Partiel de Mécanique Analytique

Epreuve du 13 décembre 2007 - Durée : 110 minutes - Sans document

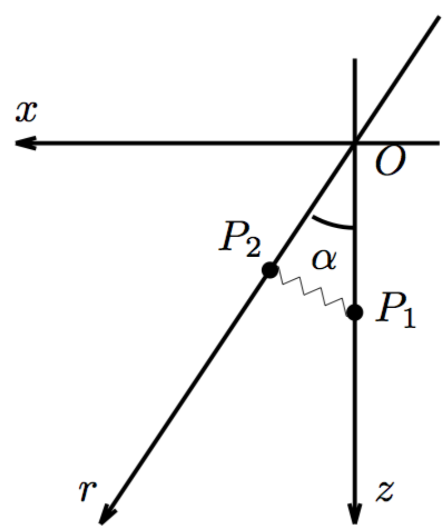
Indications :
La fonction génératrice F_2 associée à une transformation canonique est une fonction des anciennes coordonnées q_i, des nouvelles impulsions P_i et du temps. Elle relie les anciennes et les nouvelles coordonnées par les relations :

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad \text{et} \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \ .$$

Le nouvel Hamiltonien est donné par :

$$K(Q_i, P_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \ .$$

Exercice 1 *(5 points)*



Deux particules P_1 et P_2 de masse m sont contraintes sur un plan verticale xz. En plus, la particule P_1 est contrainte de bouger que le long de l'axe z, alors que la particule P_2 bouge elle le long d'une droite r qui passe par l'origine O et elle forme un angle α avec l'axe z. Les deux particules sont reliées par un ressort de constante élastique k et longueure au repos $l_0 = 0$. A l'instant $t = 0$ les deux particules se trouve en O avec vitesse nulle. Le système est soumis à la pesanteur.

1. Ecrire le Hamiltonien du système.
2. Résoudre les équations du mouvement.

Exercice 2 *(4 points)*

Considerer la transformation :

$$Q = p^{1/2} q^{3/2}$$
$$P = p^{1/2} q^{-1/2}$$

définie sur l'ensemble $\{q > 0, p > 0\}$.

1. Montrer que la transformation est canonique à l'aide de la méthode de la matrice jacobienne et à l'aide de la méthode des crochets de poisson.
2. Déterminer la fonction génératrice de type deux $F_2(q, P)$ qui engendre la transformation donnée.

Exercice 3 *(6 points)*

Considérer le Hamiltonien d'une particule de masse m soumise à la force de gravité :

$$H(x, z, p_x, p_z, t) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2) + mgz$$

Au temps initiale $t = 0$ la particule se trouve dans le point $(0, 0)$.

1. Trouver toutes les quantités conservées.
2. Ecrire l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi (cas indépendant du temps) et trouver la solution $W(x, z, \alpha_1, \alpha_2)$.
3. Ecrire les solutions générales des équations du mouvement en utilisant la fonction génératrice $F_2(q_i, P_i, t) = W(q_i, \alpha_i = P_i)$.

Exercice 1

1) Nous choisissons les distances des deux points respective par rapport à l'origine comme coordonnées généralisées. Le Hamiltonien du système s'écrit :

$$H(r, z, p_r, p_z, t) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}k(r^2 + z^2 - 2rz\cos\alpha) - mg(z + r\cos\alpha) \tag{1}$$

‡*Mis à part les unités, on peut aussi vérifier que le potentiel ait bien le bon comportement. Si z ou r augmente, l'énergie gravitationnelle baisse et l'énergie du ressort augmente, comme on s'y attend. On voit déjà ici entre quoi et quoi l'équilibre se fera.*‡

2) Pour les équations du mouvement, le plus simple est de les écrire sous forme vectorielle avec $\mathbf{q} = \binom{r}{z}$ et $\mathbf{p} = \binom{p_r}{p_z}$:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{m}\mathbf{p} \tag{2a}$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -k\mathcal{M}\mathbf{q} + mg\mathbf{V} \tag{2b}$$

avec :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos(\alpha) \\ -\cos(\alpha) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2c}$$

‡*Le fait de sortir les constantes avec dimension et les signes, permet de facilement repérer quelle physique donne quel terme et à quel comportement cela conduit.*‡

On peut en principe résoudre ce système de quatre équations linéaires couplées. Mais vu que les équations (2a) sont triviales, il existe une autre méthode plus simple. Dériver (2a) par rapport au temps, puis y insérer (2b) :

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\frac{k}{m}\mathcal{M}\mathbf{q} + g\mathbf{V} \tag{2d}$$

‡*A ce stade on voit déjà que le système aura un comportement oscillatoire avec une fréquence qui sera donnée par k/m, multiplié par des nombres sans unité.*‡

(2d) est un système d'équations linéraires non-homogène (à cause du terme $g\mathbf{V}$). La solution sera donnée par une solution particulière et une solution à l'équation homogène.

