

## Corrigé 4. Points fixes, linéarisation

### Exercice 6. Systèmes dynamiques linéaires

Soit le système dynamique linéaire

$$\dot{x} = Ax, \quad A \doteq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et  $x = (x, y)$  La solution de condition initiale  $x_0$  est

$$x(t) = e^{At}x_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} x_0. \quad (1)$$

La matrice  $A$  est telle que

$$A^{2k} = 1, \quad A^{2k+1} = A$$

Par conséquent on peut récrire la série de l'exponentielle de la manière suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \mathbb{I} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A = \cosh(t) + \sinh(t)A.$$

Introduisant ce résultat dans (1) on obtient

$$x(t) = (\cosh(t) + \sinh(t)A) x_0 = \begin{bmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{bmatrix} x_0.$$

On trouve donc

$$\begin{aligned} x(t) &= \cosh(t)x_0 + \sinh(t)y_0 \\ y(t) &= \sinh(t)x_0 + \cosh(t)y_0. \end{aligned}$$

### Exercice 7. Modèle de Lorenz (partie 1)

Soit le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (2)$$

où  $\sigma > 0$  fixé (dépend du fluide),  $r > 0$  un paramètre ( $r \sim \Delta T$ ) et  $b > 0$  fixé par le modèle ( $b = 8/3$ ).

### Points d'équilibres

Les points d'équilibres sont donnés par la condition  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = 0$  et  $\dot{z} = 0$  dans (2), soit

$$O = (0, 0, 0),$$

et

$$C_{\pm} = (\pm x_0, \pm x_0, r - 1).$$

où  $x_0 \doteq \sqrt{b(r-1)}$ . Les points  $C_{\pm}$  n'existent que si  $r \geq 1$ , avec  $C_{\pm} = O$  si  $r = 1$ .

### Linéarisation

On linéarise le système (2) pour obtenir  $\dot{x} = Mx + O(|x|^2)$  où  $M$  est la matrice jacobienne.

$$M(x, y, z) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix} \quad (3)$$

**Linéarisation autour de  $O$ .** La matrice jacobienne s'écrit

$$M(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont solutions du polynôme caractéristique  $c(\lambda)$  avec

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \det [\lambda - M(0, 0, 0)] \\ &= (\lambda + b)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0 \end{aligned}$$

soit  $\lambda_0 = -b < 0$  et  $\lambda_{\pm} = -\frac{\sigma+1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma+1)^2 - 4\sigma(1-r)}$ . Le signe des valeurs propres  $\lambda_{\pm}$  – et donc la nature du point fixe – évolue en fonction de  $r$ ; on a

- Pour  $0 < r < 1$ ,  $\lambda_{\pm} < 0$ . Le point fixe est un *puits*, puisque  $\dim E^- = 3$  et  $\dim E^+ = \dim E^0 = 0$ .
- Pour  $r = 1$ ,  $\lambda_- < 0$  et  $\lambda_+ = 0$ . Le point fixe est une *bifurcation*, puisque  $\dim E^- = 2$ ,  $\dim E^0 = 1$ , et  $\dim E^+ = 0$ .
- Pour  $r > 1$ ,  $\lambda_- < 0$  et  $\lambda_+ > 0$ . Le point fixe est un *point hyperbolique*, puisque  $\dim E^- = 2$ ,  $\dim E^0 = 0$ , et  $\dim E^+ = 1$ .

Le théorème de Lyapunov (théorème 2.2 du cours) montre que l'origine est asymptotiquement stable si  $r < 1$  (localement) et instable si  $r > 1$ . L'analyse linéaire ne permet pas de conclure pour  $r = 1$ .

**Linéarisation autour de  $C_{\pm}$ .** La matrice jacobienne s'écrit

$$M(\pm x_0, \pm x_0, r - 1) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -x_0 \\ x_0 & x_0 & -b \end{bmatrix}$$

et le polynôme caractéristique  $c(\lambda)$ ,

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \det [\lambda - M(0, 0, 0)] \\ &= \lambda^3 + \underbrace{(\sigma + b + 1)}_{a_1} \lambda^2 + \underbrace{b(r + \sigma)}_{a_2} \lambda + \underbrace{2\sigma b(r - 1)}_{a_3} \end{aligned}$$

