Cours de Physique Mathématique

EPFL, *Lausanne*

Exercice 1

- Montrer que la matrice représentant une rotation d'un angle θ en 2 dimensions peut s'écrire comme:
$$R(\theta) = e^{\theta X}; \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Montrer que la matrice représentant une transformation de Lorentz en 2 dimensions (une spatiale et une temporelle) de rapidité $\delta = \tanh^{-1}\frac{v}{c}$ peut s'écrire comme:
$$L(\delta) = e^{\delta X}; \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soient $\sigma_i, \ \ i = 1, 2, 3$ les matrices de Pauli:
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Calculer:
$$e^{i\alpha^1\sigma_1}, \quad e^{i\alpha^2\sigma_2}, \quad e^{i\alpha^3\sigma_3}$$
$$e^{\delta^1\sigma_1}, \quad e^{\delta^2\sigma_2}, \quad e^{\delta^3\sigma_3}$$

Exercice 3

Montrer que tout $U \in \mathrm{SU}(2)$ peut s'écrire sous la forme:
$$U = \exp(-it\,\mathbf{n}\cdot\sigma)$$
avec $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ tel que $|\mathbf{n}| = 1$ et σ_i les trois matrices de Pauli.
Indication: Utiliser le resultat vu dans l'ex. 1 de la série 3 selon lequel l'expression la plus generale pour une matrice de SU(2) est:
$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$
avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Exercice 4

Soient X et Y deux matrices $n \times n$; verifier la relation suivante (Formule de Baker-Campbell-Hausdorff):
$$e^X e^Y = \exp\left\{X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \cdots\right\}$$
Dans quelles circonstances vous attendez-vous à ce que la série se reduise à une fonction simple de x et y?