Exercice 1 *Radiation synchrotron*

Soit un électron non-relativiste ($v \ll c$) en mouvement circulaire dans un champ magnétique $\mathbf{B}$ orthogonal au plan du mouvement.

i) Calculer le vecteur de Poynting $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E}_e \times \mathbf{B}_e$, en utilisant pour les champs électromagnétiques produits par l'électron accéléré ($\mathbf{E}_e$, $\mathbf{B}_e$) les formules de Liénard-Wiechert vues au cours dans la limite non-relativiste $v \ll c$.

ii) Calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

$$< \mathbf{S} >:= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}(t) dt$$

En déduire la puissance totale rayonnée par cet électron.

iii) Étudier la distribution angulaire du rayonnement.

Exercice 2 *Potentiels d'une charge en mouvement*

On considère une charge ponctuelle en mouvement linéaire uniforme : la charge q se déplace le long de l'axe $\mathcal{O}z$ avec la vitesse constante $\mathbf{v} = (0, 0, v)^T$.
Calculer les potentiels scalaire et vecteur de Liénard-Wiechert $\phi(t, \mathbf{r})$ et $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ où t est le temps au moment de l'observation et $\mathbf{r}$ la position de l'observateur. Montrer qu'on peut les mettre sous la forme

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \frac{q\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \gamma^2(z - vt)^2}}$$
$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{v}}{c^2}\phi(\mathbf{x}, t) \ ,$$

où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ est le facteur de Lorentz.

Exercice 3 *Symmetrie de la fonction de Green de Dirichlet (cas statique)*

Montrer que $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = G_D(\mathbf{x}', \mathbf{x})$.

Indication: Utiliser le theorème de Green.