Corrigé 12

a) On sait que:

$$V \sim L^{D_f}$$

L est le nombre de divisions par côté du triangle initial. V est le nombre de petits triangles.

Aprés n itérations, on a: $L = 2^n$ et $V = 3^n$.
D'où:

$$3^n = 2^{nD_f} \Leftrightarrow D_f = \log_2 3$$

b) Les termes contenant s_2, s_4, s_6 dans la fonction de partition sont de la forme:

$$Z = \sum_{s_2,s_4,s_6} \exp(Ks_1s_2 + Ks_2s_3 + Ks_3s_4 + Ks_4s_5 + Ks_5s_6 + Ks_6s_1 + Ks_2s_4 + Ks_4s_6 + Ks_6s_2)$$

On commence par effectuer la somme sur s_2, puis sur s_4 et finalement sur s_6. Il faut remarquer que si s_2 apparaît avec une puissance impaire, les termes vont s'annuler dans la somme. Si par contre il apparaît avec une puissance paire, les termes s'additionnent. On obtient finalement:

$$\begin{aligned}
Z &= \cosh^9(K) \sum_{s_4,s_6} (1+vs_3s_4)(1+vs_4s_5)(1+vs_5s_6)(1+vs_6s_1)2\left(1+v^2(2s_1s_3+s_1s_4+s_1s_6+s_3s_6+s_4s_6)+v^4s_1s_3s_4s_6\right) \\
&= \ldots \\
&= 8\cosh^9(K)\Big(1+(v^2+v^7)(s_5s_1+s_3s_5+s_1s_3)+(v^3+v^6)(4+3s_1s_3+3s_1s_5+3s_5s_3)+(v^4+v^5)(3+4s_5s_1+4s_5s_3+4s_3s_1)+v^9\Big) \\
&= 8\cosh^9(K)\Big(1+4v^3+3v^4+3v^5+4v^6+v^9+(s_1s_3+s_3s_5+s_5s_1)(v^2+3v^3+4v^4+4v^5+3v^6+v^7)\Big) \qquad (1)
\end{aligned}$$

c) Pour obtenir la transformation de renormalisation, il faut comparer (1) à:

$$C\cosh^3(K')(1+v's_1s_3)(1+v's_3s_5)(1+v's_5s_1) = C\cosh^3(K')\left(1+v'^3+(s_1s_3+s_1s_5+s_5s_3)(v'+v'^2)\right)$$

En évaluant pour les différentes valeurs de spins, on en tire les deux équations:

$$\begin{cases} C\cosh^3(K')(1+3v'+3v'^2+v'^3) = 8\cosh^9(K)\left(1+3v^2+13v^3+15v^4+15v^5+13v^6+3v^7+v^9\right) \\ C\cosh^3(K')(1-v'-v'^2+v'^3) = 8\cosh^9(K)\left(1-v^2+v^3-v^4-v^5+v^6-v^7+v^9\right) \end{cases}$$

d) $v=v'=0$ implique immédiatemment que $C=8$. D'autre part pour $v=v'=1$ la deuxième équation est toujours satisfaite, alors que la premiére implique $C=64\cosh^6(K)=64\cosh^6(\text{arctanh}(v))$. C'est un comportement quelque peu pathologique, mais C peut prendre n'importe quelle valeur, même une valeur infinie... Donc $v=0$ et $v=1$ sont deux points d'équilibre

e) On divise la première équation par la deuxième:

$$\frac{1+3v'+3v'^2+v'^3}{1-v'-v'^2+v'^3} = \frac{1+3v^2+13v^3+15v^4+15v^5+13v^6+3v^7+v^9}{1-v^2+v^3-v^4-v^5+v^6-v^7+v^9}$$

On pose:

$$h(v') = \frac{1+3v'+3v'^2+v'^3}{1-v'-v'^2+v'^3}$$

$$f(v) = \frac{1+3v^2+13v^3+15v^4+15v^5+13v^6+3v^7+v^9}{1-v^2+v^3-v^4-v^5+v^6-v^7+v^9}$$

En dessinant $h(v)$ sur Mathematica (ou par une étude plus approfondie pour les motivés...), on voit immédiatement que c'est une fonction monotone et continue sur $[0,1)$, donc inversible. A ce stade on utilise le fait que $(h^{-1}(f(v)))' = \frac{1}{h'(f(v))} f'(v)$. Or il se trouve que dans notre cas le DL de $f(v)$ autour de $v=0$ n'admet aucun terme à l'ordre 1. Donc $f'(v=0)=0$, ce qui permet de conclure que le point d'équilibre $v=0$ est stable.

f) Nous savons donc que le système a trois point d'équilibre avec $|h^{-1}(f(v=0))'| = 0 < 1$. Etant donné que $h^{-1}(f(v))$ est une fonction continue sur $[0,1)$, nous pouvons en conclure que $(h^{-1}(f(v^*)))' \geq 1$. Or et $|h^{-1}(f(v^*))'| \neq 1$. Donc $(h^{-1}(f(v^*)))' > 1$, ce qui prouve que le point v^* est instable (cf. Figure). Et donc le point $v=1$ est stable car il ne peut y avoir deux points instables sans point stable entre eux.

L'existence du point instable montre que pour $v < v^*$ le système se comporte comme pour $v=0$, donc $T=\infty$, alors que pour $v > v^*$, le système se comporte comme pour $v=1$, donc $T=0$. D'où l'existence d'une transition de phase. Les calculs numériques donnent $v^* = 0.49386$.

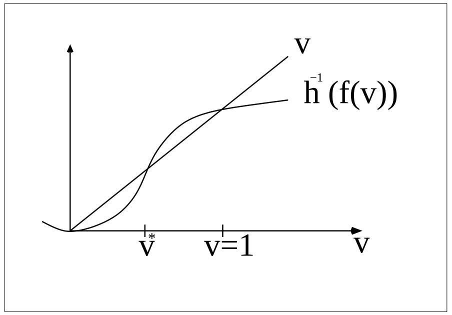

Figure 1: Graphe qualitatif du comportement de $h^{-1}(f(v))$.