Exercice 1 *Méthode des charges images - I*

Un fil infini avec une distribution de charge linéaire constante λ est posé perpendiculairement au plan (x, y), dans le quadrant positif, dans la position (x_0, y_0). Les deux plans $(x = 0, y \geq 0)$ et $(x \geq 0, y = 0)$ sont des surfaces conductrices avec potentiel nulle.

i) Trouver la fonction de Green du problème; de combien de charges images avez-vous besoin? Déterminer enfin l'expression du potentiel dû au fil conducteur dans tout l'espace en présence des deux plans conducteurs *.

* Il est peut etre utile de remarquer (mais pas necessaire!) qu'un fil avec charge linéaire constante en 3D est équivalent a une charge ponctuelle en 2D. Donc ce problème est équivalent à trouver le potentiel d'une charge ponctuelle en 2D en présence des deux lignes conductrices $(x = 0, y > 0,\ x > 0, y = 0)$.

ii) Déterminer la densité de charge σ induite sur le plan $(x \geq 0, y = 0)$ et montrer que la charge totale (pour unité de longueur en z) sur ce plan est donnée par:

$$Q = -\frac{2}{\pi}\lambda \arctan\left(\frac{x_0}{y_0}\right).$$

Quelle est la charge totale sur le plan $(x = 0, y \geq 0)$?

iii) Montrer que dans la condition $\rho \gg \rho_0$, où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, le potentiel peut être approximé comme:

$$\Phi \sim \frac{4\lambda}{\pi\epsilon_0}\frac{(x_0 y_0)(xy)}{\rho^4}.$$

Comment pouvez-vous interpéter ce résultat en raison du nombre de charges images qu'on a introduit?

Exercice 2 *Forces sur un conducteur*

En préparation pour l'exercice suivant, on va développer des outils formels qui permettent de traiter les distributions de charges et les champs qui ont des discontinuités. En effet, en éléctrostatique, dans un conducteur le champ éléctrique et la densité de charge sont nuls, mais sur la surface du conducteur on peut avoir une densité de charge σ et un champ éléctrique pointant dans la direction normale à la surface. Si on veut trouver la force totale sur le conducteur, on doit calculer

$$\int \rho \mathbf{E} = \mathbf{F}$$

et cet intégral peut cacher des ambiguités parce que sur la surface du conduceteur la densité de charge est une fonction delta, tandis que le champ éléctrique a une discontinuité. Comment est-ce qu'on peut évaluer cet intégral?

On considère alors une configuration éléctrostatique générale avec une densité de charge ρ sur une surface finie.

i)En utilisant les équation de l'éléctrostatique, exprimez ρE comme une dérivé totale.

ii)Puisque la densité de charge a une extension finie (un volume V), on peut entourer le volume avec une surface ∂V. En utilisant le résultat i), exprimez la force totale sur la configuration éléctrostatique comme un intégral sur cette surface.

iii)Le résultat ii) est général; appliquez-le à un conducteur. Comment est-ce que ces manipulations ont résolu l'ambiguité initiale?

Réponse:$\int \rho E_i = \frac{1}{2}\int_{\partial V_+} n_i(\nabla\phi)^2 = \frac{1}{2}\int_{\partial V_+} n_i(\mathbf{E})^2$, où ∂V_+ est une surface infinitésimale qui entoure le conducteur (où le champ éléctrique n'est pas nul). Cette expression peut être générée différemment, comme expliqué aussi dans Jackson, 1.11.

