Exercice 1 *Théorème de réciprocité de Green*

Prouver le théorème de réciprocité de Green qui établit que si Φ est le potentiel dû à une densité volumique de charge ρ dans un volume V et une densité surfacique de charge σ sur la surface conductrice S qui entoure le volume V, alors que Φ' est le potentiel dû à une autre distribution de charge ρ' et σ', alors

$$\int_V \rho \Phi' d^3x + \oint_S \sigma \Phi' da = \int_V \rho' \Phi d^3x + \oint_S \sigma' \Phi da$$

Exercice 2 *Utilisation du théorème de réciprocité de Green*

On considère une charge ponctuelle q placée entre deux plans conducteurs parallèles infinis mis à la terre et séparés par la distance d. Utiliser le théorème de réciprocité de Green pour prouver que la charge totale induite sur l'un des plans est égale à

$$Q = -q\frac{l}{d},$$

où l est la distance de la charge à l'autre plan. **Indication:** Utiliser comme comparaison un problème d'électrostatique avec les mêmes surfaces dont le potentiel et la densité de charge sont connus.

Exercice 3 *Utilisation des charges images*

On considère une sphère conductrice de rayon a centrée à l'origine du système et dont le potentiel est mis à la terre, i.e. $\phi(r = a) = 0$. En utilisant la technique de la charge image, trouvez la distribution de charges $\sigma(\mathbf{x})$ à la surface de cette sphère induite par une charge ponctuelle q placée en $\mathbf{y}$, à l'extérieur de la sphère ($|\mathbf{y}| > a$, avec origine au centre de la sphère). **Indication:** Une seule charge image est nécessaire et il est recommandé de paramétriser l'espace par la distance au centre de la sphère $x = |\mathbf{x}|$, et l'angle γ formé entre $\mathbf{x}$ et la position de la charge $\mathbf{y}$.

Exercice 4 *Conducteurs et capacités*

On considère un ensemble de n conducteurs possédant une géométrie quelconque et disposés en différents points de l'espace. On fixe le potentiel de chaque conducteur i à la valeur V_i. Montrer que la charge totale Q_i portée par chaque conducteur peut s'écrire (avec sommation implicite des indices répétés)

$$Q_i = C_{ij} V_j$$

et donner l'expression formelle des capacités C_{ij}. En utilisant ce résultat, montrez ensuite que l'énergie potentielle de ce système de conducteurs est

$$E = \frac{1}{2} C_{ij} V_i V_j$$

Ceci est une généralisation des formules connues pour une capacité simple.