PHENOMENES NON-LINEAIRES ET CHAOS

Corrigé de la série 5: Points fixes et linéarisation

Exercice 10 *Application logistique*
On considère l'application logistique

$$f(x) = \lambda x(1-x) \quad 0 \le x \le 1,\, 0 < \lambda \le 4 \tag{1}$$

1. Points fixes:

$$f(x^*) = x^* \Rightarrow x^*(\lambda - \lambda x^* - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1^*(\lambda) = 0 \\ x_2^*(\lambda) = \frac{\lambda-1}{\lambda} \end{cases}$$

2. Linéarisation

Si $x_n = x^* + y_n$, on a

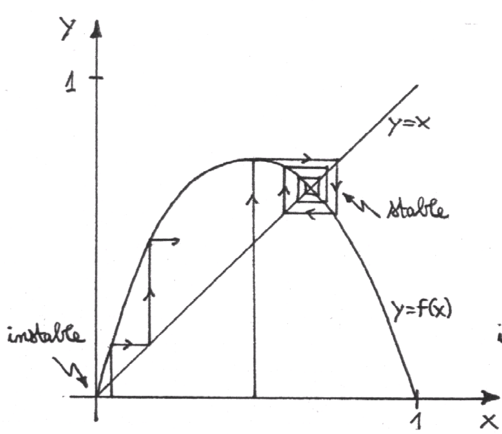
$$x^* + y_{n+1} = f\left(x^* + y_n\right) = \underbrace{f(x^*)}_{x^*} + f'(x^*)y_n + O\left(y_n^2\right)$$

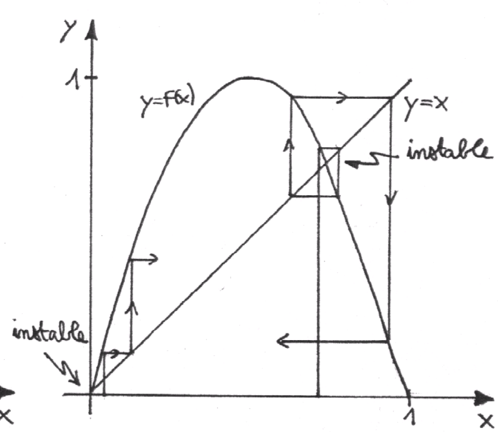
ce qui implique que

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= f'\left(x^*\right) y_n + O\left(y_n^2\right) \\ y_n &\simeq \left[f'(x^*)\right]^n y_0 \\ |y_n| &\simeq \left|f'(x^*)\right|^n |y_0| \end{aligned}$$

x^* est donc linéairement *stable* si $|f'(x^*)| < 1$, *instable* si $|f'(x^*)| > 1$. Dans notre cas, $f'(x) = \lambda(1-2x)$.

- $f'(x_1^*) = \lambda$ aussi x_1^* est stable si $\lambda < 1$ et instable si $\lambda > 1$.
- $f'(x_2^*) = 2 - \lambda$ aussi x_2^* est stable si $1 < \lambda < 3$ et instable si $\lambda > 3$ ou $\lambda < 1$. Toutefois dans le dernier cas on remarque que $x_2^* \notin [0;1]$.





3. Points fixes de f^2:

$$f^2(x) = \lambda f(x)\,(1 - f(x)) = \lambda^2 x(1-x)(1 - \lambda x + \lambda x^2)$$

On veut résoudre

$$\begin{aligned} 0 = x - f^2(x) &= x\left[\lambda^3 x^3 - 2\lambda^3 x^2 + \lambda^2(\lambda+1)x - \lambda^2 + 1\right] \\ &= x\left(\underbrace{\lambda x - \lambda + 1}_{\lambda(x - x_2^*(\lambda))}\right)\left(\lambda^2 x^2 - \lambda(\lambda+1)x + \lambda + 1\right) \end{aligned}$$

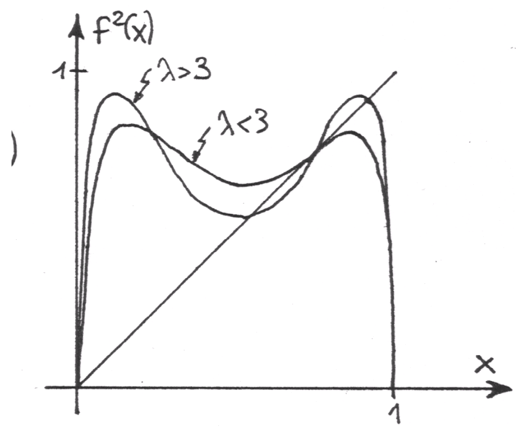
Nous avons utilisé le fait que $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ sont des points fixes de f^2. Si $\lambda > 3$, on a deux nouvelles solutions:

$$x_\pm^* = \frac{\lambda + 1 \pm \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}}{2\lambda}$$

