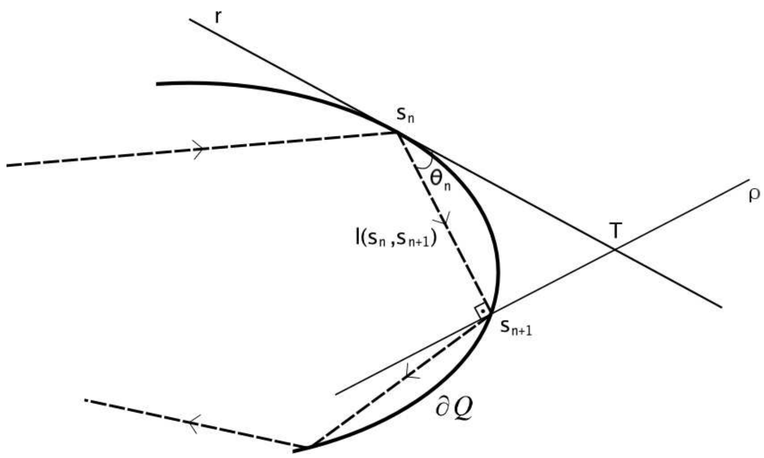
PHENOMENES NON-LINEAIRES ET CHAOS

Corrigé de la série 1: Fonctions génératrices

Exercice 1 *Billard (Stade de Bunimovich)*



On doit trouver une expression pour la longueur de la corde $l(s_n, s_{n+1})$ entre deux points s_n et s_{n+1} situés sur le bord ∂Q du billard.
Soit $(X(s), Y(s))$ les coordonnées cartésiennes qui décrivent ∂Q alors

$$l(s_n, s_{n+1}) = \left\{[X(s_{n+1}) - X(s_n)]^2 + [Y(s_{n+1}) - Y(s_n)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ceci donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(s_n, s_{n+1})}{\partial s_n} = \frac{1}{l(s_n, s_{n+1})} & \{[X(s_{n+1}) - X(s_n)]\, \partial_{s_n} (-X(s_n)) \\ & + [Y(s_{n+1}) - Y(s_n)]\, \partial_{s_n} (-Y(s_n))\}\end{aligned} \quad (1)$$

Il s'agit de montrer que ceci est égal à $u_n = -\cos \Theta_n$.
La direction de la droite r est $\begin{pmatrix} \partial_{s_n} X(s_n) \\ \partial_{s_n} Y(s_n) \end{pmatrix} = \vec{n}$ et l' équation de cette droite est:

$$r: \quad \begin{cases} X(\alpha) = X(s_n) + \partial_{s_n} X(s_n)\, \alpha \\ Y(\alpha) = Y(s_n) + \partial_{s_n} Y(s_n)\, \alpha \end{cases} \quad , \quad \alpha > 0$$

Pour la droite ρ, la direction est $\begin{pmatrix} Y(s_n) - Y(s_{n+1}) \\ X(s_{n+1}) - X(s_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta Y \\ \Delta X \end{pmatrix} = \vec{n}$ car il s'agit de la perpendiculaire à la droite qui contient le segment $l(s_n, s_{n+1})$. Donc l' équation de la droite est:

$$\rho: \quad \begin{cases} X(\beta) = X(s_{n+1}) - \Delta Y\, \beta \\ Y(\beta) = Y(s_{n+1}) + \Delta X\, \beta \end{cases} \quad , \quad \beta > 0$$

Considérons maintenant l'intersection entre r et ρ, on a le système suivant:

$$\left\{\begin{array}{l} X(s_n)+\partial_{s_n}X(s_n)\,\alpha_T = X(s_{n+1})-\Delta Y\,\beta_T \\ Y(s_n)+\partial_{s_n}Y(s_n)\,\alpha_T = Y(s_{n+1})+\Delta X\,\beta_T \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} (\Delta X)^2 = \partial_{s_n}X(s_n)\Delta X\alpha_T+\Delta Y\Delta X\beta_T \\ (\Delta Y)^2 = \partial_{s_n}Y(s_n)\Delta Y\alpha_T-\Delta X\Delta Y\beta_T \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow l^2(s_n,s_{n+1}) = \alpha_T\left\{\partial_{s_n}X(s_n)\Delta X+\partial_{s_n}Y(s_n)\Delta Y\right\} \tag{2}$$

