Cours de Physique Mathématique

EPFL, *Lausanne*

Exercice 1

Considérons le groupe fini $\mathbb{Z}_3$ (*groupe cyclique d'ordre* 3) avec les 3 éléments e, a, b où e est l'identité.

1. Construire la table de multiplication des éléments, definie comme

\	e	a	b
e	e	a	b
a	a	aa	ab
b	b	ba	bb

   et montrer qu'elle est unique; en fait $\mathbb{Z}_3$ est l'unique groupe avec trois éléments. Procéder de la façon suivante:
   - Montrer que chaque ligne et chaque colonne de la table de multiplication peut contenir chaque élément du groupe une seule fois;
   - Construire l'unique table possible et dire si cela correspond à un groupe Abelien ou non-Abelien.

2. Construire les représentations possibles du groupe de dimension 1, par des nombres.

3. Montrer que les matrices suivantes definissent une représentation (de dimension 3):

$$\phi(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \phi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \phi(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Montrer que cette représentation est complètement réductible.

Exercice 2

Considérons l' ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers muni d'une loi de composition définie par:

$$n \circ m \equiv n + m$$

- Montrer que c'est un groupe;
- Montrer que

$$\phi(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une representation;
- Vérifier que $\phi(n)$ est réductible mais pas complètement réductible.

Exercice 3

Montrer que $\mathbb{R}^3 = \{trivecteurs\ \vec{u}\}$ muni d'un crochet entre deux éléments defini par:

$$\big[\vec{u}, \vec{v}\big] \equiv \vec{u} \times \vec{v}$$

est une algèbre de Lie.