Cours de Physique Mathématique

EPFL, *Lausanne*

Exercice 1

Le groupe $SU(2)$ est le groupe des matrices 2×2 unitaires de déterminant 1 muni de la multiplication usuelle des matrices.

1. Vérifier que $SU(2)$ est un groupe;

2. Soit A une matrice 2×2 arbitraire paramétrisée par:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$$

   Trouver les conditions que l'on doit imposer sur les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pour que $A \in SU(2)$ et écrire l'expression la plus générale pour un élément de $SU(2)$ en fonction des paramètres indépendants;

3. Montrer que $SU(2)$ est homéomorphe à la 3-sphère

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Exercice 2

Soit $A = \{\mathcal{C}_+, \mathcal{C}_-\}$ un atlas associé à la variété S^2 (sphère) où les cartes $\mathcal{C}_+ = (M_+, \phi_+)$ et $\mathcal{C}_- = (M_-, \phi_-)$ sont définies par les coordonnées stéréographiques:

$$\begin{aligned}
\phi_+ : \quad & M_+ = S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
& P = (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \phi_+(P) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right) \\
\phi_- : \quad & M_- = S^2 \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
& P = (x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \phi_-(P) = \left(\frac{x_1}{1 + x_3}, \frac{x_2}{1 + x_3} \right)
\end{aligned}$$

1. Vérifier que ϕ_+ et ϕ_- sont des applications bijectives (en fait elles sont des homéomorphismes)

2. Montrer que $\mathcal{C}_o = (M_o, \phi_o)$ définie par les coordonnées polaires:

$$\begin{aligned}
\phi_o : \quad M_o = S^2 &\longrightarrow [0, \pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2 \\
P = (x_1, x_2, x_3) &\longrightarrow \phi_o(P) = (\theta, \phi)
\end{aligned}$$

$$\phi_o^{-1}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

   n'est pas une bonne carte.