Si  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres de la matrice  $M(\pm x_0, \pm x_0, r - 1)$ , alors on a également

$$\begin{aligned} c(\lambda) &= (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \\ &= \lambda^3 - (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)\lambda^2 + [(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_0 + \lambda_1\lambda_2]\lambda - \lambda_0\lambda_1\lambda_2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 &= -a_1 = -(\sigma + b + 1) < 0 \\ (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_0 + \lambda_1\lambda_2 &= a_2 = b(r + \sigma) > 0 \\ \lambda_0\lambda_1\lambda_2 &= -a_3 = -2b\sigma(r - 1) \begin{cases} = 0 & \text{si } r = 1 \\ < 0 & \text{si } r > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

L'analyse du cas  $r = 1$  est triviale puisque le polynôme caractéristique devient factorisable; on trouve comme valeurs propres  $0$ ,  $-b$ , et  $-(\sigma + 1)$ . Toutefois, on peut sans calcul déduire le signe des valeurs propres à partir de (4). En effet, une des valeurs propres se doit d'être nulle et la multiplication des deux autres doit être positive alors que leur addition est négative. Il s'ensuit que ces dernières ne peuvent être que négatives.

Pour  $r > 1$ , la condition  $\lambda_0\lambda_1\lambda_2 < 0$  implique qu'au moins une des valeurs propres est *réelle négative*, disons  $\lambda_0$ , donc  $\lambda_1\lambda_2 > 0$ . Si  $r = 1 + \epsilon$ , on doit avoir par continuité  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  *réelles négatives*. C'est-à-dire que les points  $C_{\pm}$  sont des *puits* dans un voisinage de  $r = 1$ . Ces points ne deviennent instables que si et seulement si la partie réelle de  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  devient positive. Comme  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ , ce n'est possible que si elles sont complexes conjuguées :

$$\begin{cases} \lambda_1 = Re^{i\theta} \\ \lambda_2 = Re^{-i\theta} \end{cases} \quad R > 0$$

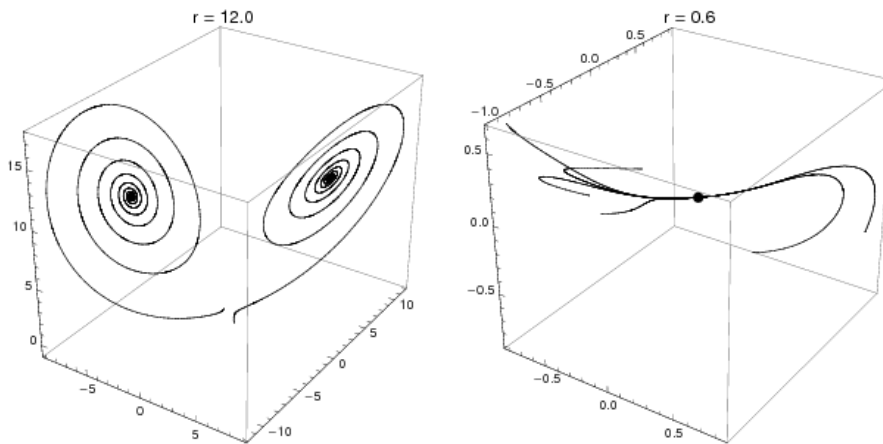


FIGURE 1 – Modèle de Lorenz. Quand  $1 < r < r_c$  (figure gauche), les trajectoires convergent vers les deux puits  $C_{\pm}$ . Quand  $r < 1$  (figure droite), les trajectoires convergent vers le puits  $O$  (point noir dans la figure).

Le système (4) devient alors

$$\begin{cases} \lambda_0 + 2R \cos \theta = -a_1 \\ 2R\lambda_0 \cos \theta + R^2 = a_2 \\ \lambda_0 R^2 = -a_3 \end{cases}$$

On a que  $\text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 = 0$  si  $\cos \theta = 0$ , donc si

$$\begin{cases} \lambda_0 = -a_1 \\ R^2 = a_2 \\ \lambda_0 R^2 = -a_3 \end{cases} \Rightarrow a_1 a_2 = a_3$$

Cela donne la valeur critique

$$r = r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

On vérifie que  $r_c > 1$  si  $\sigma > b + 1$ , et que  $\cos \theta$  devient positif lorsque  $r > r_c$ . Si  $\sigma \leq b + 1$ ,  $\text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2$  sont toujours négatifs.

En conclusion, la nature des points fixes  $C_{\pm}$  est la suivante (voir figure 1) :

- $r = 1$ , il s'agit d'une *bifurcation fourche de l'origine* car  $\dim E^- = 2$ ,  $\dim E^0 = 1$  et  $\dim E^+ = 0$ .
- $1 < r < r_c$ , il s'agit de *puits* car  $\dim E^- = 3$ ,  $\dim E^0 = 0$  et  $\dim E^+ = 0$ .

