# PHENOMENES NON-LINEAIRES ET CHAOS

## Corrigé de la série 7: Fonctions de Liapunov

Théorème:

Considérons l'équation $\dot{x} = X(x)$ et supposons que $X(x^*) = 0$. Supposons qu'il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de $x^*$ et une fonction $V \in C^1(\mathcal{W}\backslash\{x^*\})$ telle que $\forall x \in \mathcal{W}\backslash\{x^*\}$:

- $V(x) > V(x^*)$
- $\dot{V}(x) \leq 0$

alors $x^*$ est *stable*. Si de plus

- $\dot{V}(x) < 0$

alors $x^*$ est *asymptotiquement stable*. Pour la démonstration, voir par exemple, Hirsch et Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, NY (1974), page 192.

## Exercice 13 *Pendule amorti (suite)*

Soit le système

$$\ddot{\theta} = -\alpha\dot{\theta} - \sin\theta \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\alpha\omega - \sin\theta \end{cases}$$

Energie:

$$E(\theta,\omega) = \frac{1}{2}\omega^2 - \cos\theta$$

$$\begin{aligned}\dot{E} = \nabla E \cdot X &= \frac{\partial E}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial E}{\partial\omega}\dot{\omega} \\ &= \omega\sin\theta + \omega\left(-\alpha\omega - \sin\theta\right) = -\alpha\omega^2\end{aligned}$$

1. Lorsque $\alpha = 0$: l'énergie est une constante du mouvement. Les orbites sont données par les courbes $E = cte$, qui sont formées au voisinage de l'origine $(\omega = \pm\sqrt{2(E+\cos\theta)},\ -1 < E < 0)$. L'origine est donc *stable*.

2. Lorsque $\alpha > 0$: $E$ est une fonction de Liapunov car $E(\theta,\omega) > E(0,0) = -1$ si $\omega \neq 0$ ou si $\cos\theta \neq -1$. Comme $\dot{E} \leq 0$, mais $\dot{E} = 0$ si $\omega = 0$, le théorème montre que l'origine est stable, mais on n'arrive pas à montrer la stabilité asymptotique avec cette fonction de Liapunov.

3. Pour montrer que l'origine est asymptotiquement stable lorsque $\alpha > 0$ nous allons construire une fonction de liapunov en *déformant* l'énergie.

$$V(\theta,\omega) = \frac{1}{2}\left(\omega^2 + \beta\omega\sin\theta + \gamma\cos\theta\right)$$

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial V}{\partial \omega}\dot{\omega} = \left(\frac{1}{2}\beta\cos\theta - \alpha\right)\omega^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\alpha\beta\right)\omega\sin\theta - \frac{1}{2}\beta\sin^2\theta$$

Si nous choisissons $\gamma = -(2+\alpha\beta)$ afin d'annuler le terme mixte,

$$\dot{V} = \left(\frac{1}{2}\beta\cos\theta - \alpha\right)\omega^2 - \frac{1}{2}\beta\sin^2\theta$$

donc $\dot{V} < 0$ dès que $\omega \neq 0$ ou $\sin\theta \neq 0$ pourvu que les coefficients de $\omega^2$ et $\sin^2\theta$ soient négatifs. Il faut ainsi que $\underline{\beta > 0}$ et $\frac{1}{2}\beta\cos\theta - \alpha < 0$, i.e. $\underline{\beta < 2\alpha}$ comme $|\cos\theta| \leq 1$. Nous pouvons donc choisir, par exemple $\underline{\beta = \alpha}$. Il nous reste à vérifier que $(0,0)$ est un minimum (non dégénéré) de $V$.

Rappel: au voisinage d'un point stationnaire $x^*$ ($\nabla V = 0$), on a

$$V(x) = V(x^*) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x^*)\,(x_i - x_i^*)\,(x_j - x_j^*) + O\left(|x - x^*|^3\right)$$

Soit $H(x)$, la matrice *hessienne* d'éléments $H_{ij}(x) = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x)$. $H$ est une matrice symétrique, diagonalisable. $x^*$ est un *minimum* si $H(x^*)$ est *définie positive*, et un *maximum* si $H(x^*)$ est *définie négative*.

A deux dimensions, si $H(x^*) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$, les valeurs propres sont solutions de $\lambda^2 - (r+t)\lambda + rt - s^2 = 0$. $x^*$ est donc un minimum si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, respectivement un maximum si $rt - s^2 < 0$ et $r < 0$, enfin un point selle si seulement $rt - s^2 < 0$.

