# Cours de Physique Mathématique

EPFL, *Lausanne*

## Exercice 1

Soit $w$ une p-forme sur une varieté $M$ de dimension $n$:

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

et soit $*\omega$ la $(n-p)$-forme duale définie par:

$$\begin{aligned} *\omega &= \frac{1}{p!}\omega_{i_1\cdots i_p} * (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) \\ &= \frac{\sqrt{|g|}}{p!(n-p)!}\,\omega_{i_1\cdots i_p}\,\epsilon^{i_1\cdots i_p}{}_{j_{p+1}\cdots j_n} dx^{j_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{j_n} \end{aligned}$$

Soit

$$g_{ij} = \mathrm{diag}(\underbrace{1, ..., 1}_{\text{r fois}}, \underbrace{-1, ..., -1}_{\text{s fois}})$$

la métrique définie sur M avec $r + s = n$. Montrer qu'on a:

$$**\,\omega = (-1)^s(-1)^{p(n-p)}\omega$$

*Indication:* Utiliser (et vérifier) la relation:

$$\epsilon^{i_1\cdots i_n} = g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_n j_n}\,\epsilon_{j_1\cdots j_n} = (\det g_{ij})^{-1}\epsilon_{i_1\cdots i_n}$$

## Exercice 2

Soient V un espace vectoriel de dimension $n$, $a$ une $p$-forme et $b$ une $q$-forme.

1. Montrer que $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^p a \wedge db$;
2. Montrer que $a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a$;
3. Vérifier que si $f$ est une 0-forme alors $d(f da) = df \wedge da$.