
RELATIVITE ET COSMOLOGIE II

Rappel sur g_*

29 avril 2008

Commençons par nous rappeler la définition de la densité de particules n et la densité ρ :

$$\begin{cases} n^{B,F} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{e^{(E_p - \mu)/T} \mp 1} \\ \rho^{B,F} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{E_p}{e^{(E_p - \mu)/T} \mp 1} \end{cases}$$

C'est ici qu'apparaît pour la première fois le nombre de degrés de liberté g . On sait que g vaut respectivement 1, 2, 3 et 4 pour une particule scalaire, un photon, un boson massif et un fermion de Dirac. Le cas des neutrinos est particulier : il a deux degrés de liberté uniquement : il ne possède qu'une seule hélicité.

Prenons deux limites :

– *Limite relativiste* : Comme nous l'avons calculé à la série 7, on a

$$n^B = g \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3$$

$$n^F = \frac{3}{4} n^B$$

$$\rho^B = g \frac{\pi^2}{30} T^4$$

$$\rho^F = \frac{7}{8} \rho^B$$

$$s^B = g \frac{2\pi^2}{45} T^3$$

$$s^F = \frac{7}{8} s^B$$

– *Limite non-relativiste* : Dans ce cas le ∓ 1 de la statistique peut être ignoré et l'on obtient la même expression pour bosons et fermions (cf série 3) :

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\mu - m}{T} \right)$$

$$\rho = mn$$

Comparons maintenant la densité de deux espèces, l'une relativiste, l'autre non ; supposons de plus qu'elles sont en équilibre thermique :

$$\frac{n_i^{NR}}{n_j^R} = \left(\frac{g_i}{g_j} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\zeta(3)} \right) \left(\frac{m_i}{T} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\mu_i - m_i}{T} \right)$$

On constate donc que comme $m_i \gg T$ la contribution des espèces non relativistes est exponentiellement supprimée par rapport aux espèces relativistes, sauf si le potentiel chimique est suffisamment grand par rapport à T , ce qui n'arrivera jamais dans les situations que nous considérons.

Il est important de noter que la densité de particule dans un volume comobile n'est pas conservée si des interactions ont lieu. On peut par contre montrer que la densité d'entropie est toujours conservée dans un volume comobile ! On peut de plus prouver que, tout comme pour la densité de particule, l'entropie des particules non-relativistes est exponentiellement supprimée. On a donc conservation de

$$s(T) = \frac{2\pi^2}{45} g_* T^3$$

dans un volume comobile, c'est à dire conservation de $g_* T^3 a^3$ où g_* est donné par

$$g_* = \sum_{\text{bosons rel.}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermions rel.}} g_i$$

On voit donc que lorsque g_* est conservé, n l'est aussi. Mais n n'est pas conservé en général puisqu'il diffère quelque peu de s :

$$n = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \left(\sum_{\text{bosons rel.}} g_i + \frac{3}{4} \sum_{\text{fermions rel.}} g_i \right) T^3$$

Exemple : Température des neutrinos

On a montré au cours que la température de découplage des neutrinos est d'environ 2 MeV. Pour ce faire on a comparé le rythme des interactions ($\sigma n v$) au rythme d'expansion de l'Univers ($2H$). Après le découplage les neutrinos conservent leur entropie. Le produit $T_\nu a$ est donc exactement constant. Ceci est dû au fait que les neutrinos ayant découplé, ils n'interagissent plus avec le plasma et donc un transfert d'entropie entre les neutrinos et le plasma est impossible.

Ecrivons maintenant l'entropie à divers moments :

– *Avant découplage des neutrinos*

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_* T^3 \quad \text{où} \quad g_* = 2 + \frac{7}{8}(2 \times 2 + 6) = 10.75$$

– *Après découplage des neutrinos ($T \sim 2 \text{ MeV}$)*

$$\begin{aligned} s &= s_{\text{plasma}} + s_{\text{neutrinos}} \\ &= \frac{2\pi^2}{45} \left(2 + \frac{7}{8}(2 \times 2) \right) T^3 + \frac{2\pi^2}{45} \left(\frac{7}{8} \times 6 \right) T_\nu^3 \end{aligned}$$

– *Après l'annihilation des positrons ($T \sim 0.5 \text{ MeV}$)*

$$\begin{aligned} s &= s_{\text{plasma}} + s_{\text{neutrinos}} \\ &= \frac{2\pi^2}{45} (2) T^3 + \frac{2\pi^2}{45} \left(\frac{7}{8} \times 6 \right) T_\nu^3 \end{aligned}$$

Comme l'entropie est conservée individuellement pour des espèces découplées, on doit identifier l'entropie du plasma après découplage des neutrinos avec celle après l'annihilation des positrons. Pour le plasma on trouve donc :

$$\frac{11}{2} (Ta)_{\text{avant}}^3 = 2(Ta)_{\text{après}}^3$$

On voit donc que pendant l'annihilation des positrons T ne se comporte pas comme a^{-1} . Ceci est dû au changement de g_* : Ta augmente pour compenser la perte des degrés de liberté. Pour les neutrinos on a :

$$(T_\nu a)_{\text{avant}}^3 = (T_\nu a)_{\text{après}}^3$$

Notons que la température des neutrinos après leur découplage est la même que celle du plasma et que la température finale du plasma est la température des photons. En combinant le tout on trouve

$$\left(\frac{T_\nu}{T_\gamma} \right)_{\text{après}} = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3}$$