La distance entre le point $(X(s_n),Y(s_n))$ et T, notée r_n est

$$r_n^2 = [X_T-X(s_n)]^2+[Y_T-Y(s_n)]^2$$

soit en utilisant l'équation de la droite r avec $\alpha=\alpha_T$,

$$r_n^2 = \alpha_T^2\left\{[\partial_{s_n}X(s_n)]^2+[\partial_{s_n}y(s_n)]^2\right\}$$

Il est clair que $l(s_n,s_{n+1})=\cos\Theta_n r_n$, ainsi

$$\begin{aligned}\cos\Theta_n &= \frac{l(s_n,s_{n+1})}{\alpha_T\left\{[\partial_{s_n}X(s_n)]^2+[\partial_{s_n}Y(s_n)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \\ &\overset{(2)}{=} \frac{l(s_n,s_{n+1})}{\left\{[\partial_{s_n}X(s_n)]^2+[\partial_{s_n}Y(s_n)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}}\frac{\partial_{s_n}X(s_n)\Delta X+\partial_{s_n}Y(s_n)\Delta Y}{l^2(s_n,s_{n+1})} \\ &= \frac{1}{l(s_n,s_{n+1})}\left\{[X(s_{n+1})-X(s_n)]\,\partial_{s_n}\left(X(s_n)\right)+[Y(s_{n+1})-Y(s_n)]\,\partial_{s_n}\left(Y(s_n)\right)\right\}\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}\left\{\left(\frac{\partial X(s_n)}{\partial s_n}\right)^2+\left(\frac{\partial Y(s_n)}{\partial s_n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} &= \left\{\left(\left.\frac{dX(s)}{ds}\right|_{s=s_n}\right)^2+\left(\left.\frac{dY(s)}{ds}\right|_{s=s_n}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\left.\frac{dS}{ds}\right|_{s=s_n}\right)=1\end{aligned}$$

Ce qui montre $\frac{\partial l(s_n,s_{n+1})}{\partial s_n}=-\cos\Theta_n=u_n$

Pour la deuxième égalité on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(s_n,s_{n+1})}{\partial s_{n+1}} = \frac{1}{l(s_n,s_{n+1})}&\left\{[X(s_{n+1})-X(s_n)]\,\partial_{s_{n+1}}\left(X(s_{n+1})\right)\right. \\ &\left.+\,[Y(s_{n+1})-Y(s_n)]\,\partial_{s_{n+1}}\left(Y(s_{n+1})\right)\right\}\end{aligned} \tag{3}$$

ainsi les droites r et ρ sont:

$$r:\quad\left\{\begin{array}{l} X(\alpha)=X(s_n)-\partial_{s_{n+1}}X(s_{n+1})\,\alpha \\ Y(\alpha)=Y(s_n)-\partial_{s_{n+1}}Y(s_{n+1})\,\alpha \end{array}\right.\quad,\quad \alpha>0$$

$$\rho:\quad\left\{\begin{array}{l} X(\beta)=X(s_n)-\Delta Y\,\beta \\ Y(\beta)=Y(s_n)+\Delta X\,\beta \end{array}\right.\quad,\quad \beta>0$$

Les mêmes considérations que précédemment donnent

$$l^2(s_n, s_{n+1}) = \alpha_T \left(\Delta X \partial_{s_{n+1}} X(s_{n+1}) + \Delta Y \partial_{s_{n+1}} Y(s_{n+1})\right)$$

$$r_{n+1} = \alpha_T$$

$$\Longrightarrow \cos\Theta_{n+1} = \frac{l(s_n, s_{n+1})}{r_{n+1}} \overset{(3)}{=} \frac{\partial l(s_n, s_{n+1})}{\partial s_{n+1}}$$

d'où

$$\frac{\partial l(s_n, s_{n+1})}{\partial s_{n+1}} = \cos\Theta_{n+1} = -u_{n+1}$$