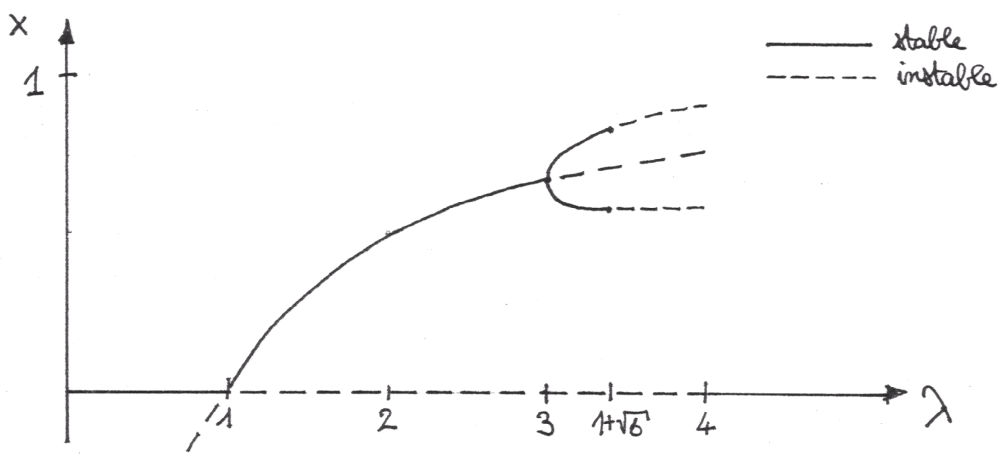
On vérifie que $x_\pm^*(\lambda = 3) = 2/3 = x_2^*(3)$ et $f(x_\pm^*) = x_\mp^*$. On a donc une orbite de période 2: $x_+^* \xmapsto{f} x_-^* \xmapsto{f} x_+^* \xmapsto{f} x_-^* \xmapsto{f} \ldots$. On peut calculer sa stabilité en notant que

$$\left[f^2(x_+^*)\right]' = f'(f(x_+^*)) \cdot f'(x_+^*) = f'(x_-^*) \cdot f'(x_+^*) = -\lambda^2 + 2\lambda + 4 = \left[f^2(x_-^*)\right]'$$

L'orbite est donc stable tant que $\lambda < 1 + \sqrt{6} \simeq 3.45$, puis instable.



4. Graphique



On remarque que le changement de stabilité d'un point fixe semble s'accompagner de la rencontre avec un autre point fixe ou une orbite périodique (en fait, pour $\lambda > 1+\sqrt{6}$, une orbite de période 4 apparaît). Ce phénomène est appelé *bifurcation.*

Exercice 11 *Application standard*

On considère l'application standard

$$\left\{\begin{array}{l} y_{n+1} = y_n - \frac{k}{2\pi}\sin 2\pi x_n \\ x_{n+1} = x_n + y_n - \frac{k}{2\pi}\sin 2\pi x_n \pmod 1 \end{array}\right. \tag{2}$$

1. Points fixes:

$$y_{n+1} = y_n \Rightarrow k\sin 2\pi x_n = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} k=0 \\ \text{où} \\ x^* = 0, 1/2 \end{array}\right.$$
$$x_{n+1} = x_n \Rightarrow y_n = 0 (\text{mod } 1) \Rightarrow y^* \in \mathbb{Z}$$

2. Linéarisation:
   Posons $x_n = x^* + \xi_n$, $y_n = y^* + \eta_n$ alors
$$\begin{pmatrix} \xi_{n+1} \\ \eta_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} + O\left(\xi_n\eta_n, \xi_n^2, \eta_n^2\right)$$
   où
$$A = \frac{D\vec{f}}{D\vec{x}}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 1 - k\cos 2\pi x^* & 1 \\ -k\cos 2\pi x^* & 1 \end{pmatrix}$$
   Comme $\det A = 1$, le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - \text{Tr } A\lambda + 1 = 0$ dont les valeurs propres sont
$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\text{Tr } A \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\text{Tr } A\right)^2 - 1}$$
   On a trois cas:
   (a) $|\text{Tr } A| > 2 \Rightarrow \lambda_\pm \in \mathbb{R}$, $|\lambda_+| > 1$, $|\lambda_-| < 1$: point hyperbolique.
   (b) $|\text{Tr } A| < 2 \Rightarrow |\lambda_\pm| = 1$, $\lambda_+ = \overline{\lambda_-}$: point elliptique.
   (c) $|\text{Tr } A| = 2 \Rightarrow \lambda_\pm = 1$ ou -1: point parabolique.

   Dans notre cas, $\text{Tr } A = 2 - k\cos 2\pi x^*$, donc
   (a) $k = 0$: $\text{Tr } A = 2$, point parabolique (les points sont instables, car on a $y_n = y_0$, $x_n = x_0 + ny_0$)
   (b) $k > 0$, $x^* = 1/2$: $\text{Tr } A = 2 + k > 2$, point hyperbolique (instable).
   (c) $k > 0$, $x^* = 0$, $\text{Tr} A = 2 - k$ ce qui implique que si $0 < k < 4$ le point est elliptique (linéairement stable), si $k = 4$ le point est parabolique est donc instable; enfin si $k > 4$, le point est hyperbolique est donc aussi instable.