PHENOMENES NON-LINEAIRES ET CHAOS

Corrigé de la série 2: EDPs & EDOs

Exercice 3 *Convection de Rayleigh-Bénard et modèle de Lorentz*

Soit les équations de l'hydrodynamique

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma}\frac{D\vec{v}}{Dt} = \Delta\vec{v} - \nabla p + \Theta\hat{z} \\ \frac{D\Theta}{Dt} = \Delta\Theta + Rv_z \\ \nabla\cdot\vec{v} = 0 \end{cases}$$

où $\frac{D}{Dt} = \partial_t + \vec{v}\cdot\nabla$. Les deux premières équations peuvent êtres récrites

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma}\partial_t\vec{v} = \Delta\vec{v} - \nabla p + \Theta\hat{z} - \frac{1}{\sigma}\left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v} \\ \partial_t\Theta = \Delta\Theta + Rv_z \end{cases}$$

C'est une équation de la forme $\partial_t u = Lu + Nu$, où L est un opérateur linéaire et N est non-linéaire à cause des opérateurs $(\vec{v}\cdot\nabla)$. Pour résoudre le système linéaire $\partial_t u = Lu$, on étudie d'abord l'équation aux valeurs propres

$$Lu_k = \omega_k u_k + \text{conditions de bords}$$

Les fonctions $u_k(x)$ sont des fonctions propres de L, et ω_k en fonction de k est parfois appelé *relation de dispersion*. Une solution de la forme $u(x,t) = \sum_k c_k(t)u_k(x)$ devra satisfaire $\sum_k \partial_t c_k u_k = \sum_k c_k\omega_k u_k$ d'où $\partial_t c_k = \omega_k c_k$ $\forall k$ donc $c_k(t) = c_k(0)\exp\omega_k t$ $\forall k$.
Lorsqu'on ajoute la non-linéarité N, on obtiendra $\partial_t c_k = \omega_k c_k + f_k\left(\{c_j\}\right)$ où f_k sont des fonctions non-linéaires des c_j.

Remarque 1. *Si $\langle f|g\rangle$ est un produit scalaire, par exemple*

$$\langle f|g\rangle = \int dx\,\overline{f(x)}g(x)$$

et si L est autoadjoint par rapport à $< .|. >$ i.e. $< f|Lg > = < Lf|g > \quad \forall f, g$, les fonctions propres $u_k(x)$ sont orthogonales et les opérations différentielles sont obtenues par projection orthogonale :

$$\langle u_k|(L+N)u\rangle = \langle u_k|\partial_t u\rangle = \sum_l \partial_t c_j \underbrace{\langle u_k|u_j\rangle}_{\delta_{kj}} = \partial_t c_k$$

.

1. Posons $\vec{v}(x,z) = (-\partial_z\psi, \partial_x\psi)$, alors

$$\nabla\cdot\vec{v} = \partial_x v_x + \partial_z v_z = -\partial_{xz}\psi + \partial_{zx}\psi = 0$$

l'équation de continuité est donc satisfaite.

Sur une ligne $\psi = const$, on a

$$\begin{aligned} 0 = d\psi &= \partial_x \psi dx + \partial_z \psi dz \\ &= v_z dx - v_x dz \\ &= (\vec{v} \wedge d\vec{x})_y \end{aligned}$$

. Donc, $\vec{v} \wedge d\vec{x}$ est dans le plan (x,z). On sait aussi que $\vec{v} \wedge d\vec{x}$ est en même temps perpendiculaire à $\vec{v}$ et à $d\vec{x}$. Pour avoir cela, il faut que $d\vec{x} \parallel \vec{v}$. Les tangentes aux lignes $\psi = const$ sont alors parallèles au vecteur vitesse.
Une autre preuve de ce fait consiste à montrer que le gradient de ψ est perpendiculair au vecteur vitesse en tout point, ce qui implique que $\vec{v}$ est parallèl au lignes $\psi = const$.
Comme $\nabla \wedge \vec{v} = (-\partial_x v_z + \partial_z v_x)\,\hat{y}$, si $\psi(x,z) = \sqrt{2}\frac{c}{\pi q}\chi \cos \pi z \sin qx$, on a $\Delta\psi = -(\pi^2 + q^2)\,\psi = -c\psi$. On voit que $\psi = \frac{1}{c}\,|\nabla \wedge \vec{v}|$ mesure l'amplitude du vecteur tourbillon.
Ainsi les lignes $\psi = const$ sont les lignes de vitesse de l'écoulement, et ψ mesure la variation de $|\vec{v}|$ perpendiculairement à ces lignes.