Exercice 2 *Dynamique hamiltonienne*

Rappel de mécanique analytique

1. Considérons un système hamiltonien avec espace de phase $\Gamma = (\vec{p}, \vec{q})$ où

   $$[\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N); \vec{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_N)]$$

   Les équations canoniques bien connues sont

   $$\dot{p}_k = -\frac{\partial H(\vec{p}, \vec{q}, t)}{\partial q_k} \quad ; \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H(\vec{p}, \vec{q}, t)}{\partial p_k} \quad 1 \leq k \leq N \tag{4}$$

   Un changement de variables dans l'espace de phase $\Gamma\ (\vec{p}, \vec{q}) \rightarrow (\vec{P}, \vec{Q})$ est appelé transformation canonique si $\exists\ 2N$ équations inversibles (dans un ouvert de Γ)

   $$\begin{aligned} Q_k &= Q_k(\vec{p}, \vec{q}, t) \quad 1 \leq k \leq N \\ P_k &= P_k(\vec{p}, \vec{q}, t) \end{aligned} \tag{5}$$

   telles que la forme des équations canoniques dans les nouvelles variables est préservée, i.e. si l'on a

   $$\dot{P}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}\left(\vec{P}, \vec{Q}, t\right)}{\partial Q_k} \quad ; \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}\left(\vec{P}, \vec{Q}, t\right)}{\partial P_k} \qquad 1 \leq k \leq N \tag{6}$$

   où $\mathcal{H}(\vec{P}, \vec{Q}, t)$ est le nouvel hamiltonien du système.

2. Il est clair que (4) resp. (6) rend stationnaire l'action

   $$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\sum_k p_k \dot{q}_k - H(\vec{p}, \vec{q}, t)\right)$$

   resp.

   $$\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\sum_k P_k \dot{Q}_k - \mathcal{H}(\vec{P}, \vec{Q}, t)\right)$$

on a donc $\delta^{(1)}S = 0$ resp. $\delta^{(1)}\mathcal{S} = 0$; clairement la condition au bord $\delta\vec{q}(t_0) = \delta\vec{q}(t_1) = 0$ resp. $\delta\vec{Q}(t_0) = \delta\vec{Q}(t_1) = 0$ est prise en compte. Ainsi

$$S = \mathcal{S} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{dW}{dt} dt \qquad \left(\delta^{(1)}W(t_1) = 0 = \delta^{(1)}W(t_2)\right)$$

Donc

$$\frac{dW}{dt} = \sum_k p_k \dot{q}_k - H(\vec{p}, \vec{q}, t) - \left\{ \sum_k P_k \dot{Q}_k - \mathcal{H}(\vec{P}, \vec{Q}, t) \right\} \tag{7}$$

La dépendance de W par rapport aux variables $\vec{p}, \vec{q}, \vec{P}, \vec{Q}, t$ est par:

(a) on a $(2N+1)$ variables indépendantes à cause de (5).

(b) W doit dépendre des nouvelles et anciennes coordonnées.

Ceci donne finalement 4 possibilités:

$$W_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) \quad ; \quad W_2(\vec{q}, \vec{P}, t) \quad ; \quad W_3(\vec{p}, \vec{Q}, t) \quad ; \quad W_4(\vec{p}, \vec{P}, t)$$

3. Depuis $W_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)$ et en utilisant (7), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{dt} &= \frac{\partial W_1}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial W_1}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial W_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \\ &= \sum_k p_k \dot{q}_k - H(\vec{p}, \vec{q}, t) - \left\{ \sum_k P_k \dot{Q}_k - \mathcal{H}(\vec{P}, \vec{Q}, t) \right\} \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_k \left(\frac{\partial W_1}{\partial q_k} - p_k \right) \dot{q}_k + \sum_k \left(\frac{\partial W_1}{\partial Q_k} + P_k \right) \dot{Q}_k + \frac{\partial W_1}{\partial t} + H(\vec{p}, \vec{q}, t) - \mathcal{H}(\vec{P}, \vec{Q}, t) = 0$$