On peut par exemple chercher une solution particulière indépendante du temps, elle sera donnée par :

$$\mathbf{q}_\star = \frac{mg}{k}\mathcal{M}^{-1}\mathbf{V} \tag{3a}$$

‡*A nouveau on peut vérifier les unités, "k·(dist)" et "mg" sont des forces, donc ok. Sinon pour trouver $\mathcal{M}^{-1}$ on peut partir de l'idée qu'elle aura la même forme que $\mathcal{M}$:*

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \textit{ce qui donne} \quad a = \frac{1}{\sin^2(\alpha)}\ ,\ b = \frac{\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}$$

‡ On obtient :

$$\mathbf{q}_\star = \frac{mg}{k}\frac{1}{\sin^2(\alpha)}\begin{pmatrix} 2\cos(\alpha) \\ 1+\cos^2(\alpha)\end{pmatrix} \tag{3b}$$

Maintenant on doit résoudre l'équation homogène. Pour ce faire, on pose l'Ansatz :

$$\mathbf{q}_{\text{homogene}}(t) = \bar{\mathbf{q}}e^{i\omega t} \tag{4a}$$

En l'insérant dans (2d) on obtient une équation linéaire :

$$\begin{pmatrix} k/m-\omega^2 & -k/m\cos(\alpha) \\ -k/m\cos(\alpha) & k/m-\omega^2 \end{pmatrix}\bar{\mathbf{q}} = 0 \tag{4b}$$

afin que la solution soit non-triviale, il faut que le déterminant de la matrice soit nul. ‡*Si le déterminant est non-nul on peut inverser la matrice, et alors la solution est* $\bar{\mathbf{q}} = 0$.‡ Ceci conduite à une équation pour ω :

$$\boxed{\omega_\pm^2 = \frac{k}{m}[1\pm\cos(\alpha)]} \tag{4c}$$

Il reste à trouver les vecteurs propres associés :

$$\bar{\mathbf{q}}_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1\end{pmatrix} \tag{4d}$$

‡*Ici on obtient facilement un faute de signe ; pour vérifier on peut par exemple regarder le cas* $\alpha = 0$. *Même direction (*$\bar{\mathbf{q}}_-$*), chute libre, i.e. pas d'oscillation, en effet* $\omega_- = 0$, *ok.*‡ On a fait un Ansatz complexe, mais on sait que le problème est réel ; donc et la partie imaginaire et la partie réelle sont solution indépendamment. La solution générale peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbf{q} \;=\; \frac{mg}{k\sin^2(\alpha)}\Bigg\{ & \begin{pmatrix} 2\cos(\alpha) \\ 1+\cos^2(\alpha)\end{pmatrix} \\ & +\big[\alpha_+\cos(\omega_+ t)+\beta_+\sin(\omega_+ t)\big]\bar{\mathbf{q}}_+ \\ & +\big[\alpha_-\cos(\omega_- t)+\beta_-\sin(\omega_- t)\big]\bar{\mathbf{q}}_-\Bigg\}\end{aligned} \tag{5a}$$

‡*Il est clair que les facteurs devant la solution homogène seront liés à la solution particulière une fois les conditions initiales imposées, c'est pourquoi il est judicieux de faire la mise en évidence dès le début.*‡ Avec les conditions initiales $\mathbf{q}(0) = \dot{\mathbf{q}}(0) = 0$ on obtient

$$\beta_\pm = 0 \quad , \quad \alpha_+ = \tfrac{1}{2}\big(1-\cos(\alpha)\big)^2 \quad , \quad \alpha_- = -\tfrac{1}{2}\big(1+\cos(\alpha)\big)^2 \tag{5b}$$

et donc finalement :

$$\boxed{\begin{pmatrix} r \\ z\end{pmatrix} = \frac{mg}{k\sin^2(\alpha)}\begin{pmatrix} 2\cos(\alpha)+\frac{1}{2}\big(1-\cos(\alpha)\big)^2\cos(\omega_+ t)-\frac{1}{2}\big(1+\cos(\alpha)\big)^2\cos(\omega_- t) \\ 1+\cos^2(\alpha)-\frac{1}{2}\big(1-\cos(\alpha)\big)^2\cos(\omega_+ t)-\frac{1}{2}\big(1+\cos(\alpha)\big)^2\cos(\omega_- t)\end{pmatrix}} \tag{5c}$$

