Exercice 1 *Champs d'une charge en mouvement*

On considère une charge ponctuelle en mouvement linéaire uniforme : la charge q se déplace le long de l'axe $\mathcal{O}z$ avec la vitesse constante $\mathbf{v} = (0, 0, v)^T$.
À l'exercice 2 de la série 6, nous avions trouvé les potentiels de Liénard-Wiechert $\phi(t, \mathbf{r})$ et $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ sourçant les champs de ce système.

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2}}$$
$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\phi(\mathbf{x}, t) \ ,$$

où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ est le facteur de Lorentz.

i) En partant des potentiels ci-dessus, trouver les champs électromagnétiques $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$.

ii) Exprimer les champs en fonction de la norme de $\mathbf{R}_t$, vecteur entre la charge q et l'observateur au temps t de l'observation et l'angle $\theta := \sphericalangle(\mathbf{R}_t, \mathbf{v})$. Etudier les champs dans les cas non-relativiste $v \ll c$ et ultra-relativiste $v \approx c$.

Exercice 2 *Atome classique*

On considère un modèle classique pour l'atome d'hydrogène:

- Le proton de charge $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C et de masse $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg immobile au centre.
- L'électron de charge $-e$ et de masse $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg $\ll m_p$ en mouvement circulaire uniforme à une distance $r_0 = 5.29 \cdot 10^{-11}$ m autour du proton.

i) Calculer la fréquence ν de cette rotation.

ii) Intégrer le résultat ci-dessous obtenu au point ii) de l'exercice 1 de la série 6 pour le vecteur de Poynting afin d'obtenir la puissance totale rayonnée par le système.

$$\mathbf{S}(t) = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} \frac{|\mathbf{a}|^2 \sin^2(\alpha(t))}{r^2} \mathbf{e_r} \ ,$$

où $\alpha(t)$ est l'angle formé au temps t par le vecteur accélération $\mathbf{a}$ de l'électron et la direction de visée $\mathbf{e_r}$, $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{e_r})$.

iii) Estimer la durée de vie de cet atome classique. Pourquoi vivez-vous encore?

Exercice 3 *Dipôle électrique*

Considérez la distribution de charges ponctuelles suivante: une charge $3q$ située à $(0, 0, d)$, une charge q à $(0, 0, -d)$, une charge $-2q$ à $(0, d, 0)$ et une charge $-2q$ à $(0, -d, 0)$.
Calculez le potentiel de cette distribution de charges à une distance très grande ($d \ll R$).

Exercice 4 *Moment magnétique*

- On considère deux charges q_1 et q_2 tournant sur une même orbite circulaire de rayon r autour du même centre. Montrer que le moment magnétique du système défini par :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i (\mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i)$$

est équivalent à la définition usuelle :

$$\mathbf{m} = JS\mathbf{n}$$

où J, S et $\mathbf{n}$ sont respectivement le courant total produit par les charges, la surface du cercle, et la normale au plan du cercle.

- On considère une boucle de courant circulaire, de rayon R, traversée par un courant I. Calculer le moment magnétique dipolaire. En déduire le potentiel vecteur à des distances $r \gg R$.