Les q_k et Q_k étant indépendants, on doit avoir

$$\frac{\partial W_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)}{\partial q_k} = p_k \quad ; \quad \frac{\partial W_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)}{\partial Q_k} = -P_k \qquad 1 \leq k \leq N \tag{8}$$

et

$$\mathcal{H}(\vec{P}, \vec{Q}, t) = H(\vec{p}, \vec{q}, t) + \frac{\partial W_1(\vec{q}, \vec{Q}, t)}{\partial t}$$

La condition "technique": det $\left\{ \frac{\partial^2 W_1}{\partial q_k \partial Q_k} \right\} \neq 0$ est nécessaire pour l'inversion de (8).

Pour le cas de $W_2(\vec{q}, \vec{P}, t)$ on remarque que

$$W_2(\vec{q}, \vec{P}, t) = W_1(\vec{q}, \vec{Q}, t) + \sum_k Q_k P_k$$

d'où

$$\frac{\partial W_2(\vec{q}, \vec{P}, t)}{\partial q_k} = p_k \quad ; \quad \frac{\partial W_2(\vec{q}, \vec{P}, t)}{\partial P_k} = Q_k \qquad 1 \leq k \leq N \tag{9}$$

1. La transformation infinitésimale

$$Q_k = q_k + \delta q_k \quad ; \quad P_k = p_k + \delta p_k \tag{10}$$

est donnée par

$$W_2(\vec{q}, \vec{P}) = \sum_k q_k P_k + \epsilon \mathcal{G}(\vec{q}, \vec{P}) \qquad \epsilon \,\text{petit}$$

car $\sum_k q_k P_k$ donne la transformation triviale

$$Q_k = q_k \quad ; \quad P_k = p_k$$

et δq_k, δp_k sont considérés infinitésimaux. Par (9) on a

$$p_k = \frac{\partial W_2(\vec{q}, \vec{P})}{\partial q_k} = P_k + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}(\vec{q}, \vec{P})}{\partial q_k} \qquad 1 \leq k \leq N$$

et

$$Q_k = \frac{\partial W_2(\vec{q}, \vec{P})}{\partial P_k} = q_k + \epsilon \frac{\partial \mathcal{G}(\vec{q}, \vec{P})}{\partial P_k} \qquad 1 \leq k \leq N$$

avec (10)

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta q_k = \epsilon \, \frac{\partial \mathcal{G}(\vec{q}, \vec{P})}{\partial P_k} \\ \delta p_k = -\epsilon \, \frac{\partial \mathcal{G}(\vec{q}, \vec{P})}{\partial q_k} \end{cases} \qquad 1 \leq k \leq N$$

et pour la première on peut écrire

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial P_k} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial P_k} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_k} + O(\epsilon^2)$$

$\mathcal{G}$ est donc considéreé ici comme fonction de $(\vec{q}, \vec{p})$ seulement.

2. Appliquons ceci au cas hamiltonien, on a

$$\delta q_k = dt \frac{\partial H(\vec{p}, \vec{q})}{\partial p_k} = \dot{q}_k dt = dq_k$$

$$\delta p_k = -dt \frac{\partial H(\vec{p}, \vec{q})}{\partial q_k} = \dot{p}_k dt = dp_k$$

On a donc la situation suivante:

$$t \rightarrow (\vec{q}, \vec{p})$$

$$t + dt \rightarrow (\vec{Q}, \vec{P})$$

évolution pendant dt : $(\dot{\vec{q}} dt, \dot{\vec{p}} dt) = (d\vec{q}, d\vec{p})$.

On a donc que la transformation canonique change les coordonnées au temps t dans celles au temps $t + dt$, l'évolution du système dans l'intervalle de temps dt peut être décrit par une transformation canonique infinitésimale générée par l'hamiltonien.

L'évolution de $t = t_0$ à $t = t_1$ est donnée par une suite de transformations canoniques infinitésimales qui est encore une transformation canonique.

Enfin, notez l'analogie entre $l(s_n, s_{n+1})$ et la fonction génératrice $W_1(\vec{q}, \vec{Q})$.