega)t} &= \mathbb{I} + At + \frac{A^2}{2!}t^2 + \frac{A^3}{3!}t^3 + \frac{A^4}{4!}t^4 + \dots \\
 &= \left(1 - \frac{\omega^2}{2!}t^2 + \frac{\omega^4}{4!}t^4 + \dots\right) \mathbb{I} + \left(\omega t - \frac{\omega^3}{3!}t^3 + \dots\right) \frac{A}{\omega} \\
 &= \cos \omega t \mathbb{I} + \sin \omega t \frac{A}{\omega} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Remarquons que  $\det e^{A(\omega)t} = 1$ . On a donc

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x_{T/2} \\ y_{T/2} \end{pmatrix} &= \exp A(\Omega)T/2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix} &= \exp A(1)T/2 \begin{pmatrix} x_{T/2} \\ y_{T/2} \end{pmatrix} = \underbrace{\exp A(1)T/2 \exp A(\Omega)T/2}_V \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 V &= \begin{pmatrix} \cos \frac{T}{2} & \sin \frac{T}{2} \\ -\sin \frac{T}{2} & \cos \frac{T}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Omega \frac{T}{2} & \frac{1}{\Omega} \sin \Omega \frac{T}{2} \\ -\Omega \sin \Omega \frac{T}{2} & \cos \Omega \frac{T}{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \frac{T}{2} \cos \Omega \frac{T}{2} - \Omega \sin \frac{T}{2} \sin \Omega \frac{T}{2} & \frac{1}{\Omega} \cos \frac{T}{2} \sin \Omega \frac{T}{2} + \sin \frac{T}{2} \cos \Omega \frac{T}{2} \\ -\sin \frac{T}{2} \cos \Omega \frac{T}{2} - \Omega \cos \frac{T}{2} \sin \Omega \frac{T}{2} & \cos \frac{T}{2} \cos \Omega \frac{T}{2} - \frac{1}{\Omega} \sin \frac{T}{2} \sin \Omega \frac{T}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Et on a  $\det V = \det e^{A(1)T/2} \cdot \det e^{A(\Omega)T/2} = 1$ , ce qui est dû au fait que le système est conservatif.

3. Les multiplicateurs de Floquet sont les valeurs propres  $\lambda_{\pm}$  de  $V$ . En effet, l'application  $(x_0, y_0) \rightarrow (x_T, y_T)$  est bien la restriction à la section de Poincaré  $z = 0$  de l'application  $(x_0, y_0, z_0) \rightarrow (x_T, y_T, z_T)$ .

Pour une matrice  $2 \times 2$  :

$$\begin{cases} \lambda_+ \cdot \lambda_- = \det V \\ \lambda_+ + \lambda_- = \text{Tr } V \end{cases} \Leftrightarrow \lambda^2 - \text{Tr } V \lambda + \det V = 0$$

d'où

$$\lambda_{\pm} = \frac{\text{Tr } V}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{Tr } V}{2}\right)^2 - \det V}$$

Dans notre cas,  $\det V = 1$  et  $\text{Tr } V = \tau(\Omega, T) = 2 \cos \frac{T}{2} \cos \Omega \frac{T}{2} - (\Omega + \frac{1}{\Omega}) \sin \frac{T}{2} \sin \Omega \frac{T}{2}$  et  $\lambda_{\pm} = \frac{\tau}{2} \pm \sqrt{(\frac{\tau}{2})^2 - 1}$ . On a donc les deux cas suivants qui correspondent à un module de  $\lambda_{\pm}$  inférieur ou respectivement supérieur à 1.

- Si  $|\tau| \leq 2$ :  $\lambda_{\pm} = e^{\pm i\theta}$  où  $\theta = \arccos \frac{\tau}{2}$ . L'origine est *stable* car  $V$  est une matrice de rotation.
- Si  $|\tau| > 2$ :  $\lambda_{\pm} = \text{sign}(\tau) e^{\pm \eta}$  où  $\eta = \text{arccosh} \frac{|\tau|}{2}$ . L'origine est *instable* (hyperbolique), presque toutes les trajectoires divergent.

Notons que si  $|\tau| \leq 2$ , les orbites sont *périodiques*, de période  $q$ , si  $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , car on a alors  $V^q = \mathbb{I}$ . Si au contraire  $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , l'orbite est *quasi-périodique*, et remplit donc une ellipse de manière dense.

Si  $T = \pi$ , on obtient  $\tau = -(\Omega + \frac{1}{\Omega}) \sin \Omega \frac{\pi}{2}$ .

On voit que

$$\tau(2k, \pi) = 0 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tau(4k+1, \pi) = -\left(4k+1 + \frac{1}{4k+1}\right) \leq -2 \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

$$\tau(4k+3, \pi) \geq 2 \quad \text{si } k \in \mathbb{N}$$

On voit que l'origine est *stable* si  $\Omega$  appartient à des *bandes* localisées autour

