Cours de Physique Mathématique

EPFL, *Lausanne*

Exercice 1

Montrer que les espaces quotients $SO(3)/SO(2)$ et $SO(2)\backslash SO(3)$ définis par:

$$SO(3)/SO(2) = \{ \ [g]_{SO(2)} \ | \ g \in SO(3) \ \}$$
$$SO(2)\backslash SO(3) = \{ \ {}_{SO(2)}[g] \ | \ g \in SO(3) \ \}$$

avec

$$[g]_{SO(2)} = \{g' \in SO(3) \ | \ g' = gh, \quad h \in SO(2)\}$$
$${}_{SO(2)}[g] = \{g' \in SO(3) \ | \ g' = hg, \quad h \in SO(2)\}$$

sont homéomorphes à la sphere $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ | \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$.

Indication: $SO(3)$ est le groupe des matrices de rotation dans $\mathbb{R}^3$ avec déterminant 1 et $SO(2)$ est le groupe des rotations dans $\mathbb{R}^2$, identifié au groupe des rotations autour de l'axe 3 dans $\mathbb{R}^3$. Utiliser la représentation en termes des *angles d'Euler*: toute rotation $g \in SO(3)$ peut s'écrire

$$g = \mathrm{R}_3(\phi)\mathrm{R}_1(\theta)\mathrm{R}_3(\psi)$$

où $0 \leqslant \phi < 2\pi, \ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \ 0 \leqslant \psi < 2\pi$ et $\mathrm{R}_\alpha(\varphi)$ désigne une rotation d'angle φ autour de l'axe α $(\alpha = 1, 2, 3)$.

Exercice 2

Calculer la caractéristique d'Euler χ à l'aide du théorème de Poincaré-Alexander (si $X \simeq Y$ alors $\chi(X) = \chi(Y)$) pour les variétés suivantes:

1. le tore T^2,
2. le ruban de Moebius $\mathcal{M}$,
3. la bouteille de Klein $\mathcal{K}$,
4. l'espace projectif RP^2.

Indication: Utiliser le fait que ces espaces sont homéomorphes à des espaces quotients obtenus à partir de $\mathbb{R}^2$ en utilisant des relations d'équivalence opportunes.