La forme choisie de ψ en $\cos \pi z \sin qx$ correspond à des rouleaux d'étendue $\frac{\pi}{q}$ selon x. De plus, les conditions au bord $v_z = 0$ et $\partial_z v_x = 0$ en $z = \pm 1/2$ sont satisfaites.
La déviation du profil linéaire de température

$$\Theta(x,z) = \sqrt{2}\frac{c^3}{\pi q^2} Y \cos \pi z \cos qx + \frac{c^3}{\pi q^2} Z \sin 2\pi z$$

s'annule en $z = \pm 1/2$.

2.

$$\left\{ \begin{aligned} v_x &= \sqrt{2}\tfrac{c}{q} X \sin \pi z \sin qx \\ v_z &= \sqrt{2}\tfrac{c}{\pi} X \cos \pi z \cos qx \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} \partial_x v_x &= \sqrt{2} c X \sin \pi z \cos qx \\ \partial_z v_x &= \sqrt{2}\tfrac{c\pi}{q} X \cos \pi z \sin qx \\ \partial_x v_z &= -\sqrt{2}\tfrac{cq}{\pi} X \cos \pi z \sin qx \\ \partial_z v_z &= -\sqrt{2}\tfrac{c\pi}{q} X \sin \pi z \cos qx \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \nabla)\, v_x &= v_x \partial_x v_x + v_z \partial_z v_x \\ &= \left(2\frac{c^2}{q} X^2 \sin^2 \pi z + 2\frac{c^2}{q} X^2 \cos^2 \pi z \right) \sin qx \cos qx \\ &= \frac{c^2}{q} X^2 \sin 2qx \end{aligned}$$

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\, v_z = v_x \partial_x v_z + v_z \partial_z v_z = -\frac{c^2}{\pi} X^2 \sin 2\pi z$$

Ce sont bien des termes non-linéaires, puisqu'ils contiennent X^2. Le premier, $\sin 2qx$, est une harmonique supérieure : nous négligerons de tels termes, pour ne considérer que la projection sur le sous-espace des trois modes $\cos\pi z \sin qx$ pour ψ, $\cos\pi z\cos qx$ et $\sin 2\pi z$ pour Θ. Equation de Navier-Stokes

$$\frac{1}{\sigma}\partial_t \vec{v} = \Delta\vec{v} - \nabla p + \Theta\hat{z} - \frac{1}{\sigma}(\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v}$$

On a

$$\begin{aligned}
\Delta v_x &= \partial_{xx} v_x + \partial_{zz} v_x = -c v_x = -\sqrt{2}\frac{c^2}{q} X \sin\pi z \sin qx \\
\Delta v_z &= \partial_{xx} v_z + \partial_{zz} v_z = -c v_z = -\sqrt{2}\frac{c^2}{\pi} X \cos\pi z \cos qx
\end{aligned}$$

En projetant, on obtient donc l'équation suivante sur x respectivement sur z :

$$\frac{1}{\sigma}\sqrt{2}\frac{c}{q}\dot{X}\sin\pi z\sin qx = -\sqrt{2}\frac{c^2}{q}X\sin\pi z\sin qx - \partial_x p - \underbrace{\frac{1}{\sigma}\frac{c^2}{q}X^2\sin 2\pi qx}_{\text{négligé}} \quad (1)$$

respectivement

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma}\sqrt{2}\frac{c}{\pi}\dot{X}\cos\pi z\cos qx = &-\sqrt{2}\frac{c^2}{\pi}X\cos\pi z\cos qx - \partial_z p \\
&+\sqrt{2}\frac{c^3}{\pi q^2}Y\cos\pi z\cos qx + \frac{c^3}{\pi q^2}Z\sin 2\pi z \qquad (2)\\
&+\frac{1}{\sigma}\frac{c^2}{\pi}X^2\sin 2\pi z
\end{aligned}$$

Pour extraire $\dot{X}(t)$ et $p(x,z)$ de ces équations, on peut procéder de deux différentes manières :

(a) Vu la forme des modes que l'on considère, on peut prendre $p(x,z) = A\sin\pi z\cos qx + B\cos 2\pi z$ où A et B peuvent dépendre de X, Y et Z. En accumulant les coefficients des trois modes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sin\pi z\sin qx: &\quad \dot{X} = -\sigma c X + \frac{\sigma q^2}{\sqrt{2}c}A \\
\cos\pi z\cos qx: &\quad \dot{X} = -\sigma c X - \frac{\sigma q^2}{\sqrt{2}c}A + \frac{\sigma c^2}{q^2}Y \\
\sin 2\pi z: &\quad 0 = 2\pi B + \frac{c^3}{\pi q^2}Z + \frac{1}{\sigma}\frac{c^2}{\pi}X^2
\end{aligned}$$

d'où $A = \sqrt{2}\frac{c^2}{q^2}Y$, $B = -\frac{1}{\sigma}\frac{c^2}{2\pi^2}X^2 - \frac{c^3}{2\pi^2 q^2}Z$ et finalement

