

Exercice 1 *Transformations de Lorentz*

Une particule chargée se déplace dans le référentiel R du laboratoire où nous avons un champ magnétique $\mathbf{B} = B\hat{z}$ et un champ électrique $\mathbf{E} = E\hat{y}$, constants et avec $E \ll Bc$ (indication: négliger $O(E^2/B^2c^2)$). La vitesse de la particule est nonrelativiste.

- i) Trouver un référentiel R' , avec vitesse relative $\mathbf{v} = v\hat{x}$ par rapport à R , tel que $\mathbf{E}' = 0$ (c'est à dire, trouver v).
- ii) Calculer \mathbf{B}' et trouver la fréquence de Larmor du mouvement circulaire en R' .
- iii) Y a-t-il un rayonnement? Expliquer. Calculer la fréquence du rayonnement en R' .
- iv) Calculer la fréquence de la radiation en R , dans le sens positif et dans le sens négatif de l'axe x (indication: négliger $O(E^2/B^2c^2)$).
- v) Expliquer comment on pourrait déterminer la valeur du rapport E/B en mesurant les deux fréquences, même sans savoir la masse et la charge de la particule.

Exercice 2 *Multipôles*

La définition du n -pôle est:

$$Q_{i_1 \dots i_n} = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') T_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{x}')$$

où le tenseur $T_{i_1 \dots i_n}$ est défini par:

$$T_{i_1 \dots i_n} = (2n - 1)!! (x_{i_1} \dots x_{i_n}) - A_{i_1 \dots i_n}$$

avec la double factorielle définie par:

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 & \text{si } n \text{ impair} \\ n(n-2)(n-4) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n = -1, 0. \end{cases}$$

Le terme $A_{i_1 \dots i_n}$ contient des deltas de Kronecker de telle manière que la trace soit nulle, c'est-à-dire que (attention, il y a toujours une somme sur les indices répétés):

$$T_{i_1 \dots i_n} \delta_{i_k i_l} = 0 \quad \forall k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$$

- i) Considérer une charge $+q$ placée en \mathbf{a} . Calculer monopôle et dipôle.
- ii) Considérer la même charge dans un autre référentiel. La charge est maintenant placée en $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Calculer monopôle et dipôle. Est-ce qu'ils sont changés?
- iii) Faire le même exercice pour une charge $+q$ en \mathbf{a} et une charge $-q$ en \mathbf{c} . Calculer monopôle et dipôle dans ce référentiel et dans le référentiel traslé où les charges sont placées en $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ et en $\mathbf{c} + \mathbf{b}$. Est-ce qu'ils changent ou pas?
- iv) Deducire la règle générale. Quelle est la condition afin qu'un n -pôle ne dépende pas du choix de l'origine? [Extra: le montrer en général]

Exercice 3 Antenne

Une antenne est formée par un segment conducteur entre $z = -L/2$ et $z = L/2$, traversé par un courant:

$$I(z, t) = I_0 \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos(\omega t).$$

- i) Sous quelles conditions le rayonnement est dipolaire?
- ii) En utilisant l'équation de continuité, calculer la densité de charge
- iii) Calculer la puissance totale du rayonnement.

Formules utiles:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin(x) dx = 2.$$

Exercice 4 Champs électromagnétiques

Un fil conducteur infini, le long de l'axe z , est traversé par un courant:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \alpha t & t > 0 \end{cases}.$$

En utilisant:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{x}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{c^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

- i) Calculer \mathbf{A} .
- ii) Calculer les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} .
- iii) Calculer la limite du rapport $|\mathbf{E}|/c|\mathbf{B}|$ dans le cas $ct/r \rightarrow \infty$.

Formules utiles:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}).$$

Exercice 5 Problème de l'électrostatique

On considère la région $\{z \geq 0\}$. Le potentiel est nulle dans la région $\{z = 0, \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > b\}$, pendant que $V = 3V_0 \neq 0$ pour $\{z = 0, \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq a\}$ et $V = -V_0$ pour $\{z = 0, a < \rho \leq b\}$.

- i) Avez-vous besoin de la fonction de Green de Neumann ou Dirichlet? Écrire une bonne fonction de Green pour ce problème.
- ii) Écrire une expression sous forme intégrale pour le potentiel.
- iii) En utilisant le résultat (ii), trouver le potentiel à une grande distance $z \gg b$.
- iv) Le résultat (iii) montre que le terme dominant à une grande distance est un dipôle. Dire pour quelle valeur du rapport a/b le terme de dipôle est absent. Pouvez-vous dire en général, dans ce genre de problème, quelle est la condition pour avoir un terme de dipôle $\neq 0$?