Dans notre cas, $r = -\frac{1}{2}\gamma$, $s = \frac{1}{2}\beta$ et $t = 1$, donc $rt - s^2 = \frac{4+\alpha^2}{4} > 0$. La fonction

$$V(\theta,\omega) = \frac{1}{2}\left(\omega^2 + \alpha\omega\sin\theta - (2+\alpha^2)\cos\theta\right)$$

est donc une fonction de Liapunov pour l'origine. (Le voisinage $\mathcal{W}$ est donné par $\{(\theta,\omega)\,|V(\theta,\omega) < V(\pi,0)\}$)

## Exercice 14 *Modèle de Volterra*

Soit le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1 x(1-y) \\ \dot{y} = -k_2 y(1-x) \end{cases} \quad k_1, k_2 > 0$$

1. Points d'équilibre:
   Il existe deux points d'équilibre, $(0,0)$ et $(1,1)$.
   - $M(0,0) = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}$, soit un point hyperbolique.
   - $M(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 \\ k_2 & 0 \end{pmatrix}$, soit $\lambda_\pm = \pm i\sqrt{k_1 k_2}$, un point elliptique.

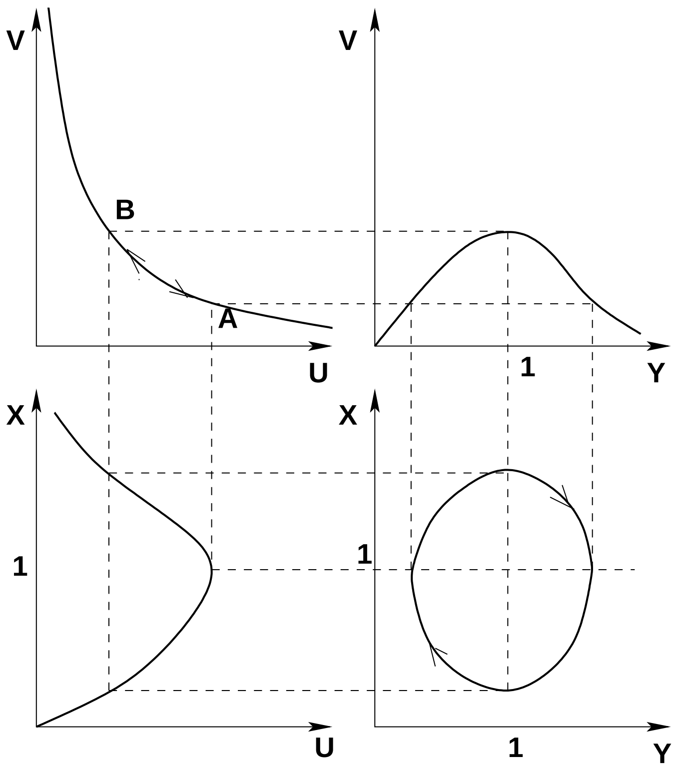


Figure 1: Orbites périodiques.

2. Constante du mouvement:

On a $\frac{dy}{dx} = -\frac{k_2 y(1-x)}{k_1 x(1-y)}$ qui entraîne

$$-\frac{1-y}{k_2 y} dy = \frac{1-x}{k_1 x} dx$$

En intégrant:

$$\frac{1}{k_2}(\ln y - y) + \frac{1}{k_1}(\ln x - x) = Cste\ d'intégration$$

On prend l'exponentielle: $(ye^{-y})^{\frac{1}{k_2}} \cdot (xe^{-x})^{\frac{1}{k_1}} = Cste$. On choisit donc

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = (xe^{-x})^{\frac{1}{k_1}} \\ v(y) = (ye^{-y})^{\frac{1}{k_2}} \end{array} \right. \Rightarrow u(x_t)v(y_t) = u(x_0)v(y_0)$$

Il est facile de vérifier que la fonction $u(x)$ satisfait $u(0) = 0$, $u(x) > 0$ si $x > 0$, $u(x) \to 0$ si $x \to \infty$, et $u(x)$ admet un unique maximum , situé en $x = 1$, car $u'(x) = \frac{1}{k_1} (xe^{-x})^{\frac{1}{k_1}} \left(\frac{1}{x} - 1\right)$.
La fonction $v(y)$ a le même comportement.

3. Orbites périodiques:
Dans le plan $(u, v)$, les orbites appartiennent à des hyperboles. Comme $u$ et $v$ admettent des valeurs maximales, le mouvement sur l'hyperbole est borné par deux points $A$ et $B$. Le mouvement dans le plan $(x, y)$ est donc également borné, la construction montre qu'il est *périodique*.

4. Valeurs moyennes:

Comme $\frac{\dot{x}}{x} = k_1(1-y)$, en intégrant de 0 à $T$,

$$\ln x(T) - \ln x(0) = k_1 \left( T - \int_0^T y(t)dt \right)$$

$T$ étant la période, $x(T) = x(0)$ ce qui implique donc que

$$0 = k_1 T \left( 1 - \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T y(t)dt}_{\bar{y}} \right)$$

d'où $\bar{y} = 1$, et, de même $\bar{x} = 1$.