- $r = r_c$ , il s'agit d'une *bifurcation de Hopf* car  $\dim E^- = 1$ ,  $\dim E^0 = 2$  et  $\dim E^+ = 0$ .
- $r > r_c$ , il s'agit de *points hyperboliques* car  $\dim E^- = 1$ ,  $\dim E^0 = 0$  et  $\dim E^+ = 2$ .

### Exercice 9. Pendule amorti

Soit le système pour le pendule amorti suivant

$$\ddot{\theta} = -\alpha\dot{\theta} - \sin \theta \quad ; \quad \alpha \geq 0 \quad (5)$$

#### Système du premier ordre

La transformation de (5) en un système de premier ordre se fait en introduisant  $\omega = \dot{\theta}$ , on obtient alors

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\alpha\omega - \sin \theta \end{cases} \quad (6)$$

#### Points fixes

Les points fixes sont déterminés par les équations  $\omega = 0$  et  $\sin \theta = 0$  ce qui implique que  $\theta = 0$  et  $\pi$  dans l'intervalle qui nous intéresse.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1^* &= (0, 0)^T \\ \mathbf{x}_2^* &= (\pi, 0)^T \end{aligned}$$

#### Linéarisation autour de $(0, 0)$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \theta = 0 \quad (7)$$

Les valeurs propres sont  $\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$ , où  $\beta = \frac{\alpha}{2}$ . Il y a donc 4 cas :

- $\alpha = 0$ ,  $\lambda_{\pm} = \pm i$ , il s'agit du *centre* (linéairement stable).
- $0 < \alpha < 2$ ,  $\lambda_- = \overline{\lambda_+}$ ,  $\text{Re } \lambda_{\pm} = -\beta < 0$ , il s'agit d'un *foyer stable*.
- $\alpha = 2$ ,  $\lambda_+ = \lambda_- = -1$ , non diagonalisable, il s'agit d'un *noeud impropre*.
- $\alpha > 2$ ,  $\lambda_+ \neq \lambda_-$ ,  $\lambda_{\pm} \in \mathbb{R}_-$ , il s'agit d'un *noeud stable*.

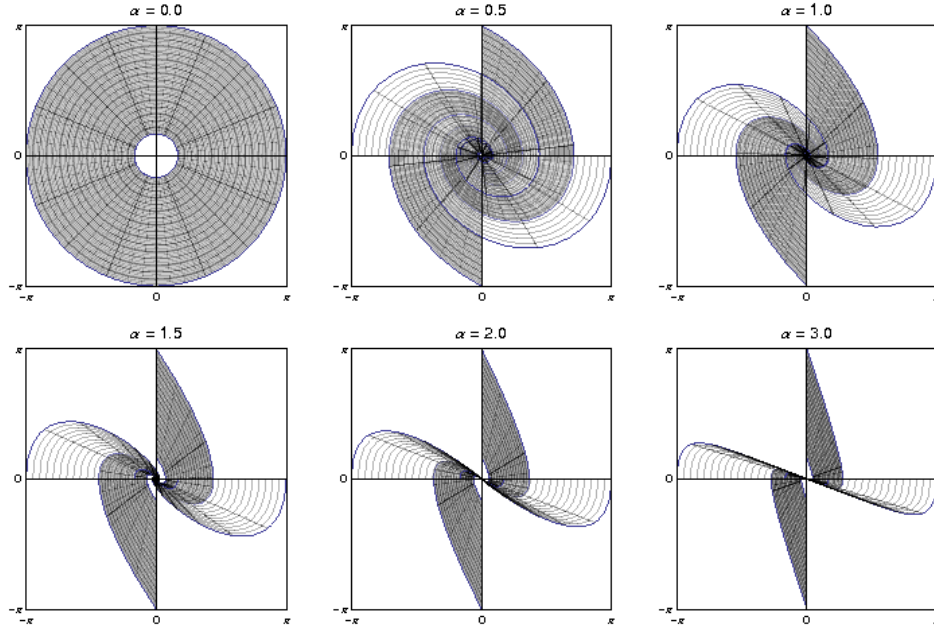


FIGURE 2 – Espace de phase du pendule amorti linéarisé autour de  $(\theta, \omega) = (0, 0)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Sont représentées les trajectoires de conditions initiales  $(\theta = 0, \omega \in A)$  (foncées) et  $(\theta \in A, \omega = 0)$  (claires) où  $A = [-\pi, -\pi/6] \cup [\pi/6, \pi]$ .

