Corrigé 6. Fonction de Liapunov, variété centrale

Exercice 12. Modèle de Lorenz, 2e partie

Soit le modèle de Lorenz

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & \sigma(y-x) \\ \dot{y} & = & -xz+rx-y \\ \dot{z} & = & xy-bz \end{array}\right. \iff \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}(t)\right) \tag{1}$$

avec $b > 0$, $\sigma > 0$, $r > 0$, pour lequel on donne la fonction de Liapunov

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(rx^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2\right). \tag{2}$$

Fonction de Liapunov

Pour la détermination du bassin d'attraction global, on utilise le théorème suivant.

Théorème (Liapunov)**.** *Soit $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ un système non-linéaire pour lequel $\boldsymbol{x} = 0$ est un point d'équilibre. Soit $V(\boldsymbol{x})$ une fonction définie positive ($V(0) = 0$ et $V(\boldsymbol{x}) > 0$, $\forall \boldsymbol{x} \neq 0$) et continuement différentiable. Alors si $\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) \leq 0\ \forall \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} = 0$ est un point d'équilibre stable (asymptotiquement si l'inégalité est stricte).*

Esquisse de preuve[1] : considérer les surfaces $V(\boldsymbol{x}) = c$, dites surfaces de Liapunov (voir figure 2.6 du polycopié). Si $\dot{V} \leq 0$, une trajectoire passant une surface $V(\boldsymbol{x}) = c$ sera prisonière du volume $V(\boldsymbol{x}) \leq c$ délimité par la surface de Liapunov, d'où la stabilité du point d'équilibre. Si $\dot{V} < 0$, la trajectoire sera prisonière de volumes délimités par une suite de surfaces de Liapunov de constantes décroissantes. Quand $t \to \infty$, $V(\boldsymbol{x}(t)) \to 0$, et (puisque $V(\boldsymbol{x}) = 0$ qu'en $\boldsymbol{x} = 0$) $\boldsymbol{x}(t) \to 0$, d'où la stabilité asymptotique du point d'équilibre.

Pour une équation différentielle $\boldsymbol{X} = \dot{\boldsymbol{x}}$ donnée, déterminer la fonction de Liapunov (si elle existe) n'est pas simple. Il existe cependant de bons candidats : $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}P\boldsymbol{x}$, avec P une matrice symmétrique définie positive, telle la fonction de Liapunov (2) en est un exemple.

Si $V(t) = V(\boldsymbol{x}(t))$ où $\boldsymbol{x}(t)$ est une trajectoire, on a

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{d}{dt} V\left(\boldsymbol{x}(t)\right) = \nabla V \cdot \boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{x}(t)\right) \\ &= \begin{pmatrix} rx \\ \sigma y \\ \sigma z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ -xz+rx-y \\ xy-bz \end{pmatrix} = -\sigma\left(bz^2 + rx^2 - 2rxy + y^2\right) \end{aligned}$$

[1]Pour preuve, voir Khalil, H.K., *Nonlinear Systems*, Prentice-Hall, 1996.

On complète le carré pour écrire $\dot{V}$ sous forme quadratique

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\sigma\left(bz^2 + rx^2 - 2rxy + y^2 - r^2x^2 + r^2x^2\right)\\ &= -\sigma\left[bz^2 + (y - rx)^2 + r\,(1-r)\,x^2\right]\end{aligned}$$

d'où on conclut,

- si $r < 1$, $\dot{V} < 0\ \forall\, \boldsymbol{x} \neq 0$, l'origine est donc asymptotiquement stable *globalement* ; c'est-à-dire que tout l'espace est le bassin d'attraction.
- si $r = 1$, on ne peut pas conclure car $\dot{V} = 0$ sur la droite $z = 0$, $x = y$.