Exercice 3 *Méthode des charges images - II*

Une sphère conductrice de rayon a est dans un champ éléctrique constant et uniforme E_0, orienté dans la direction z.

i) On peut approximer le champ éléctrique comme s'il était produit par un couple de charges ponctuelles, l'une positive avec charge $+Q$ et placée à $z = +R$, l'autre négative avec charge $-Q$ et placée à $z = -R$. Dans une région petite par rapport à R, on a alors un champ éléctrique constant $E_0 \sim 2Q/R^2$ et dans la limite $R, Q \to \infty$ avec Q/R^2 constant l'approximation devient exacte. Montrer que le potentiel dans tout l'espace produit par les deux charges pontuelles en présence de la sphère conductrice est donné par:

$$\Phi(r) = -E_0\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\cos\theta,$$

où r et θ sont les coordonnées sphérique du point d'observation. De combien de charges image avez-vous besoin et où est-ce qu'on doit les placer?

ii)*La sphère est maintenant divisée en deux parties par un plan perpendiculaire au champ éléctrique. Trouver la force nécessaire pour que las deux hémisphères ne se séparent pas.

iii)*Trouver la force qu'on doit exercer sur les deux hémisphères si la sphère était chargée initialement avec une charge Q.

*Essayez de résoudre ces deux points en utilisant vos connaissances; un nouveau exercise va être ajouté pour mieux clarifier ces questions.

Exercice 4 *Transformations de Lorentz*

Un fil infini de section négligeable a une densité de charge linéaire λ dans son système inertiel K'. Le système K' (et le fil) est en mouvement avec une vitesse $\mathbf{v}$, parallèle à la direction du fil, par rapport au système du laboratoire, K.

i) Écrire les champs éléctrique et magnétique du fil en coordonnées cylindrique dans K'. Trouver les composants des deux champs dans le sistème K.

ii) Quels sont les densités de charge et de courant dans le système inertiel K'? Et dans K?

iii) En utilisant les densités de charge et de courant dans le laboratoire, calculer directement les champs éléctrique et magnétique. Comparer avec les résultats i).

Exercice 5 *Symétrie*

On considère un solénoïde infini qui a n spires, pas nécessairement de section circulaire, enroulées pour unité de longueur et qui est parcouru par un courant I.

i) Montrer que le champ magnètique d'un solènoïde infini est parallèle à l'axe du solénoïde même.

ii) Calculer le champ magnétique du solénoïde.

Exercice 6 *Multipôles*

Une boucle de fil conducteur a la configuration en figure 1 et est parcourue par un courant I. w est la longueur des trois sections de la boucle.

i)Calculer le potentiel vecteur et le champ magnétique loin de la boucle en premier ordre dans le paramètre petit w/r (la longueur de la boucle sur la distance, r, entre la boucle et un loin observateur).

ii) Calculer maintenant la première correction en w/r au potentiel vecteur.

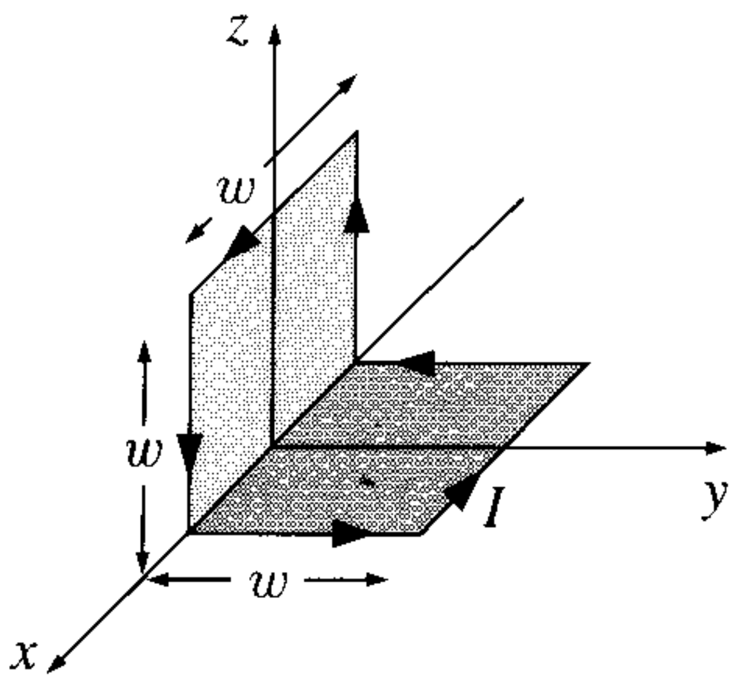

Figure 1: *Orientation of the wire.*