Corrigé 6

Exercice 1

a)

$$
\begin{aligned}
f+\frac{1}{\beta}\ln 2 &= -\frac{1}{\beta}\ln\left[\cosh\left(\beta Jmz+\beta h\right)\right]+Jm^2\frac{z}{2} \\
&= Jm^2\frac{z}{2}-\frac{1}{\beta}\ln\left[1+\frac{1}{2}(\beta Jzm+\beta h)^2+\frac{1}{4!}(\beta Jzm+\beta h)^4\right] \\
&= Jm^2\frac{z}{2}-\frac{1}{\beta}\ln\left[1+\frac{1}{2}(\beta^2J^2z^2m^2+2\beta^2Jzhm)+\frac{1}{4!}(\beta^4J^4z^4m^4+4\beta^4J^3z^3hm^3)\right] \\
&= Jm^2\frac{z}{2}-\frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{2}(\beta^2J^2z^2m^2+2\beta^2Jzhm)+\frac{1}{4!}(\beta^4J^4z^4m^4+4\beta^4J^3z^3hm^3)\right] \\
&\quad -\frac{1}{\beta}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\beta^2J^2z^2m^2+2\beta^2Jzhm)+\frac{1}{4!}(\beta^4J^4z^4m^4+4\beta^4J^3z^3hm^3)\right)^2\right] \\
&= Jm^2\frac{z}{2}-\frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{2}(\beta^2J^2z^2m^2+2\beta^2Jzhm)+\frac{1}{4!}(\beta^4J^4z^4m^4+4\beta^4J^3z^3hm^3)\right] \\
&\quad -\frac{1}{\beta}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\beta^4J^4z^4m^4+\beta^4J^3z^3hm^3\right)\right] \\
&= Jm^2\frac{z}{2}-\frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{2}\beta^2J^2z^2m^2+\beta^2Jzhm-\frac{1}{3}\beta^4J^3z^3hm^3-\frac{1}{12}\beta^4J^4z^4m^4\right] \\
&= -\frac{T_C}{T}hm+\frac{Jz}{2}(1-\frac{T_C}{T})m^2+\frac{1}{3}\left(\frac{T_C}{T}\right)^3hm^3+\frac{1}{12}\left(\frac{T_C}{T}\right)^3Jzm^4 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

b) Si $h=0$ nous avons deux cas de figure possibles. Si $T>T_C$, f n'admet qu'un seul minimum en $m=0$. Si $T<T_C$, alors f a un maximum en $m=0$ et deux minima, ce qui montre que le point $m=0$ est instable, d'où l'apparition d'une aimantation spontanée.

c) Si $T<T_C$ et $h<0$, le minimum pour $m<0$ est plus favorable, alors que si $h>0$, c'est le contraire (cf Figure 1).

Pour terminer remarquons que les termes en h n'apparaissent que pour les puissances impaires de m. Ceci était prévisible car si $h=0$, l'énergie libre associée à $\pm m$ doit être la même. Ceci permet entre autre de conclure que pour un système avec une symétrie $m\leftrightarrow -m$, l'énergie libre doit être une fonction paire et donc que seuls les termes pairs apparaissent dans le développement limité.

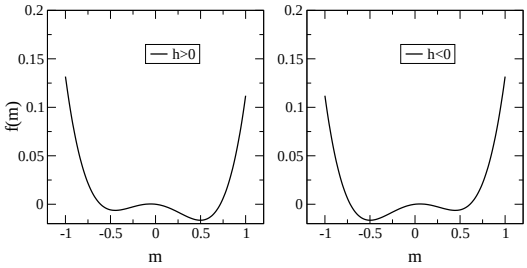

Figure 1: Energie libre avec $\frac{T_C}{T} = 1.1$, $Jz = 2$, $h = \pm 0.01$

Exercice 2

On se place à une pression extérieur $p = p(v_C, T)$ et on regarde comment se comporte $g = f + pv$ pour des petites variations de volume à température constante:

$$\begin{aligned} f(v_C+\Delta v,T)+p(v_C,T)(v_C+\Delta v) &= f(v_C,T)+p(v_C,T)v_C+\left.\frac{\partial f(v,T)}{\partial v}\right|_{v_C}\Delta v+p(v_C,T)\Delta v \\ &+ \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f(v,T)}{\partial v^2}\right|_{v_C}\Delta v^2+\frac{1}{3!}\left.\frac{\partial^3 f(v,T)}{\partial v^3}\right|_{v_C}\Delta v^3+\frac{1}{4!}\left.\frac{\partial^4 f(v,T)}{\partial v^4}\right|_{v_C}\Delta v^4 \end{aligned}$$

On calcule les dérivées:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f(v,T)}{\partial v}\right|_{v_C} &= -p(v_C,T) \quad \text{par définition} \\ \left.\frac{\partial^2 f(v,T)}{\partial v^2}\right|_{v_C} &= \frac{kT}{(v_C-b)^2}-2\frac{a}{v_C^3} = \frac{k_B}{4b^2}(T-T_C) \\ \left.\frac{\partial^3 f(v,T)}{\partial v^3}\right|_{v_C} &= -\frac{2kT}{(v_C-b)^3}+6\frac{a}{v_C^4} = \frac{k_B}{4b^3}(T_C-T) \\ \left.\frac{\partial^4 f(v,T)}{\partial v^4}\right|_{v_C} &= \frac{6kT}{(v_C-b)^4}-24\frac{a}{v_C^5} = \frac{k_B}{b^4}\left(\frac{3}{8}T-\frac{1}{3}T_C\right) \end{aligned}$$

En introduisant les expressions ci-dessus dans (2), on obtient:

$$\begin{aligned} f(v_C+\Delta v,T)+p(v_C,T)v &= f(v_C,T)+p(v_C,T)v_C+\frac{1}{2}\frac{k_B}{4b^2}(T-T_C)\Delta v^2 \\ &+\frac{1}{3!}\frac{k_B}{4b^3}(T_C-T)\Delta v^3+\frac{1}{4!}\frac{k_B}{b^4}\left(\frac{3}{8}T-\frac{1}{3}T_C\right)\Delta v^4 \qquad (2) \\ & \qquad (3) \end{aligned}$$

Si $T > T_C$, f a un minimum en v_C et le système est stable (en effet, on peut montrer que si le terme en Δv^3 peut induire un deuxième minimum, ce dernier est toujours moins favorable que $\Delta v = 0$). Par contre si $T < T_C$, f possède un maximum en v_C et le système est instable à ce point. C'est exactement le comportement que l'on avait vu à la série 1, où les valeurs de v proche de v_C sont instables si $T < T_C$. A nouveau le terme en Δv^3 introduit une asymétrie et le minimum avec $\Delta v < 0$ est plus favorable ($T_C - T > 0$).

Remarquons que dans les deux cas précédents nous avons pu déduire des propriétés du système proche du point critique telle que la transition de phase, en considérant le développement limité de l'énergie libre. C'est une des idées fondamentales du l'étude des transitions de phase, qui a donné lieu à la théorie de Ginzburg-Landau.