Corrigé 13

Exercice 1

a) On prend comme unité de longueur la maille du réseau. A chaque pas de renormalisation les spins distants de 2 deviennent distants de 1. Donc $b = 2$ car la corrélation entre deux spins (par exemple s_1 et s_3) après renormalisation est équivalente à celle avant.

b) On a:

$$\begin{aligned} b\xi\left(v_{n+1}-v^*\right) &= \xi\left(v_n - v^*\right) \\ \Leftrightarrow b\xi\left(R'(v^*)(v_n - v^*)\right) &= \xi(at) \\ \Leftrightarrow b\xi\left(R'(v^*)at\right) &\sim |at|^{-\nu} \\ \Leftrightarrow b\left[R'(v^*)at\right]^{-\nu} &\sim |at|^{-\nu} \\ \Leftrightarrow \nu = \frac{\ln b}{\ln R'(v^*)} & \end{aligned} \tag{1}$$

Le cas où $R'(v^*) = 1$ donne un exposant ν infini. C'est le cas d'un système invariant par renormalisation au premier ordre sur le point critique, donc avec des correlations qui croissent exponentiellement rapidement au point critique.

Exercice 2

a) Le nombre de sites est proportionnel au nombre de triangles. En effet pour chaque triangle il y a trois sites et chaque site fait partie de deux triangles, sauf les trois sommets du triangle initial. Donc $N \sim V \sim L^{D_f}$. Donc à chaque itération de la transformation de renormalisation, N diminue d'un facteur b^{-D_f}:

$$N' = b^{-D_f} N$$

b) La fonction de partition du Sierpinsky Gasket avec N' sites et K' s'écrit comme:

$$Z'(K') = \sum_{\{s'\}} \exp\left(\sum_{(ij)=1}^{N'} K' s'_i s'_j\right)$$

D'autre part on sait par la série précédente que pour le système initial, nous avons:

$$Z(K) = \sum_{\{s\}} \exp\left(\sum_{(ij)=1}^{N} K s_i s_j\right) = M(K) \sum_{\{s'\}} \exp\left(\sum_{(ij)=1}^{N'} K' s'_i s'_j\right)$$

avec $M(K)$ comprenant la dépendance en C et en $\cosh(K)$.

On en déduit que:

$$\begin{aligned}
f(K') &= \frac{-1}{N'}\ln\left(\sum_{\{s\}}\exp\left(\sum_{(ij)=1}^{N'} K's_is_j\right)\right)\\
&= \frac{-1}{N'}\ln\left(\frac{1}{M(K)}\sum_{\{s\}}\exp\left(\sum_{(ij)=1}^{N} Ks_is_j\right)\right)\\
&= \frac{-b^{D_f}}{N}\left(-\ln(M(K))+\ln\left(\sum_{\{s\}}\exp\left(\sum_{(ij)=1}^{N} Ks_is_j\right)\right)\right)\\
&= b^{D_f}\left[\frac{1}{N}\ln(M(K))+f(K)\right]\\
\Leftrightarrow f(K) &= g(K)+b^{-D_f}f(K') \qquad (2)
\end{aligned}$$

c) Tout près du point critique nous avons que $K'-K^* = R'(K^*)(K-K^*)$. L'équation (2) en ne tenant compte que de la partie singulière devient:

$$\begin{aligned}
f(K-K^*) &= b^{-D_f}f(K'-K^*)\\
\Leftrightarrow f(at) &= b^{-D_f}f(R'(K^*)at) \qquad (3)
\end{aligned}$$

On a donc que $\lambda = b^{D_f}$ et $s = \frac{\ln R'(K^*)a}{\ln\lambda}$.

d) La relation trouvée en (3) peut être généralisée à n applications successives de R:

$$f(at) = b^{-nD_f}f\left(b^{yn}at\right)$$

A ce stade on choisit un n tel que $b^{yn}\sim t^{-1}$:

$$n = \left[\frac{-1}{y}\frac{\ln t}{\ln b}\right]$$

où les crochets désignent la partie entière. Donc:

$$b^{-nD_f}\sim t^{\frac{D_f}{y}}$$

Ce qui donne:

$$f(at)\sim t^{\frac{D_f}{y}}f(a)$$

La partie singulière de la chaleur spécifique correspond à la deuxième dérivée de l'énergie libre par rapport à t:

$$C\sim t^{\frac{D_f}{y}-2}\sim t^{-\alpha}$$

Donc $\alpha = 2-\frac{D_f}{y}$.

Remarque: Nous avons utilisé le même symbole f pour $f(K)$ et $f(K-K^*)$. Formellement il s'agit de deux fonctions différentes dans lesquels on a simplement effectué une translation des variables. Notons aussi que lorsque que l'on écrit $f(K')$, il ne s'agit pas seulement d'évaluer f avec K' au lieu de K, mais aussi de prendre N' spins.