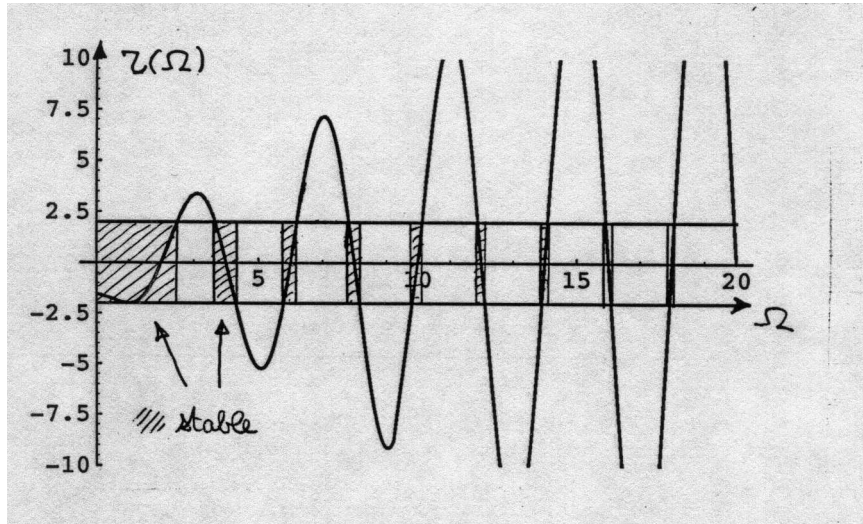


Figure 3:  $\tau$  en fonction de  $\Omega$

de  $\Omega = 2k$ . Lorsque  $T \neq \pi$ , le comportement est qualitativement le même, sauf pour  $T = 2\pi$ , où l'origine est toujours stable.

Les orbites sont formées d'arcs de cercles et d'ellipses (Fig. 4a). Si l'origine est

stable, les points  $(x_{kT}, y_{kT})$  appartiennent à une ellipse, et l'orbite est quasi-périodique (Fig. 4b) ou périodique (Fig. 5a). Si l'origine est instable, les points  $(x_{kT}, y_{kT})$  appartiennent à une hyperbole (Fig. 5b). On a alors un phénomène d'*instabilité paramétrique* (effet de balançoire): une superposition de mouvements stables en *résonance* créent l'instabilité.

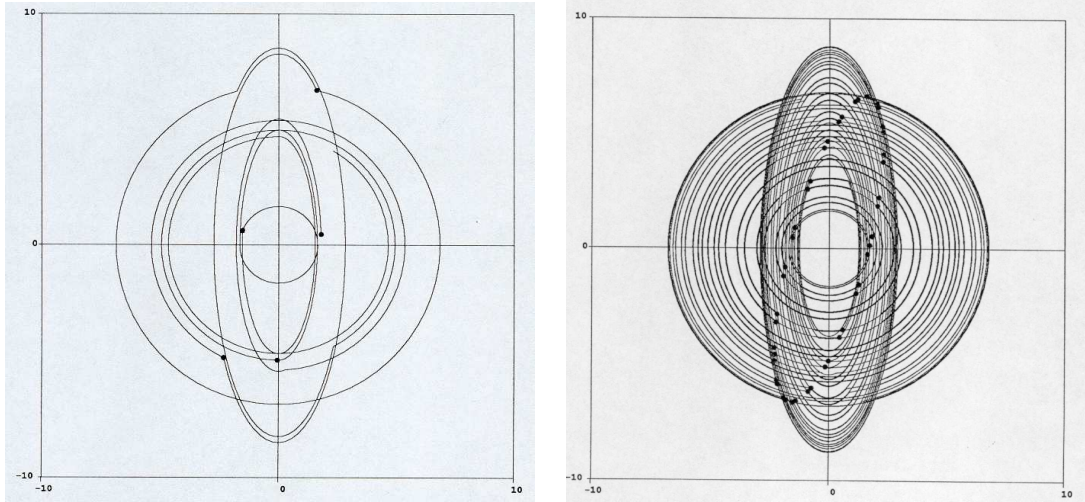


Figure 4: Equation de Hill avec  $T = 1.0$  et  $\Omega = 3.0$

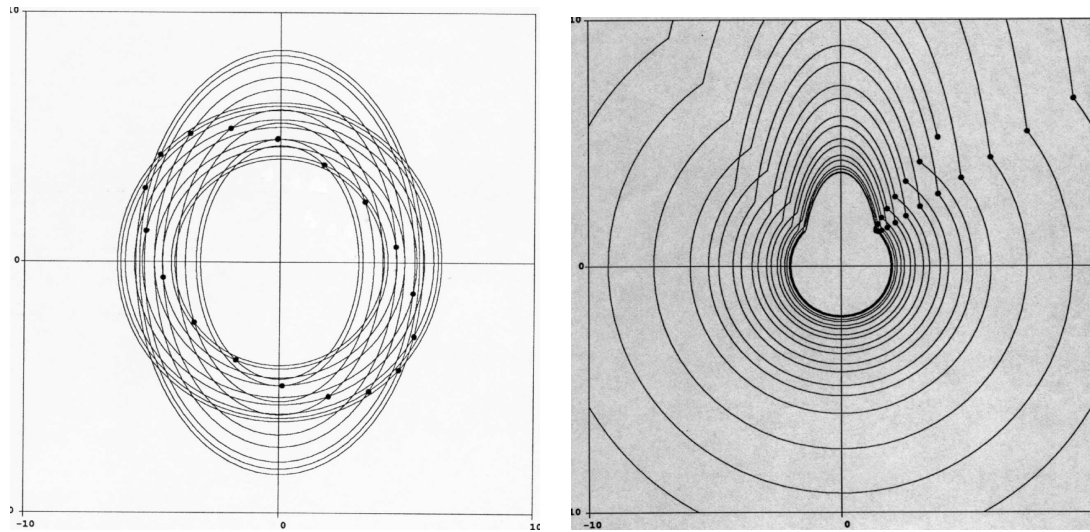


Figure 5: Equation de Hill avec  $T = 3.142$  et  $\Omega = 1.5, \Omega = 2.5$