PHENOMENES NON-LINEAIRES ET CHAOS

Corrigé de la série 3: Systèmes conservatifs & dissipatifs

Exercice 3 *Formes canoniques*

1.

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\gamma y - \frac{d}{dx}V(x)$$

2.

$$\dot{\varphi} = \omega$$
$$\dot{x} = \nu$$
$$\dot{y} = u$$
$$\dot{\nu} = ax\cos\varphi - Ax\left(x^2 + y^2\right)$$
$$\dot{u} = by\sin\varphi - Ay\left(x^2 + y^2\right)$$

Exercice 4 *Equation de Liouville*

1. Pendule amorti

$$\ddot{\theta} = -\alpha\dot{\theta} - \sin\theta \tag{1}$$

Soit $\omega = \dot{\theta}$, alors Eq. 1 s'écrit comme le système

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\alpha\omega - \sin\theta \end{cases}$$

Si l'on note $\mathbf{x} = (\theta, \omega)$, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) = (\omega, -\alpha\omega - \sin\theta)$ d'où

$$\nabla \cdot \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{X}_2}{\partial x_2} = \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \omega}\left(-\alpha\omega - \sin\theta\right) = -\alpha$$

Le système est donc *conservatif* (resp. *dissipatif*) si $\alpha = 0$ (resp. $\alpha > 0$).

2. Modèle de Lorenz

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{X} &= \frac{\partial}{\partial X}\left[\sigma\left(Y - X\right)\right] + \frac{\partial}{\partial Y}\left[-XZ + rX - Y\right] + \frac{\partial}{\partial Z}\left[XY - bZ\right] \\ &= -\left(\sigma + b + 1\right) < 0 \end{aligned}$$

où $b = 8/3$ et $\sigma > 0$, parce que le modèle de Lorenz décrit l'instabilité de Bénard-Rayleigh (voir excercise 3). Le système est donc *dissipatif*, et ce particulièrement pour les huiles, pour lesquelles $\sigma \sim 40 - 130$.

3. Application standard

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + y_{n+1} \,(\text{mod } 1) \;= x_n + y_n - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x_n \quad \text{mod } 1 \\
y_{n+1} &= y_n - \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x_n
\end{aligned}
$$

Le jacobien de cette application est

$$
\left| \frac{\partial \left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)}{\partial \left(x_n, y_n\right)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 - k\cos 2\pi x_n & 1 \\ -k\cos 2\pi x_n & 1 \end{pmatrix} \right| = 1
$$

Cette application est donc *conservative* (voir aussi les exemples dans le cours : pendule frappé, Frenkel-Kontorova, fig. 1.5, 1.6).

4. Application de Hénon

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= 1 - \mu x_n^2 + y_n \\
y_{n+1} &= b x_n
\end{aligned}
$$

Le jacobien de cette application est

$$
\left| \frac{\partial \left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)}{\partial \left(x_n, y_n\right)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} -2\mu x_n & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \right| = |b|
$$

Ainsi, l'application est *conservative* si $|b| = 1$ et *dissipative* si $|b| < 1$. Remarquons que si $b \neq 0$, l'application est inversible. Lorsque $b = 0$ la dissipation est maximale, et l'application devient non inversible (elle est alors similaire à l'application logistique).

5. Application du chat d'Arnold

$$
\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{mod } 1
$$

Le jacobien de cette application est

$$
\left| \frac{\partial \left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)}{\partial \left(x_n, y_n\right)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = 1
$$

L'application est donc *conservative*.

6. Flot hamiltonien

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\
\dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i},
\end{aligned}
$$

pour $i = 1, \ldots, n$. La divergence de $\mathbf{X}$ est donc

$$\operatorname{div} \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \, \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \, \partial q_i} \right) = 0$$

si $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$. Le système est donc *conservatif* à cause de la structure dite "symplectique". On écrit souvent $\mathbf{X}(q,p) = J \nabla H$, où $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{smallmatrix} \right)$ est appelée matrice symplectique.

Exercice 5 *Systèmes conservatifs et dissipatifs*
Rappelons d'abord quelques propriétés qui interviendrons dans la démonstration.

1. Multiplication de déterminants

$$\det AB = \det A \det B \tag{2}$$

2. Soit B une matrice de valeurs propres λ_j. On a

$$e^{\operatorname{Tr} B} = e^{\sum_i \lambda_i} = \prod_i e^{\lambda_i} = \det e^B.$$

Si B est inversible, et en posant $B = \ln B'$, la relation précédente devient

$$\det B' = e^{\operatorname{Tr} \ln B'}. \tag{3}$$

3. Développements limités

$$e^x = 1 + x + \mathcal{O}(x^2) \tag{4}$$

$$\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2) \tag{5}$$

Procédons à la preuve. Soit M un domaine de l'espace de phase, et soit $V(t)$ le volume de l'image de M par le flot U_t. $\forall \mathbf{x}_0 \in M$, on a (par définition du flot) que $\mathbf{y}(t) = U_t(\mathbf{x}_0)$ est solution de $\dot{\mathbf{x}} = X(\mathbf{x})$. Ainsi

$$V(t) = \int_{U_t} d\mathbf{x} = \int_M d\mathbf{x}_0 \, J(\mathbf{x}_0, t),$$

où J est le jacobien de la transformation $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Ainsi

$$\dot{V}(t) = \int_M d\mathbf{x}_0 \, \dot{J}(\mathbf{x}_0, t)$$

Comme $J = \det C$, avec $c_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}$, on a

$$\dot{J} = \det\{\dot{c}_{ij}\}.$$

On a alors

$$\dot{c}_{ij} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_{0j}} = \frac{\partial X_i}{\partial x_{0j}} = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial x_{0j}} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = (AC)_{ij}$$

où $A = \{a_{ij}\}$ avec $a_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}$. Noter que

$$\operatorname{Tr} A = \sum_j \frac{\partial X_j}{\partial x_j} = \operatorname{div} \mathbf{X}(\mathbf{x}) \tag{6}$$

On a

$$\dot{C}_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{C_{t+\Delta t} - C_t}{\Delta t}$$

Donc, en laissant tomber la limite pour le moment, $\dot{C} = AC$ devient

$$C_{t+\Delta t} = (1 + \Delta t A) C_t$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\det C_{t+\Delta t} &= \det\big[(1 + \Delta t A) C_t\big] \\
&\overset{(2)}{=} \det(1 + \Delta t A) \det C_t \\
&\overset{(3)}{=} e^{\operatorname{Tr} \ln(1+\Delta t A)} \det C_t \\
&\overset{(5)}{=} e^{\operatorname{Tr} \Delta t A} \det C_t \\
&\overset{(4)}{=} (1 + \operatorname{Tr} \Delta t A) \det C_t \\
&\overset{(6)}{=} (1 + \Delta t \operatorname{div} \mathbf{X}(\mathbf{x})) \det C_t
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{\det C_{t+\Delta t} - \det C_t}{\Delta t} = \operatorname{div} \mathbf{X}(\mathbf{x}) \det C_t$$

et en appliquant la limite $\Delta t \to 0$

$$\dot{J} = \operatorname{div} \mathbf{X}(\mathbf{x}) J.$$

Finalement, on a

$$\dot{V}(t) = \int_M d\mathbf{x}_0 \, \dot{J}(\mathbf{x}_0, t) = \int_M d\mathbf{x}_0 \, J(\mathbf{x}_0, t) \operatorname{div} \mathbf{X}(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)) = \int_{U_t} d\mathbf{x} \, \operatorname{div} \mathbf{X}(\mathbf{x})$$