Exercice 1 *Plan infini*

On considère la région $\{z \geq 0\}$. Le potentiel $\Phi(x, y, z)$ est donné sur le plan $\{z = 0\}$, $\Phi(x, y, 0)$, et nous voulons le trouver dans tout l'espace ($z > 0$).

Avez-vous besoin de la fonction de Green de Neumann ou de Dirichlet ? Trouver une bonne fonction de Green pour ce probléme, et écrire une expression sous forme intégrale pour le potentiel dans tout l'espace (en connaissant $\rho(\mathbf{x})$ et $\Phi(x, y, 0) = V(x, y)$).

Indication : Nous rappelons que le solution générale de l'équation de Poisson est donnée par :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}')G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')d^3x' + \oint_S \left(G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \Phi}{dn'} - \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G}{dn'} \right) da'$$

Exercice 2 *Sphère conductrice avec hémisphères à différents potentiels*

Dans la série précédente nous avons calculé le potentiel en tout point de l'espace pour une charge ponctuelle q placée en $\mathbf{y}$ en présence d'une sphère conductrice centrée à l'origine et de rayon a, dont le potentiel était fixé à la terre. Utiliser la solution trouvée pour calculer le potentiel généré par une sphère conductrice, dont l'hémisphère supérieur ($z > 0$) est maintenue à un potentiel $+V$, tandis que le potentiel de l'hémisphère inférieur ($z < 0$) est fixé à $-V$.

Calculer le potentiel en tout point de l'espace en prenant la limite $|\mathbf{x}| \gg a$ et en ne conservant que le terme dominant.

Indication : Nous rappelons que le solution générale de l'équation de Poisson en présence de condition aux bords de Dirichlet (i.e. potentiels fixés) est donnée par :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}')G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')d^3x' - \oint_S \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G_D}{dn'} da'$$

Exercice 3 *Utilisation des charges images (II)*

Un fil conducteur chargé avec densité de charge linéique τ est placé parallèlement et à une distance R de l'axe d'un cylindre conducteur de rayon b centré à l'origine, et dont le potentiel est constant sur le cylindre et est nul à l'infini.

(a) Trouver la fonction de Green pour un fil conducteur infini chargé.
Indication : Cette fonction de Green correspond à la solution de l'équation de Poisson en 2 dimensions pour une charge unité placée à l'origine.

(b) Trouver la grandeur et la position de la charge image, ainsi que la valeur du potentiel sur le cylindre.

(c) Calculer le potentiel en tout point de l'espace, ainsi que son comportement loin du cylindre.

(d) Calculer la densité de charge surfacique induite sur le cylindre, et trouver où elle est maximale.

Exercice 4 *Fonction de Green (II)*

Prouver ce résultat utilisé au cours :

$$\int_{B_R} (\Delta + k^2)\hat{G}(k,r) d^3r = -4\pi \,,$$

où B_R est une boule de rayon R et $\hat{G}(k,r) = \frac{1}{r}e^{ikr}$.

Indication : Utiliser la fonction de Green régulée

$$\hat{G}_\epsilon(k,r) = \frac{1}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}} e^{ik\sqrt{r^2+\epsilon^2}} \,,$$

telle que $\lim_{\epsilon \to 0} \hat{G}_\epsilon(k,r) = \hat{G}(k,r)$.