Exercice 1 *Antenne simplifiée*

De manière simplifiée, une antenne peut être représentée par la densité de courant suivante:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \cos(\omega t)\Theta(z+a)\Theta(-z+a)\delta(x)\delta(y)\mathbf{e}_z$$

i) À l'aide de l'équation de continuité, calculer la densité de charge électrique $\rho(\mathbf{x},t)$. Vérifier que la charge totale est consérvée dans le temps.

ii) En utilisant l'approximation du potentiel vecteur $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ à une distance d'observation grande par rapport à la longueur d'onde de la radiation, *i.e.* $|\mathbf{x}| >> \lambda = \frac{c}{\omega}$, calculer la puissance totale de radiation du système.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{1}{|\mathbf{x}|}\int \mathbf{J}\left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}|}{c} + \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}'}{c}\right) d^3\mathbf{x}'$$

Exercice 2 *Invariance*

On désire généraliser les expressions vues en cours. On considère un potentiel scalaire ϕ.

i) Dans l'électrostatique, en absence de charges, le potentiel scalaire $\phi(\mathbf{x})$ satisfait l'équation de Laplace $\triangle\phi = 0$. Trouvez l'ensemble des transformations de l'espace qui laissent cette équation invariante.

ii) Faites la même étude pour l'électrodynamique où $\Box\phi(t,\mathbf{x}) = 0$.

Exercice 3 *Multipôles - I*

Calculer le moment dipolaire $\mathbf{p}$ généré par les distributions de charges suivantes :

i) Une charge ponctuelle q placée à $(L/2,0,0)$ et une charge punctuelle $-q$ placée à $(-L/2,0,0)$.

ii) Une charge q placée à $(L/2,L/2,0)$, une charge $-q$ placée à $(L/2,-L/2,0)$, une charge q placée à $(-L/2,L/2,0)$ et une charge $-q$ placée à $(-L/2,-L/2,0)$.

iii) Une charge q placée à $(L/2,L/2,0)$, une charge $-q$ placée à $(L/2,-L/2,0)$, une charge $-q$ placée à $(-L/2,L/2,0)$ et une charge q placée à $(-L/2,-L/2,0)$. Calculer la composante xy du tenseur quadripolaire. Donner une estimation des éléments de matrice non nuls du n-pôle.

iv) Une charge q placée à $(L/2,L/2,0)$, une charge $-q$ placée à $(L/2,-L/2,0)$, une charge $-q$ placée à $(-L/2,L/2,0)$ et une charge q placée à $(-L/2,-L,0)$.

v) Compte tenu des résultats précédents, pouvez-vous imaginer une distribution de charge non triviale ayant dipôle et quadrupôle nuls ?

Exercice 4 *Multipoles - II (important, à faire à la maison)*
La définition du $n-$*pôle* est:

$$Q_{i_1 \dots i_n} = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') T_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{x}') \tag{1}$$

où le tenseur $T_{i_1 \dots i_n}$ est défini par:

$$T_{i_1 \dots i_n} = (2n-1)!! \; (x_{i_1} \dots x_{i_n}) - A_{i_1 \dots i_n}$$

avec la double factorielle définie par:

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 & \text{si } n \text{ impair} \\ n(n-2)(n-4) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n = -1, 0\,. \end{cases} .$$

Le terme $A_{i_1 \dots i_n}$ contient des deltas de Kronecker de telle manière que la trace soit nulle, c'est-à-dire que (attention, il y a toujours une somme sur les indices répétés):

$$T_{i_1 \dots i_n} \delta_{i_k i_l} = 0 \qquad \forall k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$$

i) Trouver le tenseur $T_{i_1 \dots i_n}$ pour le quadrupôle et le octupôle ($n = 2, 3$).

ii) Combien de composants indépendants y a-t-il dans le $n-$pôle ?

iii) Trouver une configuration de charges punctuelles ayant charge totale et dipôle nuls mais quadrupôle non-nul. Calculer una composante non-nulle du quadrupôle.