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= \sigma c\,(Y - X) \\
p(x,z) &= \sqrt{2}\frac{c^2}{q^2}Y\sin\pi z\cos qx - \frac{c^2}{2\pi^2}\left(\frac{1}{\sigma}X^2 + \frac{c}{q^2}Z\right)\cos 2\pi z
\end{aligned}$$

(b) On peut éliminer la pression en calculant $\partial_z(1) - \partial_x(2)$, on obtient alors

$$\frac{1}{\sigma}\sqrt{2}c\underbrace{\left(\frac{\pi}{q}+\frac{q}{\pi}\right)}_{\frac{c}{\pi q}}\dot{X}\cos\pi z\sin qx = -\sqrt{2}c^2\left(\frac{\pi}{q}+\frac{q}{\pi}\right)X\cos\pi z\sin qx$$

$$+\sqrt{2}\frac{c^3}{\pi q}Y\cos\pi z\sin qx$$

d'où $\dot{X} = \sigma c\,(Y - X)$. On obtient $p(x,z)$ par intégration.

3. Equation de la chaleur

$$\partial_t\Theta = \Delta\Theta + Rv_z - (\vec{v}\cdot\nabla)\,\Theta$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta\Theta &= \partial_{xx}\Theta + \partial_{zz}\Theta\\ &= -\sqrt{2}\frac{c^4}{\pi q^2}Y\cos\pi z\cos qx - \frac{4\pi c^3}{q^2}Z\sin 2\pi z\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(\vec{v}\cdot\nabla)\,\Theta &= v_x\partial_x\Theta + v_z\partial_z\Theta\\ &= -2\frac{c^4}{\pi q^2}XY\cos\pi z\sin\pi z\left(\cos^2 qx + \sin^2 qx\right)\\ &\quad + 2\sqrt{2}\frac{c^4}{\pi q^2}XZ\cos 2\pi z\cos\pi z\cos qx\\ &= -\frac{c^4}{\pi q^2}XY\sin 2\pi z + \sqrt{2}\frac{c^4}{\pi q^2}XZ\cos\pi z\cos qx\\ &\quad + \underbrace{\sqrt{2}\frac{c^4}{\pi q^2}XZ\cos 3\pi z\cos qx}_{\text{négligé}}\end{aligned}$$

où nous avons utilisé

$$\begin{aligned}\cos 2\pi z\cos\pi z &= \frac{1}{2}\left(e^{2i\pi z} + e^{-2i\pi z}\right)\frac{1}{2}\left(e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e^{3i\pi z} + e^{i\pi z} + e^{-i\pi z} + e^{-3i\pi z}\right)\\ &= \frac{1}{2}\cos\pi z + \frac{1}{2}\cos 3\pi z\end{aligned}$$

L'équation de la chaleur devient donc

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\frac{c^3}{\pi q^2}\dot{Y}\cos\pi z\cos qx + \frac{c^3}{\pi q^2}\dot{Z}\sin 2\pi z = &-\sqrt{2}\frac{c^4}{\pi q^2}Y\cos\pi z\cos qx - \frac{4\pi c^3}{q^2}Z\sin 2\pi z\\ &+ R\sqrt{2}\frac{c}{\pi}X\cos\pi z\cos qx + \frac{c^4}{\pi q^2}XY\sin 2\pi z\\ &-\sqrt{2}\frac{c^4}{\pi q^2}XZ\cos\pi z\cos qx\end{aligned}$$

ce qui donne pour les deux modes :

$$\begin{aligned} \cos\pi z \cos qx : \quad & \dot{Y} = -cY + R\frac{q^2}{c^2}X - cXZ \\ \sin 2\pi z : \quad & \dot{Z} = -4\pi^2 Z + cXY \end{aligned}$$

Introduisons finalement un nouveau temps $t' = ct \Rightarrow \partial_t = c\partial_{t'}$, on trouve alors bien les équations de Lorentz :

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma\left(Y - X\right) \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases}$$

avec $r = R\frac{q^2}{c^3}$ et $b = \frac{4\pi}{c}$.