Cours de Physique Mathématique

EPFL, *Lausanne*

Exercice 1

Soit $\mathbf{T}$ un tenseur de type (r,s) $\quad \mathbf{T}: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r \;\; fois} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \;\; fois} \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\mathbf{T} = T^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_s} \mathbf{e}_{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}_{j_r} \otimes \mathbf{e}^{*i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{e}^{*i_s}$$

$$T^{j_1 \ldots j_r}_{i_1 \ldots i_s} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{e}^{*j_1}, \cdots, \mathbf{e}^{*j_r}; \mathbf{e}_{i_1}, \cdots, \mathbf{e}_{i_s})$$

où $\mathbf{e}_i$ est une base de l'espace V et $\mathbf{e}^{*i}$ est la base duale de l'espace V^* avec la relation $\mathbf{e}_i(\mathbf{e}^{*j}) = \mathbf{e}^{*j}(\mathbf{e}_i) = \delta^j_i$.
A partir de $\mathbf{T}$ on peut définir les objets suivants

- *Contraction*

$$\mathcal{C}\mathbf{T}: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r-1 \;\; fois} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s-1 \;\; fois} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(\mathbf{u}^*_1, ..., \mathbf{u}^*_{r-1}; \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{s-1}) \longrightarrow \mathcal{C}\mathbf{T}(\mathbf{u}^*_1, ..., \mathbf{u}^*_{r-1}; \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{s-1}) = \\ = \mathbf{T}(\mathbf{u}^*_1, .., \mathbf{u}^*_{r-1}, \mathbf{e}^{*i}; \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{s-1}, \mathbf{e}_i)$$

- *Symétrisation* (pour le cas de tenseurs $(0,s)$)

$$Sym\mathbf{T}: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \;\; fois} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s) \longrightarrow Sym\mathbf{T}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s) = \\ = \frac{1}{s!} \sum_{\pi} \mathbf{T}(\mathbf{v}_{\pi(1)}, ..., \mathbf{v}_{\pi(s)})$$

- *Antisymétrisation* (pour le cas de tenseurs $(0,s)$)

$$Asym\mathbf{T}: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \;\; fois} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s) \longrightarrow Asym\mathbf{T}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s) = \\ = \frac{1}{s!} \sum_{\pi} (-1)^{\pi} \mathbf{T}(\mathbf{v}_{\pi(1)}, ..., \mathbf{v}_{\pi(s)})$$

1. En utilisant la définition de tenseur comme application linéaire de $V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V$ dans $\mathbb{K}$ montrer que $\mathcal{C}\mathbf{T}$, $Sym\mathbf{T}$ et $Asym\mathbf{T}$ sont des tenseurs (pour $Sym\mathbf{T}$ et $Asym\mathbf{T}$ considérer le cas $s = 2$).

2. Dériver les règles de transformation des composantes de $\mathcal{C}\mathbf{T}$, $Sym\mathbf{T}$ et $Asym\mathbf{T}$ lors d'un changement de base défini par la transformation: $\mathbf{e}'_i = \tilde{\Lambda}_i^{\ j} \mathbf{e}_j$ et $\mathbf{e}^{*i\prime} = \Lambda^i_{\ j} \mathbf{e}^{*j}$ avec $\tilde{\Lambda}_j^{\ i} \Lambda^j_{\ k} = \Lambda^i_{\ j} \tilde{\Lambda}_k^{\ j} = \delta^i_k$. Vérifier que ces sont bien les règles de transformation usuelles des tenseurs et que donc $\mathcal{C}\mathbf{T}$, $Sym\mathbf{T}$ et $Asym\mathbf{T}$ sont des tenseurs (pour $Sym\mathbf{T}$ et $Asym\mathbf{T}$ considérer le cas $s = 2$).

3. Généraliser les résultats précédentes pour $Sym\mathbf{T}$ et $Asym\mathbf{T}$ au cas de s arbitraire.

Exercice 2

1. Soit G un *groupe* et H un *sous-groupe* de G. Montrer que la relation entre $g, g' \in G$ définie par: $g \sim g' \Leftrightarrow \exists\ h \in H \mid g' = gh$ est une relation d'équivalence.

2. Soit G un *groupe* et H un *sous-groupe* de G. Montrer que la relation entre $g, g' \in G$ définie par: $g \sim g' \Leftrightarrow \exists\ h \in H \mid g' = hg$ est une relation d'équivalence.

3. Soit G un *groupe*. On dit que deux éléments $a, b \in G$ sont *conjugués*, et on l'indique avec $a \sim b$, si $\exists\ g \in G$ tel que $b = gag^{-1}$. Montrer que $\sim$ est une *relation d'équivalence* . La classe d'équivalence $[a] = \{gag^{-1} \mid g \in G\}$ est applée *classe de conjugaison*.

Exercice 3

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que la relation: $x \sim y \Leftrightarrow \exists\ n \in \mathbb{Z} \mid y = x + 2\pi n$ est une relation d'équivalence et identifier l'espace quotient $\mathbb{R}/\sim$.

2. Soient $x, y \in \mathbb{Z}$. Montrer que la relation: $x \sim y \Leftrightarrow \exists\ n \in \mathbb{Z} \mid y = x + 2n$ est une relation d'équivalence et identifier l'espace quotient $\mathbb{Z}/\sim$.

Exercice 4

Soit X un ensemble définit par $X = \{John, Paul, Ringo, George\}$; on peut définir les sous-ensembles $U_0 = \emptyset$, $U_1 = \{John\}$, $U_2 = \{John, Paul\}$,
$U_3 = \{John, Paul, Ringo, George\}$. Montrer que $\mathcal{T} = \{U_0, U_1, U_2, U_3\}$ définit une topologie sur X et que donc X est un espace topologique. Montrer que X n'est pas un espace de *Hausdorff* (ou separé).