Diagonalisation autour de 0 **lorsque** $r = 1$

Les valeurs propres de $M(0,0,0)$ sont alors $-b$, $-(\sigma+1)$ et 0. Les vecteurs propres associés, solutions de $(\lambda\mathbb{I} - M)\boldsymbol{z}_\lambda = 0$, sont

$$\boldsymbol{z}_{-b} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{z}_{-(\sigma+1)} = \begin{pmatrix}\sigma\\-1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{z}_0 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Ecrivons alors $\boldsymbol{x} = u\boldsymbol{z}_0 + v\boldsymbol{z}_{-(\sigma+1)} + w\boldsymbol{z}_{-b}$ donc

$$\left\{\begin{array}{l} x = u + \sigma v\\ y = u - v\\ z = w\end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} u = \frac{1}{\sigma+1}x + \frac{\sigma}{\sigma+1}y\\ v = \frac{1}{\sigma+1}x - \frac{1}{\sigma+1}y\\ w = z\end{array}\right. \tag{3}$$

En se servant de (1) et (3), on est à même d'obtenir le système (4) de la forme $\dot{\boldsymbol{u}} = A\boldsymbol{u} + B$ où B représente les termes non-linéaires. La variable u représente la variété centrale alors que les deux autres sont les variétés stables.

$$\begin{pmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -(\sigma+1) & 0\\ 0 & 0 & -b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{\sigma}{\sigma+1}(u+\sigma v)w\\ \frac{1}{\sigma+1}(u+\sigma v)w\\ (u+\sigma v)(u-v)\end{pmatrix} \tag{4}$$

Ce système s'écrit aussi

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{u} = f\,(u, \boldsymbol{v})\\ \dot{\boldsymbol{v}} = \mathcal{S}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}\,(u, \boldsymbol{v})\end{array}\right. \tag{5}$$

avec $\boldsymbol{v} = \left(\begin{smallmatrix}v\\ w\end{smallmatrix}\right)$, $\mathcal{S} = \left(\begin{smallmatrix}-(\sigma+1) & 0\\ 0 & -b\end{smallmatrix}\right)$ et

$$f\,(u, \boldsymbol{v}) = -\frac{\sigma}{\sigma+1}\,(u + \sigma v)\,w$$

$$\boldsymbol{g}\,(u, \boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma+1}(u+\sigma v)w\\ (u+\sigma v)(u-v)\end{pmatrix}$$

Mouvement sur la variété centrale

La variété centrale est (localement) de la forme $E^c = \{(u, \boldsymbol{h}(u))\} = \{(u, v(u), w(u))\}$. Le mouvement sur cette variété obéit à (5). Mais $\dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{h}}(u) = \frac{d\boldsymbol{h}}{du}\dot{u} = \frac{d\boldsymbol{h}}{du} f\left(u, \boldsymbol{h}(u)\right)$ d'où

$$\boldsymbol{h}(u) = \mathcal{S}^{-1}\left[\frac{d\boldsymbol{h}}{du} f\left(u, \boldsymbol{h}(u)\right) - \boldsymbol{g}\left(u, \boldsymbol{h}(u)\right)\right]$$

On peut approcher $\boldsymbol{h}(u)$ par une suite de fonctions $\boldsymbol{h}_n(u)$, avec

$$\begin{cases} \boldsymbol{h}_0(u) = 0 \\ \boldsymbol{h}_{n+1}(u) = \mathcal{S}^{-1}\left[\frac{d\boldsymbol{h}_n}{du} f\left(u, \boldsymbol{h}_n(u)\right) - \boldsymbol{g}\left(u, \boldsymbol{h}_n(u)\right)\right] \end{cases}$$

Le calcul à l'ordre $n = 1$ constitue *l'approximation adiabatique*.

$$\boldsymbol{h}_1(u) = -\mathcal{S}^{-1}\boldsymbol{g}(u, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u^2}{b} \end{pmatrix}$$

L'équation de la variété centrale est donc $E^c \simeq \left\{(u, 0, \frac{u^2}{b})\right\}$. Le mouvement sur cette variété est donné par

$$\boxed{\dot{u} \simeq f\left(u, \boldsymbol{h}_1(u)\right) = -\frac{\sigma}{\sigma+1}\frac{u^3}{b}}$$

L'origine reste donc stable si $r = 1$, mais la convergence est *beaucoup plus lente* qu'une exponentielle :

$$\boxed{u_t = \frac{1}{\sqrt{2kt + \frac{1}{u_0^2}}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \quad , \quad k = \frac{\sigma}{b(\sigma+1)}}$$