Afin d'illustrer la méthode discutée au cours, calculons explicitement les solutions de Eq. 7, avec condition initiale  $x(0) = (\theta_0, \omega_0)$ . Les vecteurs propres de la matrice sont  $z_{\pm} = (1, \lambda_{\pm})$ . Nous aimerions décomposer  $x(0) = \alpha_+ z_+ + \alpha_- z_-$ , que l'on peut écrire  $x(0) = \mathcal{Z}\alpha$  où  $\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{bmatrix}$ . On a donc  $\alpha = \mathcal{Z}^{-1}x(0)$  avec  $\mathcal{Z}^{-1} = \frac{1}{(\lambda_+ - \lambda_-)} \begin{bmatrix} -\lambda_- & 1 \\ \lambda_+ & -1 \end{bmatrix}$  d'où

$$\begin{cases} \alpha_+ = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2 - 1}} (\omega_0 - \lambda_- \theta_0) \\ \alpha_- = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2 - 1}} (\lambda_+ \theta_0 - \omega_0) \end{cases} \quad (8)$$

La solution de (7) est donc

$$x(t) = \text{Re} \left[ \alpha_+ e^{\lambda_+ t} z_+ + \alpha_- e^{\lambda_- t} z_- \right] \quad (9)$$

- $\alpha = 0$  :  $\lambda_{\pm} = \pm i$ ,  $z_{\pm} = (1, \pm i)$ ,  $\alpha_{\pm} = \frac{1}{2}[\theta_0 \mp i\omega_0]$ . La solution de 9 est  $\theta(t) = \theta_0 \cos t + \omega_0 \sin t$ , c'est bien la solution du système  $\ddot{\theta} = -\theta$ , on voit d'ailleurs bien sur le portrait de phase (figure 2), des cercles.
- $0 < \alpha < 2$  :  $\lambda_{\pm} = -\beta \pm i\sqrt{1 - \beta^2}$ ,  $z_{\pm} = (1, -\beta \pm i\sqrt{1 - \beta^2})$ ,  $\alpha_{\pm} =$

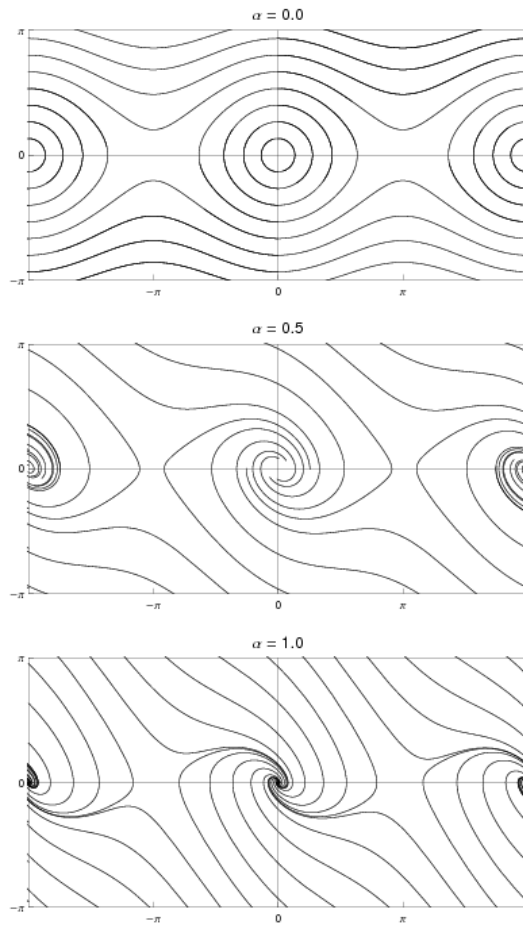


FIGURE 3 – Espace de phase du pendule amorti autour de  $(\theta, \omega) = (0, 0)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

$\frac{1}{2}[\theta_0 \mp i \frac{\omega_0 + \beta\theta_0}{\sqrt{1-\beta^2}}]$ . La solution de (9) est

$$\theta(t) = e^{-\beta t} \left[ \theta_0 \cos \sqrt{1-\beta^2} t + \frac{\omega_0 + \beta\theta_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin \sqrt{1-\beta^2} t \right]$$

Il y a amortissement *sous-critique*, ce qui se traduit sur le portrait de phase, par une spirale convergeant vers l'origine (figure 2).

