Exercice 1 *Rappels de magnétostatique: fil infini*

Soit un fil infini de section négligeable parcouru par un courant I:

i) En utilisant la symétrie du problème calculer le champ magnétique $\mathbf{B}$ en déduire le potentiel vecteur $\mathbf{A}$.

ii) Calculer $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}$ avec la loi de Biot-Savart:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x}'$$

Exercice 2 *Distribution δ de Dirac*

i) Prouver que l'expression suivante peut servir de représentation pour la distribution δ:

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)}$$

en montrant que qu'elle satisfait $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$ avec f une fonction test lisse décroissant vite. Plus précisément, on fera l'hypothèse que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ où $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace de Schwartz.

ii) Montrer que l'égalité suivante est vérifiée :

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i)$$

où x_i sont les zéros de $f(x)$ et on suppose que $f'(x_i) \neq 0$.

iii) Prouver l'identité suivante dans un espace n-dimensionnel:

$$\int f(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} \delta^n(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) d^n x = -\nabla_{\mathbf{x}} f|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$$

iv) Soit $g(x)$ une fonction lisse, non-nulle uniquement dans un intervalle $[a,b]$ contenant x_0. Calculer:

$$\int g(x) \theta'(x-x_0)\ dx\ .$$

En déduire une relation entre la fonction θ de Heaviside et la fonction δ de Dirac.

v) Evaluer les intégrales suivantes:

$$\int g(x)\delta'(x-x_0)\ dx$$
$$\int g(x)\delta''(x-x_0)\ dx$$

vi) Calculer $\exp(x_0\frac{d}{dx})\delta(x)$.

vii) Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\omega t)d\omega=\delta(t).$$