‡*Maintenant il reste à vérifier le comportement de cette solution (asymptotes* $g\to 0$, $k\to 0$, $\alpha\to 0,\pi/2$*). Pour* $g=0$*, rien ne bouge : ok. Ensuite,* $k\to 0$*. Il faut faire un petit peu plus attention en prenant la limite :*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} r \\ z\end{pmatrix} \;&\rightarrow\; \frac{mg}{k\sin^2(\alpha)}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1-\cos(\alpha))^2\frac{1}{2}\omega_+^2t^2+\frac{1}{2}(1+\cos(\alpha))^2\frac{1}{2}\omega_-^2t^2 \\ +\frac{1}{2}(1-\cos(\alpha))^2\frac{1}{2}\omega_+^2t^2+\frac{1}{2}(1+\cos(\alpha))^2\frac{1}{2}\omega_-^2t^2\end{pmatrix} \\ &=\; \frac{1}{2}gt^2\begin{pmatrix}\cos(\alpha) \\ 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ok. Pour $\alpha = \pi/2$, les deux fréquences sont les mêmes, et on trouve $r = 0$, $z = \frac{mg}{k}(1 - \cos(\omega t))$, ok. Finalement il reste $\alpha \to 0$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix} &\to \frac{mg}{k\alpha^2}\begin{pmatrix} 2(1-\frac{1}{2}\alpha^2) + \mathcal{O}(\alpha^4) - \frac{1}{2}(2-\frac{1}{2}\alpha^2)(1-\frac{1}{4}\frac{k}{m}\alpha^2 t^2) \\ 1 + (1-\frac{1}{2}\alpha^2)^2 + \mathcal{O}(\alpha^4) - \frac{1}{2}(2-\frac{1}{2}\alpha^2)(1-\frac{1}{4}\frac{k}{m}\alpha^2 t^2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}gt^2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ok. Donc, à ce moment, on se dit que ce résultat doit avoir du vrai. Evidemment, on n'a pas toujours le temps de prendre toutes ces limites, mais avec $g = 0$ et $\alpha = \pi/2$ on a déjà un bon test de la solution. ‡

Exercice 2

1) La matrice de la transformation est donnée par :

$$(M\phi^t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{3}{2}} & \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \tag{6}$$

La condition pour que la matrice jacobienne de la transformation soit symplectique est donc facilement vérifiée :

$$(M\phi^t)^T J (M\phi^t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{3}{2}} & \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = J$$

Dans le cas de la méthode des crochets de poisson, le seule crochets de poisson non trivial est le suivant :

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = \left(\frac{3}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}\right) - \left(-\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}\right) = 1$$

2) On cherche un fonction génératrice de type deux. A partir de la transformation donnée, on obtient les expressions suivantes :

$$Q = Pq^2 = \frac{\partial F_2}{\partial P} \tag{7}$$

$$p = (Pq^{\frac{1}{2}})^2 = \frac{\partial F_2}{\partial q} \tag{8}$$

En intégrant la première en obtient :

$$F_2(q, P) = \frac{1}{2}P^2q^2 + f(q) \tag{9}$$

qui, remplacée dans la deuxème nous donne :

$$qP^2 + f'(q) = qP^2 \tag{10}$$

$$f'(q) = 0 \tag{11}$$

$$f(q) = C \tag{12}$$

La fonction génératrice de la transformation canonique est donc donnée par :

$$F_2(q, P) = \frac{1}{2}q^2P^2 + C. \tag{13}$$

Exercice 3

1) Le Lagrangien du système est donné par

$$\mathcal{L}(x, z, \dot{x}, \dot{z}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz \tag{14}$$

Le Lagrangien ne dépend pas de la variable x. Il s'agit donc d'une coordonnée cyclique à la quelle correspond la quantité conservée :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x = const \tag{15}$$

En plus, le Lagrangien est aussi indépendant du temps. La fonction hamiltonienne est donc conservée :

$$h = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + mgz = T + V = E = const \tag{16}$$

2) Le hamiltonien du système est conservé. On peut donc écrire l'équation de Hamilton-Jacobi dans le cas indépendant du temps

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] + mgz = E \tag{17}$$

A l'aide de la mťhode de séparation des variables, on applique l'ansatz

$$W(x, z) = W_x + W_z \tag{18}$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2\right] + mgz = E \tag{19}$$

$$\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2 = 2mE - 2m^2gz - \left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2 \tag{20}$$

Pour que l'égalité soit satisfaite, les termes qui se trouvent des deux cotés doivent être égales à une constante :

$$\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2 = \alpha_2 \tag{21}$$

$$\left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2 = 2mE - \alpha_2 - 2m^2gz \tag{22}$$

L'intégration des deux expressions nous donne :

$$W_x = \sqrt{\alpha_2}x + C_1 \tag{23}$$

$$W_z = -\frac{1}{3m^2g}[2mE - \alpha_2 - 2m^2gz]^{\frac{3}{2}} + C_2 \tag{24}$$

Et finalment :

$$W(x, z, E, \alpha_2) = \sqrt{\alpha_2}x - \frac{1}{3m^2g}[2mE - \alpha_2 - 2m^2gz]^{\frac{3}{2}} + C \tag{25}$$

3) Puisque les Q_i sont des constantes et que le Hamiltonien ne dépend pas du temps, la dérivé partielle de W en fonction de E nous donne :

$$-\frac{1}{mg}(2mE - \alpha_2 - 2m^2gz)^{\frac{1}{2}} = t + A \tag{26}$$

ou A est une constante. Avec la condition initiale $y(0) = 0$ on trouve pour la constante :

$$A = \frac{\sqrt{2mE - \alpha_2}}{mg} \tag{27}$$

et donc finalment :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - \frac{\sqrt{2mE - \alpha_2}}{m}t \tag{28}$$

De la même façon la dérivé de W par rapport à α_2 conduit à la solution $x(t)$.