- $\alpha = 2$  :  $\lambda_{\pm} = -1$ ,  $z_{\pm} = (1, -1)$ , c'est le cas non diagonalisable. Décomposons

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \mathcal{S} + \mathcal{N}$$

où  $\mathcal{S} = -1 \Rightarrow e^{\mathcal{S}t} = e^{-t}$  et  $\mathcal{N}^2 = 0 \Rightarrow e^{\mathcal{N}t} = 1 + \mathcal{N}t$ . La solution de

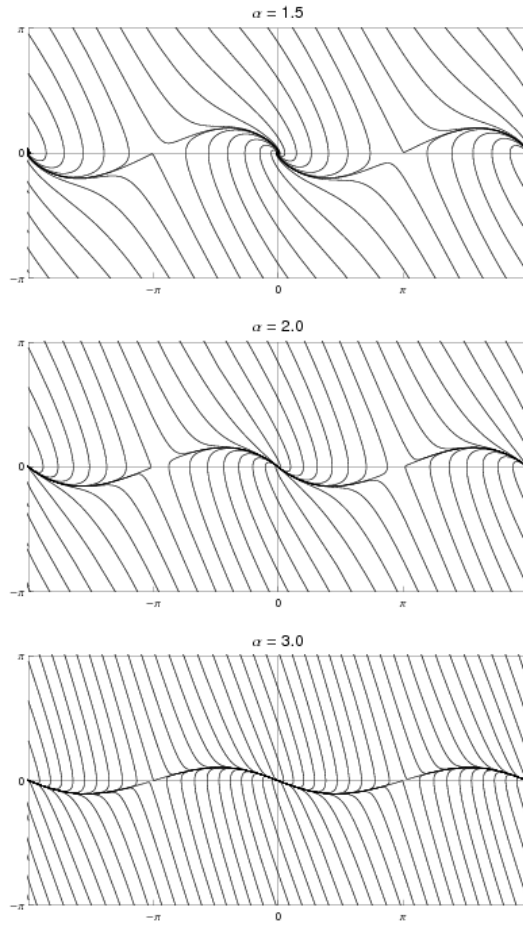


FIGURE 4 – Espace de phase du pendule amorti autour de  $(\theta, \omega) = (0, 0)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

(9) est alors

$$\begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = e^{-t} (\mathbb{I} + \mathcal{N}t) \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{-t} [\theta_0 + (\theta_0 + \omega_0)t] \\ e^{-t} [\omega_0 - (\theta_0 + \omega_0)t] \end{bmatrix}$$

Le portrait de phase d'un tel système est illustré dans la figure 2.

- $\alpha > 2$  :  $\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$ ,  $z_{\pm} = (1, -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1})$ ,  $\alpha_{\pm} = \frac{1}{2} [\theta_0 \pm \frac{\omega_0 + \beta\theta_0}{\sqrt{\beta^2 - 1}}]$ . La solution de l'Eq. 9 est  $\theta(t) = \alpha_+ e^{\lambda_+ t} + \alpha_- e^{\lambda_- t}$ , il y a amortissement *sur-critique*. Notons que si  $\alpha \gg 2$ ,  $|\lambda_-| \gg |\lambda_+|$ . Le portrait de phase est illustré dans la figure 2.



**Linéarisation autour du point  $(\pi, 0)$**  En posant  $\theta = \pi + \eta$ , le système linéarisé est

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \omega \end{bmatrix} \quad ; \quad \dot{\eta} + \alpha\eta - \omega = 0 \quad (10)$$

Les valeurs propres sont  $\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 1}$ , on voit que  $\lambda_{\pm} \in \mathbb{R}_{\pm}^*$ . Aussi, il s'agit d'un *col* (instable) quelle que soit la valeur de  $\beta \geq 0$ . Les vecteurs propres sont  $z_{\pm} = (1, \lambda_{\pm})$  et on a  $x(0) = \alpha_+ z_+ + \alpha_- z_-$  où  $\alpha_{\pm} = \frac{1}{2} [\theta_0 \pm \frac{\beta\theta_0 + \omega_0}{\sqrt{\beta^2 + 1}}]$  et donc

$$\theta(t) = \alpha_+ e^{\lambda_+ t} + \alpha_- e^{\lambda_- t}$$

### Portraits de phase

Les variétés stables et instables du point hyperbolique sont déformées par la non-linéarité (voir figures 3 et 4), mais existent globalement. Lorsque  $\alpha = 0$ , l'énergie  $E(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos \theta$  est conservée, les orbites sont données par les lignes  $E = \text{const}$ . Les variétés stables et instables, qui correspondent à  $E = 0$ , se rejoignent.

Ce n'est plus possible dans le cas dissipatif  $\alpha > 0$ , car sinon la région entre ces variétés ne serait pas contractée. Les orbites ne se coupent pas, les variétés instables doivent s'enrouler autour de l'origine ou autour d'un cycle limite. En utilisant des fonctions de Liapunov, nous verrions qu'il n'y a pas de cercle limite.